УДК 519.21

Дубко В.О.,
д.ф.-м.н., професор,
зав. каф. вищої математики та економіко-математичного моделювання,
Академія муніципального управління;
Дубко О.В.,
пошукач
Науково-учбного центру прикладної інформатики НАН України

УЗАГАЛЬНЕНА ФОРМУЛА ІТО-ВЕНТЦЕЛЯ ТА ПРИКЛАДИ ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Анотація. Розглянуто варіант обґрунтування узагальненої формули Іто-Вентцеля. Встановлено взаємозв'язок між різними представленнями узагальненої формули Іто-Вентцеля. Наведено приклади застосування формули при доведенні теореми про рівняння для перших стохастичних інтегралів, ядер інтегральних інваріантів узгоджених з узагальненим рівнянням Іто.
Ключові слова: ядро інтегрального інваріанта, пуассонівська міра, процес Вінера, узагальнене рівняння Іто

Дубко В.А.,
д.ф.-м.н., профессор,
зав. каф. высшей математики и экономико-математического моделирования,
Академия муниципального управления.
Дубко А.В.;
соискатель
Научно-учебного центра прикладной информатики НАН Украины

ОБОЩЕННЯ ФОРМУЛА ИТО-ВЕНТЦЕЛЯ И ПРИМЕРЫ ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Аннотация Рассмотрен вариант обоснования обобщенной формулы Ито-Вентцеля. Установлена взаимосвязь между различными представлениями обобщенной формулы Ито-Вентцеля. Приведены примеры применения формулы при доказательстве теорем об уравнениях для первых стохастических интегралов, ядер интегральных инвариантов, согласованных с обобщенным уравнением Ито.

Ключевые слова: ядро интегрального инварианта, пуассоновская мера, процесс Винера, обобщенное уравнение Ито.

Doobko V. A.,
Dr. in mathematics, Full Professor,
Head of Higher Mathematics and Economic-Mathematical Modeling Department,
Academy of Municipal Administration;
Doobko A. V.,
Candidate for the degree of PhD,
Research and Training Center for Applied Computer Science of NAN Ukraine

THE GENERALIZED ITO-WENTZELL FORMULA AND EXAMPLES OF ITS APPLICATION

Abstract. The variant of proof the generalized Ito-Ventzell formula is examined. The relationship between different representations of the generalized Ito-Ventzll formula is considering. Examples of the use of this formula at proof of theorem about stochastic equations for the first integrals, kernels of integral invariants associated with the generalized Ito equation.

Keywords: *kernel of the integral invariant, generalized Ito equation, the Poisson measure, Wiener process.*

Обзор предшествующих исследований. После работы [2], в которой предложен алгоритм построения, обобщающий формулу Ито-Вентцеля, на случай обобщенных уравнений Ито, появились статьи, использующие различные подходы доказательства названной формулы. Построения и обоснования обобщенной формулы Ито-Вентцеля в этих работах основывались и на различных представлениях обобщенных уравнений Ито (более полный обзор подан в [4], [5]). Поэтому возникла необходимость показать взаимосвязь между разными представлениями обобщенной формулы Ито-Вентцеля.

Внимание к этой формуле связано с тем, что она дает правило дифференцирования случайной функции, которая является решением стохастического уравнения. Так, например, в [3], эта формула стала основой для строгого обоснования теорем о первых стохастических интегралах обобщенных уравнений Ито, уравнения для стохастических ядер.

Во многих работах обоснования обобщенной формулы Ито-Вентцеля либо проведено для узкого класса процессов обобщенных уравнений Ито, или они громоздки и содержат неточности, что не позволяет рассматривать их как строгие [5].

Формулировка задачи. Целью работы являлось представление варианта получения и обоснования обобщенной формулы Ито-Вентцеля, установление связи между коэффициентами разных представлений этой формулы. Другой задачей являлась демонстрация применения этой формулы при построении и обоснования уравнений в частных производных для стохастических первых интегралов и стохастических ядер обобщенных уравнений Ито.

В соответствии с этими целями и построено дальнейшее изложение.

Обобщенная формула Ито-Вентцеля. Пусть $x(t) \in \text{Ў}^n$ решение обобщенного уравнения Ито:

$$\begin{gathered} dx(t) = a(t)dt + b_k(t)dw_k(t) + \int g(t;\gamma)\nu(dt;d\gamma) \\ x(t) = x(t;x_0)\,|_{t=0} = x_0 \in \text{Ў}^m \end{gathered} \tag{1}$$

где $w(t)$ — m-мерный винеровский процесс, $\nu(t;\Delta u)$ — однородная по t случайная мера Пуассона ,

$$\int g_i(t;\gamma)\nu(dt;d\gamma): \int\limits_{R(\gamma)} g_i(t;\gamma)\nu(dt;d\gamma)$$

$$\int\limits_0^T dt\int |g(t;\gamma)|\Pi(d\gamma)<\infty,\ \mathrm{M}[\nu(dt;d\gamma)]=dt\Pi(d\gamma),$$

и по индексам, встречающимся дважды, здесь и далее, ведется суммирование.

Относительно коэффициентов уравнений (1) полагаем, что выполнены самые общие предложения, обеспечивающие существование и единственности решений [1].

Теорема 1. Пусть $F(t;x)$, $(t, x) \in [0, T] \times \mathrm{R}^n$ - скалярная функция подчиненная стохастическому уравнению:

$$\begin{aligned} &dF(t;x)=Q(t;x)dt+D_k(t;x)dw_k(t)+\int G(t;x;\gamma)\nu(dt;d\gamma), \\ &F(t;x)|_{t=0}=F(x)\in C_0^2 \end{aligned} \tag{2}$$

***L*.а).** $Q(t;x), D_k(t;x), G(t;x;\gamma)\in \mathrm{R}$ неупреждающие, в общем, случайные функции, измеримые относительно того же потока σ – алгебр F_t, что и $w(t)$, $\nu(t;A), \forall A\in \boldsymbol{B}$ – фиксированной борелевской σ – алгебры.

***L*.в).** С вероятностью единица, $Q(t;x), D_k(t;x), G(t;x;\gamma)$, вместе со своими вторыми частными производными по компонентам x, непрерывны и ограничены $\forall t, x$.

***L*.с).** $\int |\nabla^\beta G(t;x;\gamma)|^\alpha \Pi(d\gamma)<\infty,\ \forall x;\ \alpha=1,2$; ∇^β - условное обозначение частных производных по компонентам параметра x, порядка $\beta=0,1,2$.

Тогда, если $x(t)$ случайный процесс, подчиненный системе уравнений (1), то справедлива формула:

$$\begin{aligned} dF(t;x(t)) &= Q(t;x(t))dt + D_k(t;x(t))dw_k + b_{i,k}(t)\frac{\partial}{\partial x_i}F(t;x(t))dw_k + \\ &+[a_i(t)\frac{\partial}{\partial x_i}F(t;x(t))+\frac{1}{2}b_{i,k}(t)b_{j,k}(t)\frac{\partial^2 F(t;x(t))}{\partial x_i \partial x_j}+ \\ &+b_{i,k}(t)\frac{\partial}{\partial x_i}D_k(t;x(t))]dt+ \end{aligned} \tag{3}$$

$$+\int[(F(t;x(t)+g(t;\gamma))-F(t;x(t))]\nu(dt;d\gamma)+\int G(t;x(t)+g(t;\gamma);\gamma)\nu(dt;d\gamma).$$

Доказательство. Отметим, что при указанных ограничениях ***L*)** возможно дифференцирование $F(t;x)$ по компонентам параметра x. Соответствующие решения для производных и смешанных производных, построенных на основе (2), существуют, единственны и приводят к таким оценкам и свойствам:

L_1) $\mathrm{P}(|\nabla^\beta F(t;x)|>\varepsilon^{-1})\le \varepsilon^2 C, C$ – некоторая постоянная,

$$\mathrm{L}_2)\,\underset{x|\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}|\,F(t;x+y)-F(t;y)\,|=0,\ \underset{|x|\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}|\,F'_{x_i}(t;x+y)-F'_{x_i}(t;y)\,|=0,$$

$$\underset{x|\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}|\,F''_{x_ix_j}(t;x+y)-F''_{x_ix_j}(t;y)\,|=0,\ \forall(t,\ y)\ \in\ [0,\ T]\ \times \mathrm{R}^n.$$

Заметим, что уравнение (2), в силу произвольности x, эквивалентно следующему:

$$d_tF(t;x+y)=Q(t;x+y)dt+D_k(t;x+y)dw_k(t)+\int G(t;x+y;\gamma)\nu(dt;d\gamma) \qquad (4)$$

Пусть $f(x)$ детерминированная, непрерывная вместе со своими частными производными, вплоть до вторых включительно и

$$\mathrm{K}).\int_{\mathbb{R}^n}|\,f(x)\,|\,d\Gamma(x),\ \int_{\mathbb{R}^n}|\,\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\,|\,d\Gamma(x),\ \int_{\mathbb{R}^n}|\,\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j\partial x_i}\,|\,d\Gamma(x)\le const,$$

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x)=0;\ \lim_{|x|\to\infty}\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}=0.$$

Воспользовавшись обобщенной формулой Ито, уравнениями (1) и (2), можем убедиться, что

$$\begin{aligned} dF(t;y)f(y-x(t;z)) &= f(y-x(t;z))[Q(t;y)dt+D_k(t;y)dw_k(t)]- \\ &-F(t;y)f_{y_i}(y-x(t;z))[a_i(t)dt+b_{i,k}(t)dw_k(t)]+ \end{aligned} \qquad (5)$$

$$+0{,}5\cdot b_{i,k}(t)b_{j,k}(t;))f_{y_i,y_j}(y-x(t;z))-D_k(t;y)b_{i,k}(t)f_{y_i}(y-x(t;z))dt+$$

$$+\int[f(y-x(t;z)-g(t;\gamma))\{F(t;y)+G(t;y;\gamma)\}-f(y-x(t;z))F(t;y)]\nu(dt;d\gamma)$$

С учетом требований к коэффициентам уравнения (2),(3), свойств L) и ограничений для $f(x)$, можно определить интегралы по y $\forall x(t;z),t,\gamma$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(y)F(t;y)f(y-x(t;z)),\ \int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(y)f(y-x(t;z))Q(t;y),\ (d\Gamma(y)=\textstyle\prod_{i=1}^n dy_i),$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(y)f_{y_i}(y-x(t;z))D_k(t;y),\int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(y)f(y-x(t;z))D_k(t;y),$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(y)f_{y_i,y_j}(y-x(t;z)),\ \int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(y)F(t;y)f_{y_i}(y-x(t;z)),$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(y)[f(y-x(t;z)-g(t;\gamma))\{F(t;y)+G(t;y;\gamma)\}-f(y-x(t;z))F(t;y)]\,,$$

трактуя их как среднеквадратичные пределы сумм Римана.

Проинтегрировав (5) по пространству параметра y, а затем, выполнив интегрирование по частям, перенесем производные на $F(t;y)$. В результате приходим к равенству:

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(y)[F(t;y)f(y-x(t;z))-F(y)f(y-z)]=$$

$$=\int_0^\tau dt\{\int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(y)f(y-x(t;z))\{[Q(t;y)+F_{y_i}(t;y)a_i(t)+D_{y_ik}(t;y)b_{i,k}(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot F_{y_i,y_j}(t;y)b_{i,k}(t)b_{j,k}(t)+D_{y_ik}(t;y)b_{i,k}(t)]dt+[D_k(t;y)+b_{i,k}(t)]dw_k(t)\}+ \quad (6)$$

$$+\int_0^\tau\int\nu(dt;d\gamma)\int_{\mathbb{R}^n}d\Gamma(y)\{[f(y-x(t;z)-g(t;\gamma))F(t;y)-f(y-x(t;z))F(t;y)]+$$

$$+f(y-x(t;z)-g(t;\gamma))G(t;y;\gamma)\}.$$

Произведем в подынтегральных выражениях замену переменных:

а) $y-x(t;z)=\tilde{y}$, в интегралах связанных t и $w_k(t)$, и переобозначим $\tilde{y}\to y$;

в) $y-x(t;z)-g(t;\gamma)=\tilde{y}$, в интегралах, связанных с пуассоновской мерой, и переобозначим $\tilde{y}\to y$.

В результате приходим к равенству:

$$\int_{\mathbb{R}^n}d\Gamma(y)f(y)[F(\tau;y+x(\tau;z))-F(y+z))]=$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}d\Gamma(y)f(y)\{\int_0^\tau([Q(t;y+x(t;z))dt+D_k(t;y+x(t;z))dw_k(t)]+$$

$$+F_{y_i}(t;y+x(t;z))[a_i(t)dt+b_{i,k}(t)dw_k(t)]+$$

$$+0,5\cdot F_{y_i,y_j}(t;y+x(t;z))b_{i,k}(t)b_{j,k}(t))dt+D_{y_ik}(t;y+x(t;z))b_{i,k}(t)dt+$$

$$+\int[(F(t;x(t;z)+g(t;\gamma)+y)-F(t;x(t;z)+y)]\nu(dt;d\gamma)+$$

$$+\int G(t;x(t;z)+g(t;\gamma)+y;\gamma)\nu(dt;d\gamma))\}.$$

Перейдем, затем, от производных по y_i,y_j к производным по x_i,x_j:

$$\int_{\mathbb{R}^n}d\Gamma(y)f(y)([F(\tau;y+x(\tau;z))-F(y+z))]-$$

$$-\int_0^\tau\{[Q(t;y+x(t;z))dt+D_k(t;y+x(t;z))dw_k(t)]+$$

$$+F_{x_i}(t;y+x(t;z))[a_i(t)dt+b_{i,k}(t))dw_k(t)]+D_{x_ik}(t;y+x(t;z))b_{i,k}(t))dt+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot b_{i,k}(t)b_{j,k}(t)F_{x_i,x_j}(t;y+x(t;z))dt+b_{i,k}(t)D_{x_ik}(t;y+x(t;z))dt+$$

$$+\int[(F(t;x(t;z)+y+g(t;\gamma))-F(t;x(t;z)+y)]\nu(dt;d\gamma)+$$

$$+\int G(t;x(t;z)+g(t;\gamma)+y;\gamma)\nu(dt;d\gamma)\})=0.$$

В силу произвольности $f(y)$ из класса K), следствий L), гарантирующих существование и единственность, на каждой из траекторий $x(t;z)$, $\forall y$, функций и коэффициентов, зависящих от $(x(t;z)+y)$ в равенстве, приходим к выводу, что оно будет выполнено, только тогда, когда $\forall y,z$:

$$dF(t;x(t;z)+y)=Q(t;x(t;z)+y)dt+D_k(t;x(t;z)+y)dw_k+$$

$$+b_{i,k}(t)\frac{\partial}{\partial x_i}F(t;x(t;z)+y)dw_k+[a_i(t)\frac{\partial}{\partial x_i}F(t;x(t;z)+y)+$$

$$+\frac{1}{2}b_{i,k}(t)b_{j,k}(t)\frac{\partial^2 F(t;x(t;z)+y)}{\partial x_i\partial x_j}+b_{i,k}(t)\frac{\partial}{\partial x_i}D_k(t;x(t;z)+y)]dt+$$

$$+\int G(t;x(t)+g(t;\gamma)+y;\gamma)\nu(dt;d\gamma)+$$

$$+\int[(F(t;x(t)+g(t;\gamma)+y)-F(t;x(t;z))+y)]\nu(dt;d\gamma).$$

С учетом замечания (4), выбирая $y=0$, и приходим к формуле (3), одному из представлений обобщенной формулы Ито-Вентцеля.

О различных представлениях обобщенной формулы Ито-Вентцеля. Вид уравнений (3), зависят от вида уравнения для $x(t;z)$. Остановимся на некоторых из них, и приведем правила перехода между различными представлениями формулы Ито-Вентцеля.

Рассмотрим два представления обобщенного уравнения Ито:

$$dx(t)=a(t)dt+b_k(t)dw_k(t)+\int g(t;\gamma)\nu(dt;d\gamma), \tag{7}$$

$$dx(t)=\tilde{a}(t)dt+\tilde{b}_k(t)dw_k(t)+\int g(t;\gamma)\tilde{\nu}(dt;d\gamma). \tag{8}$$

где $\tilde{\nu}(dt;d\gamma)=\nu(dt;d\gamma)-dt\prod(d\gamma)$ - центрированная пуассоновская мера.

Пусть $x(t)$ –решение системы (8), а $F(t;x)$ - системы (2). Перейдем от (8), к представлению (7). Это приведет к тому, что коэффициенты $a(t)$ в (7) должны быть представлены в виде:

$$a(t)=\tilde{a}(t)-\int g(t;\gamma)\prod(d\gamma).$$

Пусть, теперь, $x(t)$ –решение системы (8), а $F(t;x)$ - системы

$$dF(t;x)=\tilde{Q}(t;x)dt+D_k(t;x)dw_k(t)+\int G(t;x;\gamma)\tilde{\nu}(dt;d\gamma) \tag{9}$$

Выполним переход от (9) к (2):

$$dF(t;x)=[\tilde{Q}(t;x)-\int G(t;x;\gamma)\prod(d\gamma)]dt+D_k(t;x)dw_k(t)+\int G(t;x;\gamma)\nu(dt;d\gamma)$$

Для того же, чтобы получить правило нахождения $dF(t;x(t))$, обусловленного системой (7), (9) в (2), необходимо трактовать $Q(t;x)$ как выражение:

$$Q(t;x)=\tilde{Q}(t;x)-\int G(t;x;\gamma)\prod(d\gamma)].$$

Если рассматривать как исходные системы (8), (9), то для того, чтобы применить теорему 1, в (2), (7) необходимо перейти к преставлениям:

$$a(t)=\tilde{a}(t)-\int g_i(t;\gamma)\prod(d\gamma),\quad Q(t;x)=\tilde{Q}(t;x)-\int G(t;x;\gamma)\prod(d\gamma)]$$

Не является сложной задачей переход в (3) к интегрированию с центрированной пуассоновской мерой $\tilde{\nu}(dt;d\gamma)$. В этом случае, в уравнение вида (2) появятся дополнительные слагаемые при dt:

$$\int[(F(t;x(t)+g(t;\gamma))-F(t;x(t))]\Pi(d\gamma)+\int G(t;x(t)+g(t;\gamma);\gamma)\Pi(d\gamma).$$

Как видим, различия в представлениях обобщенной формулы Ито-Вентцеля носят «технический» характер. Важней ограничения на коэффициенты различных представлений исходных уравнений, допускающих существование и единственность решений, а так же осуществимость приведенных переходов.

Перейдем к примерам применения обобщенной формулы Ито-Вентцеля.

Уравнение для стохастического первого интеграла обобщенного уравнения Ито. Пусть $u(t;x;\omega)$ - ***случайная функция***, определенная на том же вероятностном пространстве, что и решение системы (1) (ω - индекс реализации).

Определение.1. *Случайную функцию* $u(t;x;\omega)$ *назовем стохастическим первым интегралом системы* (1)*, если с вероятностью единица*

$$u(t;x(t;x_0);\omega)=u(x_0,\omega) \tag{10}$$

на решениях $x(t;x_0;\omega)$ *системы* (1).

(Индекс реализации ω, в дальнейшем, опускается).

Построим уравнение для стохастических первых интегралов обобщенного уравнения Ито, предполагая, что уравнение для $u(t;x)$ существует и имеет вид:

$$\begin{gathered} d_t u(t;x)=Q(t;x)dt+D_k(t;x)dw_k(t)+\int G(t;x;\gamma)\nu(dt;d\gamma), \\ u(t;x)|_{t=0}=u(x)\in C_0^2. \end{gathered} \tag{11}$$

Опираясь на определение (10), уравнение (1) и воспользовавшись обобщенной формулы Ито-Вентцеля (3), находим:

$$\begin{gathered} du(t;x(t))=Q(t;x(t))dt+D_k(t;x(t))dw_k+b_{i,k}(t)\frac{\partial}{\partial x_i}u(t;x(t))dw_k+ \\ +[a_i(t)\frac{\partial}{\partial x_i}u(t;x(t))+\frac{1}{2}b_{i,k}(t)b_{j,k}(t)\frac{\partial^2 u(t;x(t))}{\partial x_i\partial x_j}+ \\ +b_{i,k}(t)\frac{\partial}{\partial x_i}D_k(t;x(t))]dt+\int G(t;x(t)+g(t;\gamma);\gamma)\nu(dt;d\gamma) \\ +\int[(u(t;x(t)+g(t;\gamma))-u(t;x(t))]\nu(dt;d\gamma)=0. \end{gathered} \tag{12}$$

Равенство (12) будет, реализовано, если в качестве коэффициентов в (11) взять выражения:

$$\begin{gathered} Q(t;x)=[-a_i(t)\frac{\partial}{\partial x_i}u(t;x)-\frac{1}{2}b_{i,k}(t)b_{j,k}(t)\frac{\partial^2 u(t;x)}{\partial x_i\partial x_j}+ \\ +b_{i,k}(t)\frac{\partial}{\partial x_i}(b_{j,k}(t)\frac{\partial}{\partial x_j}u(t;x))] \end{gathered}, \tag{13}$$

$$D_k(t;x) = -b_{i,k}(t)\frac{\partial}{\partial x_i}u(t;x)\,; \tag{14}$$

$$G(t;x;\gamma) = u(t;x - g(t;\gamma)) - u(x;t)\,, \tag{15}$$

когда в уравнении (1) $g(t;\gamma)$ не зависит от x;

$$G(t;x;\gamma) = u(t;x - g(t;x^{-1}(t;x;\gamma);\gamma)) - u(x;t)\,, \tag{16}$$

когда $g(t;\gamma) = g(t;x;\gamma) -$ непрерывная, гладкая функция своих аргументов.

В этих формулах $x^{-1}(t;y;\gamma)$ - символьное обозначение решения относительно переменной x равенства

$$y = x + g(t;x;\gamma)\,, \tag{17}$$

в областях взаимно однозначного соответствия между переменными y и x в пространстве переменных $t;x;\gamma$. При указанных требованиях к $g(t;x;\gamma)$, такое разбиение на конечные подобласти, покрывающих все пространство переменных $t;x;\gamma$ возможно, а, следовательно, и построение обратной функции $x^{-1}(t;y;\gamma)$, в каждой из подобластей однозначного соответствия.

Теорема 2. Случайная функция $u(t;x)$, стохастический дифференциал которой определяется (11), а коэффициенты $D_k(t;x)$, $Q(t;x)$ и $G(t;x;\gamma)$, определяются (13) – (16) является стохастическим первым интегралом обобщенного уравнения Ито (1). Причем, при указанных ограничениях на коэффициенты, эти условия являются необходимыми и достаточными.

Доказательство. Достаточность, проверяем заменой в (12) коэффициентов $D_k(t;x(t))$, $Q(t;x(t))$ и $G(t;x(t);\gamma)$, на соответствующие им представления (13)–(16). Необходимость следует из условий существования и единственности решений (1), (11) и, как следствие, единственность представления стохастического дифференциала для произвольной случайной функции $u(t;x(t))$, стохастический дифференциал от которой определяется (11) [3].

Отметим, что в случае выбора других представлений сходных уравнений для $x(t;z)$ и $u(t;x)$, приходим к отличающимся представлениям коэффициентов в уравнении для стохастических первых интегралов, Между коэффициентами этих уравнений можем установить взаимосвязи, подобно тому, как это делалось при рассмотрении разных представлений обобщенных формул Ито-Вентцеля.

Уравнение для стохастического ядра интегрального инварианта.

Определение. Случайную функцию $\rho(t;x)$ назовем локальной стохастической плотностью, локальным стохастическим ядром уравнений Ито, если случайная функция

$$u(t;J;x) = J\rho(t;x) \tag{18}$$

является стохастическим первым интегралом расширенной системы:

$$dJ(t)=J(t)\{\frac{\partial b_{i,k}(t;x(t))}{\partial x_i}dw_k(t)+\int\frac{\partial g_i(t;x(t);\gamma)}{\partial x_i}\nu(dt;d\gamma)+$$

$$\left[\frac{\partial a_i(t;x(t))}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\frac{\partial b_{i,k}(t;x(t))}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial b_{j,k}(t;x(t))}{\partial x_j}-\right.\tag{19}$$

$$\left.-\frac{1}{2}\frac{\partial b_{i,k}(t;x(t))}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial b_{i,k}(t;x(t))}{\partial x_i}\right]dt]\}$$

$$\begin{gathered}dx_i(t)=a_i(t;x(t))dt+b_{i,k}(t;x(t))dw_k(t)+\int g_i(t;x(t);\gamma)\nu(dt;d\gamma),\\(x(t)=x(t,x(0))),\quad\forall x(0)\in\Gamma\subset\mathrm{R}^n;\ J(0)=1.\end{gathered}\tag{20}$$

<u>Теорема 3</u>. Пусть:

а). $Q(t;x),D_k(t;x)$, $Q(t;x;\gamma)$ - непрерывны и ограничены по совокупности переменных, вместе со своими частными производными, вплоть до вторых включительно, по компонентам x;

в) коэффициенты $a_i(t;x)$, $b_{i,k}(t;x)$ - непрерывны и ограничены вместе со своими производным

$$\frac{\partial a_i(t;x)}{\partial x_i},\ \frac{\partial b_{i,k}(t;x)}{\partial x_i},\ \frac{\partial^2 b_{i,k}(t;x)}{\partial x_i\partial x_j},\ i,j=\overline{1,n}\ ,$$

Тогда коэффициенты $Q(t;x),D_k(t;x)$, обеспечивающие выполнение условия (18) однозначно определяются из равенствами:

$$-D_k(t;x)=b_{i,k}(t;x(t))\frac{\partial\rho(t;x(t))}{\partial x_i}+\rho(t;x)\frac{\partial b_{i,k}(t;x)}{\partial x_i}=\frac{\partial\rho(t;x(t))b_{i,k}(t;x(t))}{\partial x_i};$$

$$-Q(t;x)=-b_{j,k}(t;x)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial\rho(t;x)b_{i,k}(t;x)}{\partial x_i}+[a_i(t;x)\frac{\partial(\rho(t;x))}{\partial x_i}+$$

$$+\frac{1}{2}b_{i,k}(t;x)b_{j,k}(t;x)\frac{\partial^2(\rho(t;x))}{\partial x_i\partial x_j}]+$$

$$+\rho(t;x)\left[\frac{\partial a_i(t;x)}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{i,k}(t;x)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial b_{j,k}(t;x)}{\partial x_j}-\frac{\partial b_{i,k}(t;x)}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial b_{i,k}(t;x)}{\partial x_i}\right)\right]dt=$$

$$=\frac{\partial\rho(t;x)a_i(t;x)}{\partial x_i}-\frac{\partial^2\rho(t;x)b_{i,k}(t;x)b_{j,k}(t;x)}{\partial x_i\partial x_j},$$

$$Q(t;x;\gamma)=[\rho(t;x-g(t;x^{-1}(t;x;\gamma);\gamma))D(x^{-1}(t;x;\gamma))-\rho(t;x)].$$

<u>Доказательство</u>. Определение (18) приводит к равенству:

$$dJ(t)\rho(t;x(t;x_0))=0\ ,$$

при условии, что $\rho(t;x)$, решение стохастического уравнения

$$d_t\rho(t;x) = Q(t;x)dt + D_k(t;x)dw_k(t) + \int G(t;x;\gamma)\nu(dt;d\gamma),$$
$$u(t;x)|_{t=0} = \rho(x) \in C_0^2.$$
,

аналогично тому, как это осуществлялось при построении уравнения для $u(t;x)$, определяется вид коэффициентов и в этом уравнении [3].

Заключение. Приведенные примеры не исчерпывают возможностей эффективного применения обобщенной формулы Ито-Вентценля. Эта формула играет ту же роль, что и правила дифференцирование сложных функции в математическом анализе. Т.е., является одним из важных элементов формирования основ современного стохастического анализа.

Использованные источники информации:

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения, Наук. думка, Киев, 1968.-354 с.
2. Дубко В.А. Открытые эволюционирующие системы. Некоторые аспекты математического моделирования /«Перша міжнародна науково-практична конференція "Відкриті еволюціонуючі системи"»(26-27 квіт. 2002 р.,Київ) (Додаток), ВНЗ ВМУРоЛ, Київ, 2002. - С.14–31./ Электронный ресурс/ http://openevolvingsystems.narod.ru/indexUkr.htm
3. Дубко В.А. Стохастические дифференциальные уравнения. Избранные разделы.Уч.-метод. пособ./К: Логос, 2012 - 68 с. Электронный ресурс http://www.twirpx.com/file/1333718/
4. Дубко В.А., Карачанская Е.В, Стохастические первые интегралы, ядра интегральных инвариантов и уравнения Колмогорова // Дальневост. матем. журн., 2014, том 14, номер 2, 200–216.
5. Карачанская Е.В. Доказательство обобщенной формулы Ито-Вентцеля с помощью дельта-функции и плотности нормального распределения.// Математические заметки СВФУ2014. Том 21, № 3, 46-58.

References:

1. Gihman I.I., Skorohod A.V., Stohasticheskie differencial'nye uravnenija, Nauk.dumka, Kiev, 1968.-354 s.
2. Dubko V.A. Otkrytye jevoljucionirujushhie sistemy. Nekotorye aspekty matematicheskogo modelirovanija /«Persha mizhnarodna naukovo-praktichna konferencija "Vidkriti evoljucionujuchi sistemi"»(26-27 kvit. 2002 r.,Kiïv) (Dodatok), VNZ VMURoL, Kiïv, 2002.-S.14–31/ Elektronnij resurs /http://openevolvingsystems.narod.ru/indexUkr.htm
3. Dubko V. A. Stohasticheskie differencial'nye uravnenija.Izbrannye razdely.Uch.-metod posob./K : Logos, 2012 - 68 s.. Elektronnij resurs /http://www.twirpx.com/file/1333718/
4. Dubko V.A., E.V.Karachanskaja Stohasticheskie pervye integraly, jadra integral'nyh invariantov i uravnenija Kolmogorova // Dal'nevost. matem. zhurn., 2014, tom 14, nomer 2.- S. 200–216.
5. Karachanskaja E.V. Dokazatel'stvo obobshhennoj formuly Ito-Ventcelja s pomoshh'ju del'ta-funkcii i plotnosti normal'nogo raspredelenija.// Matematicheskie zametki SVFU2014. Tom 21, № 3.-.C. 46-58.

Рецензент: Лисенко О.І.