УДК 661.1.054

Кузьменко Б.В.,
д.т.н., професор,
Академія муніципального управління

МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ГРАНУЛОМЕТРИЧНОГО (ФРАКЦІЙНОГО) СКЛАДУ ПРОМИСЛОВИХ КРИСТАЛІВ ЦУКРУ

Найбільш загальною характеристикою гранулометричного (фракційного) складу кристалів цукру є диференціальна функція їх розподілу за розмірними характеристиками. Самою вживаною розмірною характеристикою для кристалів цукру є їх лінійний розмір, найбільш відомою є так званий ситовий фактор і ситовий аналіз.
Ключові слова: кристали цукру, характеристики кристалів цукру

Кузьменко Б.В.,
д.т.н., профессор,
Академия муниципального управления

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ГРАНУЛОМЕТРИЧЕСКОГО (ФРАКЦИОННОГО) СОСТАВА ПРОМЫШЛЕННОЙ КРИСТАЛЛОВ САХАРА

Наиболее общей характеристикой гранулометрического (фракционного) состава кристаллов сахара является дифференциальная функция их распределения по размерным характеристикам. Самой употребляемой размерной характеристикой для кристаллов сахара является их линейный размер, наиболее известным является так называемый ситовый фактор и ситовый анализ.
Ключевые слова: кристаллы сахара, характеристики кристаллов сахара

Kuzmenko B.V.,
Professor,
Academy of Municipal Administration

MATHEMATICAL DESCRIPTION OF PARTICLE SIZE (FRACTIONAL) THE INDUSTRIAL SUGAR CRYSTALS

The most general description of grain-size (factious) distribution of crystals of sugar is a differential function of their distribution on size descriptions. The used size description for the crystals of sugar is them linear size, most well-known are the so-called sieve factor and sieve analysis.
Keywords: crystal sugar, crystal sugar characteristics

Введение. Важной для вопросов теории и практики кристаллизационных процессов проблемой является вопросы гранулометрического состава промышленных кристаллов сахара. Это такие задачи, как определение суммарной поверхности, массы полидисперсных кристаллов сахара, с известными линейными размерами, основные показатели гранулометрического состава кристаллов, и др.

Анализ последних исследований и публикаций. Задачу определения гранулометрического состава кристаллов, в частности сахара решали І.В. Мелихов, В.В. Кафаров, и др. В этих и других роботах стали активно применять метод дифференциальных функций распределения кристаллов за их размерными характеристиками. Возникли новые проблемы, связанные с разнотипностью распределений кристаллов за размерами.

Постановка задачи. Для случая анализа гранулометрического состава промышленных кристаллов сахара возможные такие основные типы дифференциальных функций распределения, это: распределение масс кристаллов за их линейными размерами, распределение линейных размеров кристаллов за них численностью, распределение масс кристаллов за их численностью, и др. Возникает вопрос о наличии функциональной и др. связи между этими и другими распределениями, и о методах их использование в расчетах, и т.п.

Решение задачи. Промышленные кристаллы сахара, получаемые и переделываемые в условиях промышленного производства (уваривание, обработка и центрифугирование сахарных утфелей первого продукта; сушка, клерирование, рафинация и пробеливание кристаллов второго и других продуктов, есть всегда полидисперсными за массами, линейными размерами и другими размерными характеристиками. По этой причине возникают задачи оценивания и математического описания поля дисперсности; выявление круга проблем, решение которых приводит к анализу гранулометрического состава промышленных кристаллов сахара; изучение влияния физических, технологических и др. параметров на показатели и процесс формирования гранулометрического состава кристаллов.

Самой общей характеристикой любой совокупности полидисперсных кристаллов есть дифференциальная (интегральная) функция их распределения за размерными характеристиками. В отдельных случаях рассматриваются числовые показатели поле дисперсности кристаллов, такие, как: средние масса и линейный размер, дисперсия, среднеквадратичное отклонение, коэффициент вариации (неравномерности), размеры квантиля разного типа. Имея дифференциальную или интегральную функцию распределения кристаллов можно определить любую другую характеристику, включительно с указанными выше показателями.

Основные задачи, которые нуждаются в углубленном изучении проблем гранулометрического состава промышленных кристаллов сахара такие: оценивание и прогнозирование показателей; оценивание массовой частицы фракции самых мелких кристаллов сахара, которые проходят через сита центрифуг в процессе центрифугирования сахарных утфелей и фракции кристаллов субмикронных размеров в процессе дезинтеграции кристаллов сахара; расчеты суммарной поверхности кристаллов в процессе их массового роста и растворения; изучение взаимосвязи между разными параметрами кинетики массовой кристаллизации. Все эти задачи решаются с использованием метода дифференциальных и интегральных функций распределения.

Выберем для некоторой совокупности полидисперсных кристаллов сахара две размерные характеристики (x, y) , например, масса-линейный размер, численность кристаллов-их линейный размер; численность кристаллов-их масса. Тогда для этой совокупности кристаллов существуют соответствия функционального типа: суммарная величина значений первой размерной характеристики y для той части кристаллов, для которой вторая размерная характеристика каждого из кристаллов не превышает x, разделенная на суммарное значение первой характеристики для всех кристаллов. Например: относительная масса кристаллов с линейным размером не больше r интегральная функция счетно-массового распределения кристаллов - $F(r)$; относительное количество кристаллов с линейным размером не больше r – интегральная функция счетного распределения за линейным размером $\Phi(r)$; относительное количество кристаллов с массой, которая не превышает m – интегральная функция счетного распределения кристаллов за массой $P(m)$. Соответствующие дифференциальные функции распределения кристаллов определяются по формулам:

$$f(r) = \frac{dF(r)}{dr}, g(r) = \frac{d\Phi(r)}{dr}, h(m) = \frac{dP(m)}{dm}. \tag{1}$$

Свойства дифференциальных и интегральных функций распределения кристаллов совпадают с такими, для случайных величин. Особенностью рассмотренного случая есть то, что аргументы всех функций распределения – неотъемлемые числа. В соответствии с (1) средневзвешенный $\overline{r}_m$, средний $\overline{r}$ линейный размеры та средняя масса $\overline{m}$ кристаллов определяются по формулам:

$$\overline{r}_m = \int_0^\infty rf(r)dr, \overline{r} = \int_0^\infty rg(r)dr, \overline{m} = \int_0^\infty mh(m)dm, \tag{2}$$

а соответствующие моменты k – го порядка:

$$M_{1,k} = \int_0^\infty r^k f(r)dr, M_{2,k} = \int_0^\infty r^k g(r)dr, M_{3,k} = \int_0^\infty m^k h(m)dm, \tag{3}$$

Очевидно, что $\overline{r}_m = M_{2,1}$, $\overline{r} = M_{2,1}$, $\overline{m} = m_{3,1}$. Коэффициенты неравномерности, линейно массовый $k_{m,r}$, массы k_m, обычный (за линейным размером) $k_н = k_r$ равняются:

$$k_{m,r} = \frac{\sqrt{M_{1,2}-M_{1,1}^2}}{M_{1,1}}, k_н = \frac{\sqrt{M_{2,2}-M_{2,1}^2}}{M_{2,1}}, k_m = \frac{\sqrt{M_{3,2}-M_{3,1}^2}}{M_{3,1}}. \quad (4)$$

Массовая частица α кристаллов с линейным размером $r \in [r_1, r_2]$, $r_1 < r_2$, представляет:

$$\alpha = \int_{r_1}^{r_2} f(r)dr = F(r_2) - F(r_2). \quad (5)$$

Для основных типов дифференциальных функций распределения промышленных кристаллов сахара $f(r), g(r), h(m)$, имеют место соотношения:

$$f(r) = \frac{1}{G_\Sigma} dG/dr, g(r) = \frac{1}{N_\Sigma}\frac{dN}{dr}, h(m) = \frac{1}{N_\Sigma}\frac{dN}{dm}, \quad (6)$$

где: N_Σ, G_Σ – общая численность и общая масса кристаллов $\overline{m} = \frac{G_\Sigma}{N_\Sigma}$; N, G численность и масса кристаллов с линейным размером, не большим r или массой, не большей за m. Из равенств (6) имеем:

$$\frac{g(r)}{f(r)} = \frac{G_\Sigma}{N_\Sigma}(\frac{dG}{dN})^{-1}(\frac{dm}{dr})^{-1} = \frac{\overline{m}}{m})(\frac{dm}{dr})^{-1}, \frac{h(m)}{f(r)} = \frac{G_\Sigma}{N_\Sigma}(\frac{dG}{dN})^{-1}(\frac{dm}{dr})^{-1} = \frac{\overline{m}}{m}(\frac{dm}{dr})^{-1}. \quad (7)$$

С (7) $\frac{dG}{dN}$ есть ни что другое, как средняя масса кристаллов с линейным размером от r до $r + dr$, равная массе кристалла с линейным размером r При условии $m = k_1 r^3$, $F = k_3 \sqrt[3]{m^2}$, имеем:

$$\frac{g(r)}{f(r)} = \frac{k_1 \overline{m}}{r^3}, \frac{h(m)}{f(r)} = \frac{\overline{m}}{3k_1^3 r^5}, \quad (8)$$

а с учетом того, что

$$\overline{m} = \int_0^\infty m h(m) dm = k_1 (\int_0^\infty r^{-3} f(r)\, dr)^{-1})=3k_1(\int_0^\infty r^{-5} f(r) dr)^{-1}. \quad (9)$$

можно записать

$$\frac{f(r)}{g(r)} = \frac{k_1 r^3}{\overline{r^3}} = \frac{r^3}{\overline{r^3}}, \frac{h(m)}{g(r)} = \frac{1}{3k_1 r^2}, \quad (10)$$

тогда с (10) можно выразить функции $f(r), h(m)$ через $g(r)$:

$$f(r) = \frac{r^3 g(r)}{\int_0^\infty r^3 g(r) dr}, h(m) = \frac{g(r)}{3k_1 r^2}, \quad (11)$$

а функции $g(r), h(m)$ через $f(r)$:

$$g(r) = \frac{r^{-3} f(r)}{\int_0^\infty r^{-3} f(r) dr}, h(m) = \frac{r^{-5} f(r)}{\int_0^\infty r^{-5} f(r) dr}, r = \sqrt[3]{\frac{m}{k_1}}, \quad (12)$$

В соответствии с (8) будут иметь место соотношения:

$$\frac{f(r)}{h(m)} = \frac{3r^5 k_1^2}{\overline{m}} = \frac{3\sqrt[3]{k_1 m^5}}{\overline{m}}, \frac{g(r)}{h(m)} = 3k_1 r^2, \quad (13)$$

Используя которые можно выразить функции $f(r), g(r)$ через $h(m)$:

$$f(r) = \frac{3\sqrt[3]{k_1 m^5}}{\int_0^\infty m h(m) dm} h(m), m = k_1 r^3, g(r) = 3\sqrt[3]{k_1 m^2 h(m)}, r = \sqrt[3]{\frac{m}{k_1}}, \quad (14)$$

Все соотношение (8)-(14) справедливые только в рамках математической модели идеальной гониометрии промышленных кристаллов сахара: $m = k_1 r^3, F = k_2 r^2, F = k_3 \sqrt[3]{m^2}$, [3]

На практике основным методом анализа фракционного (гранулометрического) состава промышленных кристаллов сахара, особенно при промышленных условиях есть ситовый анализ, их рассев на наборе сит, с дальнейшим построением кривой рассева и определения всех необходимых зависимостей, типа $f(r)$, и др. Наиболее подходящими есть распределения, которые имеют асимметрическую дифференциальную функцию распределения, например, двухпараметрическую, с характерной асимметрией графика. Такими есть функции логнормального и гамма-распределениями. Именно эти типы распределений широко используются для решения многих задач теории и практики кристаллизации сахара. Надлежащим подбором параметров этих распределений удается достичь удовлетворительной сходимости каждого из этих распределений с экспериментальными данными.

Рассмотрим задачу оценивания параметров дифференциальной функции логнормального распределения $f_1(r)$ с использованием метода моментов (ММ) и метода максимального правдоподобия (ММП), Для логнормального распределения, [5], имеют место соотношения:

$$f_1(r) = \frac{1}{rs\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{(\ln r - z)^2}{2s}], \tag{15}$$

$$M_{1,k} = \exp(\frac{k^2 s^2}{2} + kz), M_{1,1} = \bar{r}_m = \exp(\frac{s^2}{2} + z), \tag{16}$$

$$k_{mr} = (\exp s^2) - 1. \tag{17}$$

где: s – среднеквадратичное отклонение; k_{mr} – коэффициент линейно-массовой (ситовой) неравномерности кристаллов сахара; $\bar{r}_m$ – средневзвешенный (ситовый) линейный размер кристаллов сахара.

Рассмотрим задачу оценивания параметров дифференциальной функции логнормального распределения с использованием ММП. Считаем заданными (m_i, r_i), $m1, \dots, N_\text{с}$, m_i – массовая частица кристаллов сахара с размером r_i, r номер сита, $N_\text{с}$ – общая численность сит в наборе для ситового анализа. Согласно ММП функция правдоподобия будет иметь вид $\Lambda = -0.5 \ln s^2 - \ln(2\pi) - \sum_{i=1}^{N_s} m_i \ln r_i - \frac{1}{2s^2} \sum_{i=1}^{N_\text{с}} (m_i \ln r_i - z)^2$, а система уравнений для определения параметров s, z имеет вид:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial z} = \frac{1}{s^2} \sum_{i=1}^{N_\text{с}} (m_i \ln r_i - z) = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial s} = -\frac{1}{2s^2} \sum_{i=1}^{N_\text{с}} (m_i \ln r_i - z)^2 = 0, \tag{19}$$

Решение системы уравнений правдоподобия, полученной нами, имеет вид:

$$z = \sum_{i=1}^{N_\text{с}} m_i \ln r_i, s = \sqrt{[(\sum_{i=1}^{N_\text{с}} m_i (\ln r_i)^2) - \left(\sum_{i=1}^{N_\text{с}} m_i \ln r_i\right)^2]}, \tag{20}$$

Рассмотрим вопрос оценивания параметров дифференциальной функции гамма-распределения Пирсона с использованием ММ и ММП, в связи с громоздкостью выкладок приведем только конечные результаты. Детальные выкладки можно найти в [3]. Дифференциальная функция логнормального распределения имеет вид, [3]:

$$f_2(r) = l^{m_1} r^{m_1 - 1} \frac{\exp(-lr)}{\Gamma(m_1)}, M_{1,k} = \Gamma(m_1 + k) l^{-k}, M_{1,1} = \bar{r}_m = \frac{m_1}{l}. \quad (21)$$

Определение параметров согласно ММ дает следующие результаты, [3]:

$$m_1 = \frac{1}{k_{mr}^2}, l = \frac{1}{k_{mr}^2 \bar{r}_m}. \quad (22)$$

Использование ММП приводит к следующим результатам, [3]:

$$m_1 = -1.5 + (2.25 + 12(\ln\left(\sum_{i=1}^{N_c} m_i r_i\right) - \sum_{i=1}^{N_c} m_i \ln r_i), \quad (23)$$

$$l = \frac{m_1}{\sum_{i=1}^{N_c} m_i \ln r_i}, \quad (24)$$

Использованные источники информации:

1. Мелихов І.В., Берлинер Л.В. Теоретические основы химической технологи, т XIX, №2, 1985. – с. 158-165.
2. Кафаров В.В., Дорохов И.Н., Кольцова Э.М. Системный анализ процес сов химической технологи: Процессы массовой кристаллизации из растворов и газовой фазы. – М.: Наука, 1983. – 367 с.
3. Кузьменко Б.В. Математичне моделювання процесів росту і розчинення кристалів цукру в промислових умовах. Автореф. дис. д-ра техн. Наук. – К.: УДУХТ, 1995. – 40 с.
4. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., и др. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Наука, 1985. – 640 с.

References:

1. Melykhov I.V., Berlyner L.V. Teoretycheskye osnovy khymycheskoj tekhnolohy, t KhIKh, №2, 1985. – s. 158-165.
2. Kafarov V.V., Dorokhov Y.N., Kol'tsova E.M. Systemnyj analyz protses sov khymycheskoj tekhnolohy: Protsessy massovoj krystallyzatsyy yz rastvorov y hazovoj fazy. – M.: Nauka, 1983. – 367 s.
3. Kuz'menko B.V. Matematychne modeliuvannia protsesiv rostu i rozchynennia krystaliv tsukru v promyslovykh umovakh. Avtoref. dys. d-ra tekhn. Nauk. – K.: UDUKhT, 1995. – 40 s.
4. Koroliuk V.S., Portenko N.Y., Skorokhod A.V., y dr. Spravochnyk po teoryy veroiatnostej y matematycheskoj statystyke. – M.: Nauka, 1985. – 640 s.

Рецензент: д.ф.-м.н., проф. Дубко В.О.