

роботи частини комплексного перерізу аж до руйнування.

Таким чином, результати проведених експериментальних досліджень підтверджують можливість обліку роботи легких теплоізоляційних бетонів при розрахунку сталезалізобетонних балок з використанням ЛСТК, що особливо актуально для конструкцій покриттів. При цьому відсутність достатнього анкерування сталевих та бетонної частини комплексного перерізу істотно знижує несучу здатність і збільшує деформативність сталезалізобетонного елемента в цілому.

**Висновки:** результати експериментальних досліджень легких сталевих і сталезалізобетонних конструкцій з Z-образних профілів, що працюють в умовах складного напружено-деформованого стану при дії згину з крученням дозволяють зробити наступні висновки:

1. Заповнення ЛСТК легким полістиролбетоном практично вдвічі збільшує несучу здатність балок при роботі на згин з крученням.

2. Відсутність достатнього анкерування сталевих та бетонної частин комплексного перерізу істотно знижує несучу здатність і збільшує деформативність сталезалізобетонного елемента в цілому. З цієї точки зору

досить ефективним є використання запропонованих у статті горизонтальних анкерів, що практично в 1,5 рази збільшує несучу здатність балок при їх роботі на згин з крученням.

3. Роботу легкого теплоізоляційного бетону слід враховувати при розрахунку сталезалізобетонних балок з використанням ЛСТК, що особливо актуально для конструкцій покриттів.

#### ЛІТЕРАТУРА:

1. Chung K.F. Analysis and design of lapped connections between cold-formed steel Z sections / K.F. Chung, H.C. Ho // Thin-Walled Structures. – 2005. – Vol. 43. – P.1071–1090.
2. Ho H.C. Experimental investigation into the structural behavior of lapped connections between cold-formed steel Z sections / H.C. Ho, K.F. Chung // Thin-Walled Structures. – 2004. – Vol. 42. – P.1013–1033.
3. Семко, О. В. Легкий бетон для заповнення порожнин легких сталевих тонкостінних конструкцій / О. В. Семко, Д. М. Лазарев, Ю. О. Авраменко // Будівельні конструкції : зб. наук. праць. – К. : НДІБК, 2011. – Вип. 74. – С. 659–666.
4. Yu W.-W. Cold-formed steel design: fourth edition / Wei-Wen Yu, R. A. LaBoube. – New York : John Wiley & Sons Inc., 2010. – 491 p.
5. Авраменко Ю.О. Місцева стійкість сталевих елементів сталезалізобетонних конструкцій [Текст] : автореф. дис... канд. техн. наук: 05.23.01 / Ю.О. Авраменко. – Полтава. – 2012. – 21 с.

УДК 517.9

**Мірошніков В.Ю., Медведєва А.В., Ворончіхіна С.О., Олешкевич С.В.**

*Харківський національний університет будівництва та архітектури*

### **ВИЗНАЧЕННЯ НДС В ПРУЖНЬОМУ ПОЛУПРОСТОРИ З ЦИЛІНДРОВИМИ ПОРОЖНИНАМИ, ЯКІ ЗАДАНІ В ЦИЛІНДРИЧНИХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ ТА МЕЖЕЮ ПОЛУПРОСТОРУ, ЯКА ЗАДАНА В ДЕКАРТОВІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ**

Розглядаючи просторові задачі теорії пружності, зважаючи на громіздкість і складність обчислень, на сьогоднішній день не достатньо повно досліджено визначення напруження в пружному просторі з декількома циліндровими порожнинами або включеннями. Окремі випадки задачі з осесиметричним об'ємним розширенням одного циліндра досліджені в роботах [1,2].

В даній статті запропонований метод вирішення задачі із заданими переміщеннями на межах циліндрових порожнин розташованих в пружному напівпросторі. Метод заснований на рішенні рівнянь Ляме [1] із застосуванням узагальненого методу Фур'є [4]. За допомогою цього методу дана проблема зведена до нескінченної системи лінійних рівнянь алгебри, яка піддається дослідженню і допускає застосування методу

редукції. Рішення представлено через інтеграли і ряди, для яких встановлена абсолютна збіжність.

Запропонований метод рішення може бути поширений на задачі з іншими крайовими умовами.

**Постановка задачі**

Є дві циліндрові порожнини в пружному напівпросторі (рис.1), відстань від

центру першої порожнини до межі напівпростору дорівнює  $h$ , відстань між центрами порожнин дорівнює  $\ell_0$ . Координати межі напівпростору задаємо в декартовій системі координат відносно системи координат першої циліндрової порожнини. Граничні умови на поверхні порожнин та на межі напівпростору задані через переміщення.

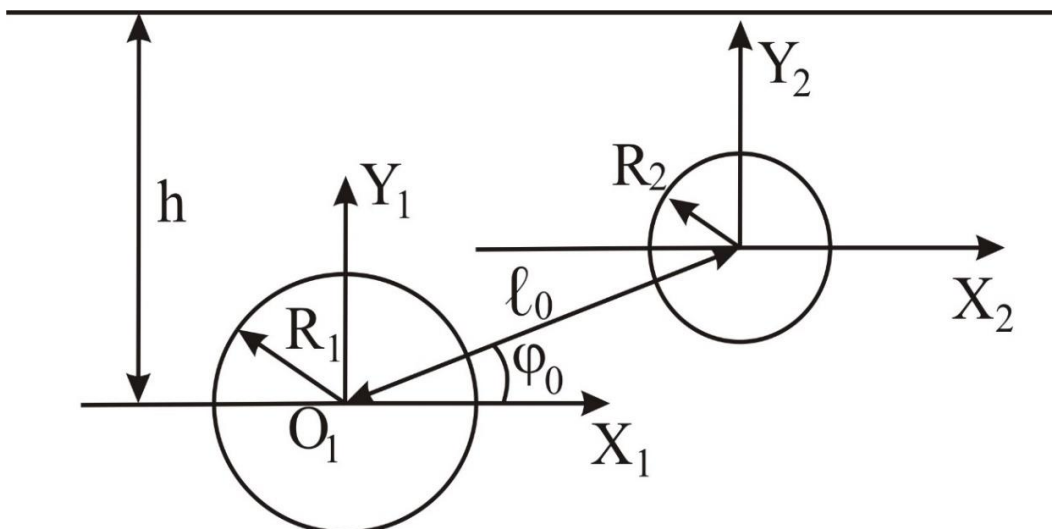


Рис.1 - Циліндрові порожнини в пружному напівпросторі.

Задача формується таким чином: рішення рівняння Ляме беремо у формі

$$\vec{U} = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda (B_{k,m}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho_1, \phi_1, z_1; \lambda) \cdot e^{im\phi + i\lambda z} + B_{k,m}^*(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}^*(\rho_2, \phi_2, z_2; \lambda) \cdot e^{im\phi + i\lambda z}) + \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_k(\lambda, \nu) \cdot \vec{u}_k^+(x_1, y_1, z_1; \lambda, \nu) d\lambda d\nu \quad (1)$$

де  $B_{k,m}(\lambda), B_{k,m}^*(\lambda), H_k(\lambda, \nu)$  (2) - невідомі функції, які необхідно знайти з крайових умов

$$\begin{aligned} &\vec{S}_{1,m}(\rho_1, \phi_1, z_1; \lambda), \vec{S}_{2,m}(\rho_1, \phi_1, z_1; \lambda), \\ &\vec{S}_{3,m}(\rho_1, \phi_1, z_1; \lambda), \vec{S}_{1,m}^*(\rho_2, \phi_2, z_2; \lambda), \\ &\vec{S}_{2,m}^*(\rho_2, \phi_2, z_2; \lambda), \vec{S}_{3,m}^*(\rho_2, \phi_2, z_2; \lambda), \quad (3) \\ &\vec{u}_1^+(x, y, z; \lambda, \nu), \vec{u}_2^+(x, y, z; \lambda, \nu), \\ &\vec{u}_3^+(x, y, z; \lambda, \nu) - \text{базисні рішення для однієї} \\ &\text{циліндрової порожнини відносно внутрішніх} \\ &\text{рішень іншої циліндрової порожнини} \\ &\text{дорівнюють:} \end{aligned}$$

$$\vec{S}_{1,m}(\rho, \phi, z; \lambda) = \frac{1}{\lambda} \text{grad}(S_m(\rho, \phi, z; \lambda)),$$

$$\begin{aligned} \vec{S}_{2,m}(\rho, \phi, z, \lambda) &= \frac{1}{\lambda} \left[ \text{grad} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 4(\mu - 1) \left( \text{grad} - \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \cdot S_m(\rho, \phi, z, \lambda), \\ \vec{S}_{3,m}(\rho, \phi, z; \lambda) &= \frac{i}{\lambda} \text{rot} \left[ \vec{e}_z \cdot S_m(\rho, \phi, z; \lambda) \right] \\ S_m(\rho, \phi, z; \lambda) &= e^{i(\lambda z + m\phi)} \cdot K_m(|\lambda| \rho) \cdot (\text{sign}(\lambda))^m, \end{aligned}$$

$\mu$  - коефіцієнт Пуассона,  $K_m(x)$  - функція Бесселя уявного аргументу  
- базисні рішення для напівпростору відносно внутрішніх рішень циліндрової порожнини дорівнюють:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^\pm(x, y, z; \lambda, \nu) &= \frac{1}{\lambda} (i\nu \bar{e}_x \pm \nu \bar{e}_y + i\lambda \bar{e}_z) e^{i\nu x \pm \nu y + i\lambda z} \\ \bar{u}_2^\pm(x, y, z; \lambda, \nu) &= \frac{1}{\lambda} (i\nu y \bar{e}_x ((4\mu - 3) \pm \nu y) \bar{e}_y + i\lambda \bar{e}_z) e^{i\nu x \pm \nu y + i\lambda z} \\ \bar{u}_3^\pm(x, y, z; \lambda, \nu) &= \frac{1}{\lambda} (\pm i\nu \bar{e}_x + \nu \bar{e}_y) e^{i\nu x \pm \nu y + i\lambda z}, \nu = \sqrt{\lambda^2 + \nu^2} \end{aligned}$$

Крайові умови на площинах циліндрів та межі напівпростору задані у виді рядів та інтегралів, що абсолютно сходяться

$$\begin{aligned} \bar{U}(R_1, \phi_1, z_1) &= \bar{f}(\phi_1, z_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [A_1^m(\lambda) \bar{e}_{\rho 1} + A_2^m(\lambda) \bar{e}_{\phi 1} + A_3^m(\lambda) \bar{e}_{z 1}] \cdot e^{im\phi_1 + \lambda z} d\lambda \\ \bar{U}(R_2, \phi_2, z_2) &= \bar{f}(\phi_2, z_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [A_1^m(\lambda) \bar{e}_{\rho 2} + A_2^m(\lambda) \bar{e}_{\phi 2} + A_3^m(\lambda) \bar{e}_{z 2}] \cdot e^{im\phi_2 + \lambda z} d\lambda \\ \bar{U}(x, h, z) &= \bar{f}(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (C_1(\lambda, \nu) \bar{e}_x + C_2(\lambda, \nu) \bar{e}_y + C_3(\lambda, \nu) \bar{e}_z) \cdot e^{i\lambda z + i\nu x} d\lambda d\nu \end{aligned} \quad (4)$$

Якщо функції (2) будуть знайдені, то з (1) одержуємо переміщення і по нижче приведених формулах можемо знайти напруження:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= 2 \cdot G \cdot \frac{\partial U_\rho}{\partial \rho} + \lambda_0 \theta, \quad \sigma_\phi = \\ &= \frac{2 \cdot G}{\rho} \cdot \left( \frac{\partial U_\phi}{\partial \phi} + U_\rho \right) + \lambda_0 \theta, \\ \sigma_z &= 2 \cdot G \cdot \frac{\partial U_z}{\partial z} + \lambda_0 \theta, \quad \tau_{\rho\phi} = \tau_{\phi\rho} = \\ &= G \left( \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial U_\rho}{\partial \phi} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \frac{U_\phi}{\rho} \right), \\ \tau_{\rho z} &= \tau_{z\rho} = G \left( \frac{\partial U_z}{\partial \rho} + \frac{\partial U_\rho}{\partial z} \right), \quad \tau_{\phi z} = \tau_{z\phi} = \\ &= G \left( \frac{\partial U_\phi}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial U_z}{\partial \phi} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

де  $G$  – модуль зсуву  $\lambda_0$  – постійна Ляме  $\theta = \frac{\partial U_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial U_\phi}{\partial \phi} + \frac{U_\rho}{\rho} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$  – об'ємне розширення.

Наскільки авторам відомо, зважаючи на складність, подібна задача раніше не вивчалася.

### Метод проведення рішення

В основу методу встановлені формули переходу в базисних рішеннях рівняння Ляме від однієї системи координат до іншої (вони отримані авторами справжньої статті з відповідних формул, узятих з довідника

[6]). Перехід від системи координат першої циліндрової порожнини до координат другої циліндрової порожнини:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{1,m}(\rho_1, \phi_1, z_1) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \cdot \ell_2) \cdot e^{i(m-n)\phi} \cdot \bar{R}_{1,n}(\rho_2, \phi_2, z_2) \\ \bar{S}_{2,m}(\rho_1, \phi_1, z_1) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \cdot \ell_2) \cdot e^{i(m-n)\phi} \cdot \\ &\cdot \bar{R}_{2,n}(\rho_2, \phi_2, z_2) + \frac{\lambda \cdot \ell}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{i(m-n)\phi} \cdot \\ &\cdot (\tilde{K}_{m-n+1}(\lambda \cdot \ell_2) + \tilde{K}_{m-n-1}(\lambda \cdot \ell)) \cdot \bar{R}_{1,n}(\rho_2, \phi_2, z_2) \\ \bar{S}_{3,m}(\rho_1, \phi_1, z_1) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \cdot \ell_2) \cdot e^{i(m-n)\phi} \cdot \bar{R}_{3,n}(\rho_2, \phi_2, z_2) \end{aligned} \quad (6)$$

де  $\bar{S}_{1,m}(\rho_1, \phi_1, z_1)$ ,  $\bar{S}_{2,m}(\rho_1, \phi_1, z_1)$ ,  $\bar{S}_{3,m}(\rho_1, \phi_1, z_1)$  – базисні рішення рівняння

Ляме усередині пружного циліндра;  $\ell_2$  – відстань між центрами циліндрових порожнин  $\tilde{K}_m(x) = (\text{sign}(x))^m K_m(|x|)$ ,  $K_m(|x|)$  – функція Бесселя уявного аргументу [5];  $\bar{R}_{1,n}(\rho_2, \phi_2, z_2)$ ,  $\bar{R}_{2,n}(\rho_2, \phi_2, z_2)$ ,  $\bar{R}_{3,n}(\rho_2, \phi_2, z_2)$  – базисні рішення зовні пружного циліндра, які дорівнюють:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{1,m}(\rho, \phi, z; \lambda) &= \frac{1}{\lambda} \text{grad}(r_m(\rho, \phi, z; \lambda)), \\ \bar{R}_{2,m}(\rho, \phi, z; \lambda) &= \frac{1}{\lambda} \left[ \text{grad} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\mu - 1) \cdot \right. \\ &\cdot \left. \left( \text{grad} - \bar{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \cdot r_m(\rho, \phi, z; \lambda) \end{aligned}$$

$$\vec{R}_{3,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = \frac{i}{\lambda} \text{rot}[\vec{e}_z \cdot r_m(\rho, \varphi, z; \lambda)],$$

$$r_m(\rho, \varphi, z; \lambda) = e^{i(\lambda z + m\varphi)} \cdot I_m(\lambda\rho)$$

$$\vec{u}_k^+ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i\omega_1)^m \vec{R}_{k,m}, k = 1, 3$$

$$\vec{u}_2^+ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(i\omega_1)^m}{\lambda^2} [m\nu\vec{R}_{1,m} + \gamma\vec{R}_{2,m} + 4\nu(1-\mu)\vec{R}_{3,m}], \omega_1(\lambda, \nu) = \frac{\nu - \gamma}{\lambda}$$

Задовольняючи крайовим умовам (4), підставляючи їх у формулу (1), через функ-

$$\sum_{s=1}^3 \left[ B_{s,m} \cdot r_{s,k,m} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{s,n}^* \cdot h_{s,k,m,n} \right] = A_{k,m} - \sum_{s=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} q_{k,s,m} H_s(\lambda, \nu) d\nu$$

$$\sum_{s=1}^3 \left[ B_{s,m}^* \cdot r_{s,k,m}^* + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{s,n} \cdot h_{s,k,m,n}^* \right] = A_{k,m}^* - \sum_{s=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} q_{k,s,m}^* H_s(\lambda, \nu) d\nu \quad (8)$$

$$\sum_{s=1}^3 H_s d_{s,k} = C_k(\lambda, \nu) - \sum_{r=1}^3 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (B_{r,n} \cdot b_{r,k,n} + B_{r,n}^* \cdot b_{r,k,n}^*), k = 1, 2, 3$$

де  $r_{s,k,m}, r_{s,k,m}^*, h_{s,k,m}, h_{s,k,m}^*, q_{s,k,m}, q_{s,k,m}^*, b_{s,k,m}, b_{s,k,m}^*, d_{s,k}$  - функції (3), що отримані в результаті перетворень за допомогою функцій перерозподілу (6, 7), та у зв'язку з громізdkістю опущені.

В результаті рішення системи нескінченних рівнянь, отримаємо невідомі функції (2).

Якщо тепер підставимо знайдені функції (2) у формулу (1), а також задамо значення  $\rho_1, \varphi_1, z_1$  і відповідні їм  $\rho_2, \varphi_2, z_2, x, y, z$  то отримаємо значення переміщення у відповідній точці простору. Задавши точку на поверхні циліндрів, або площини межі напівпростору, можемо перевірити виконання граничних умов.

Провівши перетворення функцій (3), згідно формулам (5), отримаємо повний тензор напруження (зважаючи на громізdkість ці перетворення опускаємо). Тепер можемо визначити напруження в будь-якій точці простору в системі координат першого циліндра.

**Обговорення результатів**

Задача розв'язувалася в оболонці MathCad 12.

Перехід від системи координат напівпростору до координат циліндрової поверхнини дорівнюють:

$$(7)$$

ції перерозподілу (6, 7) отримаємо три нескінченні системи рівнянь, зв'язані невідомими функціями (2).

На межі циліндра була задана функція переміщення у вигляді  $U_\rho = \frac{h^5 \cdot \cos(\varphi)}{(z^2 + h^2)^2}$ ,

$U_z = 0, U_\varphi = 0$ , при  $h = 10$  (графічно зображено на рис.2.). На межі напівпростору та межі другого циліндру всі переміщення прийняті рівними нулю. В результаті рішення системи рівнянь були знайдені функції (2), перевірено виконання граничних умов на циліндрах і на межі напівпростору (отримані переміщення у вузлових точках) і отримана функція для визначення напруження.

Нескінченна система рівнянь була зведена до кінцевої:  $m=3$ , межі інтеграції були узяті від  $-3 \dots 3$ , що є достатнім при  $R_1 = 10, l_0=45, \varphi_0=10, R_2=5, h=45$ . Точність виконання граничних умов в цьому випадку досягає  $10^{-5}$ .

Формула квадратури для обчислення інтегралів була вибрана по щонайвищому тригонометричному ступеню точності [3]. Число вузлових точок – 400.

В результаті підстановки різних варіантів  $R_1, R_2, l_0, \varphi_0, h$  приходимо до висновку, що скорочення відстані між краєм циліндрів і межею напівпростору приводить до

зменшення точності рахунку. Характерним також є те, що скорочення відстані між пулупростором та найближчим циліндром більш впливає на точність розрахунку ніж скорочення відстані між циліндрами.

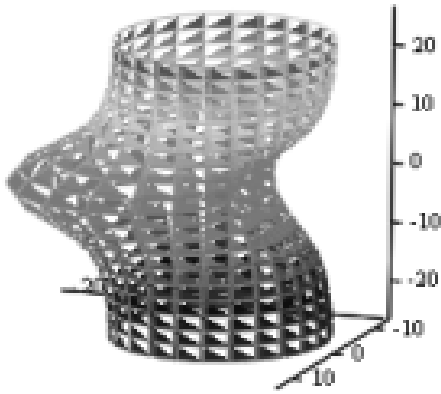


Рис.2 - Граничні умови на циліндрі

У порівнянні з розрахунком, коли межа полупростору задається, як дзеркальна в циліндрових координатах [7], точність розрахунку на віддалених ділянках полупростору значно вища та тривалість розрахунку в декілька разів швидше.

**Висновки**

Запропонований метод для вирішення задачі просторової теорії пружності, коли на межах декількох циліндрових порожнин

і на межі полупростору задані переміщення. Даний метод можна використовувати і при збільшенні числа циліндрових порожнин, в цьому випадку необхідно внести відповідні зміни у систему рівнянь (8).

Проведені дослідження системи дають можливість стверджувати, що її рішення існує і може бути з будь якою ступінню точності знайдено методом редукції.

**ЛІТЕРАТУРА:**

1. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1961. – 537с.
2. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. –М.:Технико-теоретическая литература, 1955. – 491с.
3. Крылов В.И. и др. Вычислительные методы высшей математики. Т.1. – Минск.: Высшая школа, 1972. – 584с.
4. Ніколаєв О.Г. Узагальнений метод Фур'є в просторових задачах теорії пружності для канонічних многозв'язних тіл: Автореф. дис. д-ра фіз. - мат. наук: 01.02.04. / ДНУ. Дніпропетровськ, 1997. - 36 с.
5. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. - М.: ГИТТЛ, 1953. - 380 с.
6. Ерофеев В.Т. Теоремы сложения: Справочник. - Минск: Наука и техника, 1989. - 256 с.
7. Мірошніков В.Ю. та інші. Визначення НДС в пружньому полупросторі з циліндровими порожнинами: Науковий вісник будівництва.- Вип. 68.- Харків: ХОТВАБУ ХНУБА.- 2012.- С.156-162.

УДК 621.874

**Нестеренко В.В., Шевченко С.І., Анастасенко С.М.**

*Первомайський політехнічний інститут національного університету кораблебудування ім. адмірала Макарова*

**ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ОБИЧАЙКИ БАРАБАНА**

**1. Постановка проблеми.** В багатьох випадках для забезпечення стійкості стінки канатного барабана застосовують підкріплюючі елементи – кільця або поздовжні ребра жорсткості. Забезпечуючи стійкість конструкції, ці елементи водночас є джерелом концентрації напружень в зоні їх контакту (з'єднання за допомогою зварювання) з циліндричною обичайкою барабана, що

викликає досить високі місцеві напруження згинання. Ці напруження можуть бути вирішальними вже навіть тому, що для чавунних барабанів границя міцності на згинання вдвічі менша за границю міцності на стискання. Крім того, елементи барабанів сприймають циклічні навантаження, і місцеві пікові напруження (особ-