

Мирошников В.Ю.

*Харьковский национальный университет строительства и архитектуры  
(ул. Сумская, 40, Харьков, 61002, Украина; e-mail: [m0672628781@gmail.com](mailto:m0672628781@gmail.com); [orcid.org/0000-0002-9491-0181](https://orcid.org/0000-0002-9491-0181))***ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ КОМПОЗИТА В ВИДЕ СЛОЯ И ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ, ПРИ ЗАДАНЫХ НА ГРАНИЧНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ**

Решена пространственная задача теории упругости для полупространства, жестко сцепленного с упругим слоем. Полупространство имеет бесконечную круговую цилиндрическую полость, параллельную его поверхности. Слой и полупространство – однородные изотропные материалы, отличные друг от друга. На полости и на верхней границе слоя заданы перемещения. Для решения пространственной задачи теории упругости использован обобщенный метод Фурье относительно системы уравнений Ламе. В результате удовлетворения граничным условиям и условиям сопряжения слоя и полупространства, получены бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, которые решены методом редукции. В результате были найдены перемещения и напряжения в различных точках упругого тела. Проведен численный анализ напряженно - деформированного состояния слоя и полупространства.

**Ключевые слова:** цилиндрическая полость в полупространстве, композит, уравнение Ламе, условия сопряжения, обобщенный метод Фурье.

**Введение.** При проектировании строительных конструкций, подземных сооружений, а также в машиностроении приходится сталкиваться с расчетными схемами, в которых слой жестко связан с полупространством, имеющим продольную полость. При расчете таких конструкций необходимо иметь метод, который, с необходимой точностью, позволял бы определять значения напряжений в различных точках.

Проблема определения напряжений для слоя и полупространства с цилиндрической полостью существует давно. Так в работе [1], на основе метода разложения в ряды Фурье, определяются напряжения в слое с цилиндрической полостью. В [2], при помощи метода суперпозиции общих решений рассмотрена задача для слоя с круговым отверстием. Наиболее исследованными являются случаи, когда полость перпендикулярна поверхности полупространства или слоя [3-6].

При решении задач, имеющих несколько граничных непересекающихся поверхностей, используется обобщенный метод Фурье [7]. Так на основе этого метода решены задачи для полупространства с цилиндрическими полостями в перемещениях [8], в напряжениях [9-11] и смешанные задачи с условиями контактного типа [12, 13]. Для цилиндра, на

основе обобщенного метода Фурье, решена задача с цилиндрическими включениями в напряжениях [14]. В работах [15- 18] решены задачи для слоя, который содержит продольную полость, включение или толстостенную трубу.

Однако задача для полупространства, жестко сцепленного со слоем и имеющего продольную цилиндрическую полость не исследована.

**Постановка задачи.** Однородный упругий слой жестко сцеплен с однородным упругим полупространством. В полупространстве, параллельно его поверхности, расположена цилиндрическая полость радиусом  $R$ . Полость будем рассматривать в цилиндрической системе координат  $(\rho, \phi, z)$ , слой в декартовой системе координат  $(x_1, y_1, z_1)$ , полупространство в декартовой системе координат  $(x_2, y_2, z_2)$ , совмещенной с системой координат полости. Границы слоя расположены на расстоянии  $y_1=h_1$  и  $y_1=0$ , полупространства  $y_2=h_2$ , при  $h_2>R$ .

Необходимо найти решение уравнения Ламе  $\Delta \vec{U}_j + (1 - 2\sigma_j)^{-1} \nabla \operatorname{div} \vec{U}_j = 0$ , где  $j=1$  – соответствует слою,  $j=2$  – полупространству. На верхней границе слоя  $y_1=h_1$  и на поверхности полости  $\rho = R$  заданы перемещения:

$$\vec{U}_1(x, z)|_{y_1=h_1} = \vec{U}_h^0(x, z),$$

$$\vec{U}_2(\phi, z)|_{\rho=R} = \vec{U}_R^0(\phi, z),$$

где

$$\vec{U}_h^0(x_1, z_1) = U_x^{(1)}\vec{e}_1^{(1)} + U_y^{(1)}\vec{e}_2^{(1)} + U_z^{(1)}\vec{e}_3^{(1)},$$

$$\vec{U}_R^0(\phi, z) = U_\rho^{(R)}\vec{e}_1^{(2)} + U_\phi^{(R)}\vec{e}_2^{(2)} + U_z^{(R)}\vec{e}_3^{(2)} \quad (1)$$

известные функции;  $\vec{e}_j^{(k)}$ ,  $j = 1, 2, 3$  – орты декартовой ( $k=1$ ) и цилиндрической ( $k=2$ ) систем координат.

На плоской поверхности контакта слоя и полупространства заданы граничные условия сопряжения

$$\vec{U}_1|_{y_1=0} = \vec{U}_2|_{y_2=h_2}, \quad (2)$$

$$F_1\vec{U}_1|_{y_1=0} = F_2\vec{U}_2|_{y_2=h_2}, \quad (3)$$

где  $\vec{U}_1$  — перемещения в слое;  $\vec{U}_2$  — перемещения в полупространстве;

$F_j\vec{U}_j| = 2G_j[\frac{\sigma_j}{1-2\sigma_j}\vec{n} \operatorname{div} U_j + \frac{\partial}{\partial n}\vec{U}_j + \frac{1}{2}(\vec{n} \times \operatorname{rot}\vec{U}_j)]$ ;  $G_j = \frac{E_j}{2(1+\sigma_j)}$ ;  $\sigma_j$ ,  $E_j$  – коэффициент Пуассона и модуль упругости слоя ( $j=1$ ) или полупространства ( $j=2$ ).

Заданные функции будем считать быстро убывающими от начала координат по оси  $z$  для цилиндра и по оси  $z$  и  $x$  для границ слоя.

**Метод решения.** Используя обобщенный метод Фурье, выберем базисные решения уравнения Ламе для декартовых и цилиндрических систем координат в виде [7]:

$$\vec{u}_k^\pm(x, y, z; \lambda, \mu; \sigma) = N_k^{(d)} e^{i(\lambda z + \mu x) \pm \gamma y},$$

$$\vec{R}_{k,m}(\rho, \phi, z; \lambda; \sigma) = N_k^{(p)} I_m(\lambda \rho) e^{i(\lambda z + m\phi)},$$

$$\vec{S}_{k,m}(\rho, \phi, z; \lambda; \sigma) = N_k^{(p)} [s_m(\rho; \lambda) \cdot e^{i(\lambda z + m\phi)}]; k = 1, 2, 3; \quad (4)$$

$$N_1^{(d)} = \frac{1}{\lambda} \nabla;$$

$$N_2^{(d)} = \frac{4}{\lambda} (\sigma - 1) \vec{e}_2^{(1)} + \frac{1}{\lambda} \nabla(y \cdot);$$

$$N_3^{(d)} = \frac{i}{\lambda} \operatorname{rot}(\vec{e}_3^{(1)} \cdot);$$

$$N_1^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \nabla;$$

$$N_2^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \left[ \nabla \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\sigma - 1) \left( \nabla - \vec{e}_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right];$$

$$N_3^{(p)} = \frac{i}{\lambda} \operatorname{rot}(\vec{e}_3^{(2)} \cdot); \quad s_m(\rho; \lambda) = (\operatorname{sign} \lambda)^m K_m(|\lambda \rho|);$$

$$\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \quad -\infty < \lambda, \mu < \infty,$$

где  $I_m(x)$ ,  $K_m(x)$  – модифицированные функции Бесселя;  $\vec{R}_{k,m}$ ,  $\vec{S}_{k,m}$  – соответственно внутренние и внешние решения

уравнения Ламе для цилиндра;  $\vec{u}_k^{(-)}$ ,  $\vec{u}_k^{(+)}$  – решения уравнения Ламе для слоя.

Решение задачи представим в виде

$$\vec{U}_1 = \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( H_k^{(1)}(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(+)}(x_1, y_1, z_1; \lambda, \mu; \sigma_1) + \tilde{H}_k^{(1)}(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(-)}(x_1, y_1, z; \lambda, \mu; \sigma_1) \right) d\mu d\lambda, \quad (5)$$

$$\vec{U}_2 = \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho, \phi, z; \lambda; \sigma_1) d\lambda + \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( H_k^{(2)}(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(+)}(x_2, y_2, z_2; \lambda, \mu; \sigma_2) \right) d\mu d\lambda, \quad (6)$$

где  $\vec{S}_{k,m}(\rho, \phi, z; \lambda; \sigma_j)$ ,  $\vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu; \sigma_j)$  и  $\vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu; \sigma_j)$  – базисные решения, которые заданы формулами (4), а неизвестные функции  $H_k^{(1)}(\lambda, \mu)$ ,  $\tilde{H}_k^{(1)}(\lambda, \mu)$ ,  $H_k^{(2)}(\lambda, \mu)$  и  $B_{k,m}(\lambda)$  необходимо найти из граничных условий (1) и условий сопряжения (2), (3).

Для перехода базисных решений из одной системы координат в другую воспользуемся формулами, представленными в [16].

Для удовлетворения граничным условиям на верхней границе слоя приравняем (5), при  $y_1=h_1$ , заданному  $\vec{U}_h^0(x, z)$ , представленному через двойной интеграл Фурье. Так получим три уравнения (по одному на каждую проекцию) с шестью неизвестными  $H_k^{(1)}(\lambda, \mu)$ ,  $\tilde{H}_k^{(1)}(\lambda, \mu)$ .

Удовлетворяя условиям сопряжения на границе слоя и полупространства в перемещениях, подставляем в (2) правые части (5) и (6). При этом, записывая выражение  $\vec{U}_2(x_2, z_2)|_{y_2=0}$ , необходимо воспользоваться формулами перехода от решений  $\vec{S}_{k,m}$  цилиндра к решениям  $\vec{u}_k^{(-)}$  [16, формула (7)]. Подобным образом можем записать три дополнительных уравнения для напряжений (3).

Так получим систему из девяти бесконечных уравнений с двенадцатью

неизвестными функциями  $H_k^{(1)}(\lambda, \mu)$ ,  $\tilde{H}_k^{(1)}(\lambda, \mu)$ ,  $H_k^{(2)}(\lambda, \mu)$  и  $B_{k,m}(\lambda)$ . Выразим  $H_k^{(1)}(\lambda, \mu)$ ,  $\tilde{H}_k^{(1)}(\lambda, \mu)$  и  $H_k^{(2)}(\lambda, \mu)$  через  $B_{k,m}(\lambda)$ .

Определитель  $\Delta$  этой системы имеет вид  $\Delta = -16 \cdot \gamma^6 \cdot e^{-3\gamma(h_1-h_2)} \cdot \Phi(\gamma)/\lambda^6$ , где  $\Phi(\gamma)$  – функция, имеющая громоздкий вид и как следствие опущена. Исследование  $\Phi(\gamma)$  показало, что, при  $\gamma > 0$ , она имеет только положительные значения и не обращается в ноль. Так как  $\Delta > 0$  то эта система уравнений имеет единственное решение.

Для удовлетворения граничных условий на цилиндре  $\rho=R$ , используя формулы перехода от решений  $\vec{u}_k^{(+)}$  к решениям  $\vec{R}_{k,m}$  [16, формула (8)], правую часть (6) перепишем в цилиндрической системе координат через базисные решения  $\vec{R}_{k,m}$ ,  $\vec{S}_{k,m}$ . Полученный вектор приравняем заданному  $\vec{U}_R^0(\phi, z)$ , представленному интегралом и рядом Фурье. Вместо  $H_k^{(2)}(\lambda, \mu)$  подставим ранее выраженные функции через  $B_{k,m}(\lambda)$ . В результате получим совокупность трех бесконечных систем линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных  $B_{k,m}(\lambda)$ . Эти бесконечные системы имеют свойства уравнений второго рода и, как следствие, к ним можно применять метод редукции.

После определения  $B_{k,m}(\lambda)$  можем найти значения неизвестных  $H_k^{(1)}(\lambda, \mu)$ ,  $\tilde{H}_k^{(1)}(\lambda, \mu)$ ,  $H_k^{(2)}(\lambda, \mu)$ , которые мы ранее выразили через  $B_{k,m}(\lambda)$ . Так будут найдены все неизвестные выражений (5) и (6).

**Численные исследования напряженного состояния.** Цилиндрическая полость расположена в изотропном полупространстве, идеально сцепленного с изотропным слоем. Физические характеристики слоя (бетон): коэффициент Пуассона  $\sigma_1 = 0,16$ , модуль упругости  $E_1 = 3250$  кН/см<sup>2</sup>. Физические характеристики полупространства (газоблок):  $\sigma_2 = 0,2$ ,  $E_2 = 160$  кН/см<sup>2</sup>. Радиус цилиндрической полости  $R = 10$  см. Толщина слоя

$h_1 = 10$  см. Расстояние от границы полупространства до центра цилиндрической полости  $h_2 = 20$  см.

На верхней границе слоя заданы перемещения в виде  $U_y^{(1)} = U_x^{(1)} = U_z^{(1)} = 0$ , на поверхности цилиндра перемещения  $U_\rho^{(R)} = 10^4 \cdot (z^2 + 10^2)^{-2}$ ,  $U_\phi^{(R)} = U_z^{(R)} = 0$ .

Бесконечная система была усечена до  $m=8$ . Вычисления интегралов выполнено квадратурными формулами Филона (для осциллирующих функций) и Симпсона (для функций без осцилляций). Точность выполнения граничных условий, при указанных значениях  $m$  и заданных геометрических параметрах,  $10^{-4}$ .

На рис.1 представлено напряженное состояние на поверхности цилиндрической полости по радиусу от  $\phi=0$  до  $\phi=2\pi$ , при  $z=0$ .

Напряжение  $\sigma_\rho$  снижается в верхней части полости (рис.1, линия 1, при  $\phi=\pi/2$ ), наиболее близкой к слою, имеющего более низкие параметры плотности материала. Напряжение  $\sigma_\phi$  наоборот имеет незначительный рост в этой области.

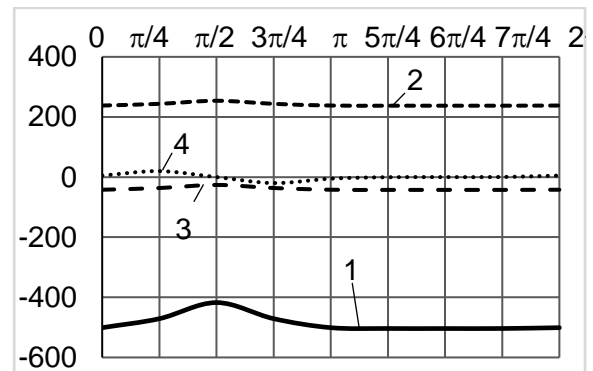


Рис. 1. Напряжения на поверхности цилиндрической полости при  $z=0$  в кН/см<sup>2</sup>:

1 –  $\sigma_\rho$ , 2 –  $\sigma_\phi$ , 3 –  $\sigma_z$ , 4 –  $\tau_{\rho z}$

На рис.2 представлены напряжения вдоль оси  $y$  на перешейке между верхней точкой полости и границей сопряжения полупространства со слоем, при  $z=0$ .

Из рис.2 видно, что наибольшие напряжения  $\sigma_\rho$  – на поверхности полости и снижаются с приближением к границе сопряжения. Наибольшие напряжения  $\sigma_\phi$  также находятся на поверхности полости, по мере приближения к границе

сопряжения снижаются, а возле границы сопряжения наблюдается их рост. Напряжения  $\sigma_z$  имеют отрицательные значения на поверхности полости и по мере приближения к границе сопряжения меняются на положительные и растут.

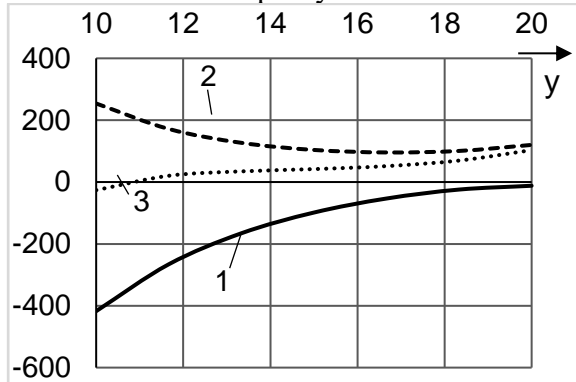


Рис. 2. Напряжения вдоль оси  $y$  между поверхностью полости и границей полупространства, в  $\text{кН/см}^2$ : 1 –  $\sigma_\rho$ , 2 –  $\sigma_\phi$ , 3 –  $\sigma_z$

На рис. 3 представлены напряжения на верхней границе слоя (рис. 3 а) и на границе сопряжения со стороны слоя (рис. 3 б), вдоль оси  $z$ , при  $x=0$ .

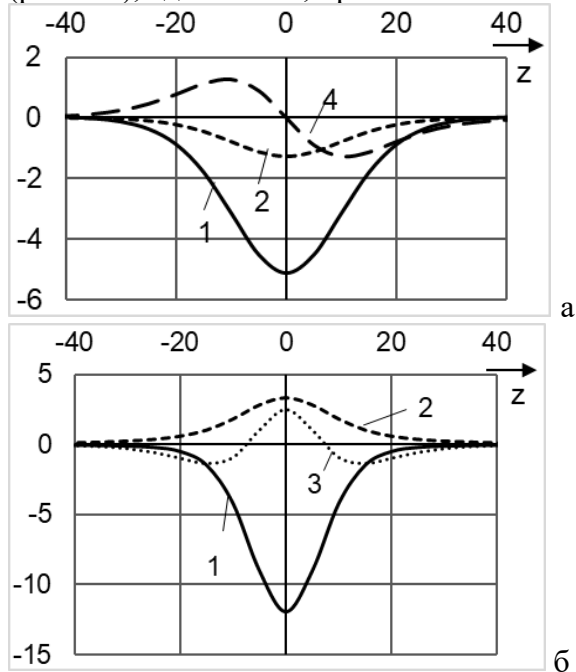


Рис. 3. Напряжения в слое, в  $\text{кН/см}^2$ : а – на верхней границе слоя; б – на нижней границе слоя; 1 –  $\sigma_y$ , 2 –  $\sigma_x$ , 3 –  $\sigma_z$ , 4 –  $\tau_{yz}$

Напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_z$  на верхней поверхности слоя имеют практически одинаковые значения, в следствие чего на графике (рис. 3 а) напряжения  $\sigma_z$  опущены.

Наибольшими напряжениями в слое, как в верхней, так и нижней части, является  $\sigma_y$  (рис. 3, линия 1). В следствии жесткого защемления верхней части слоя напряжения  $\sigma_x$  в нижней части слоя имеют положительные значения (рис. 3 б, линия 2), в верхней части – отрицательные (рис. 3 а, линия 2). Напряжения  $\sigma_z$  на нижней границе слоя имеют как положительные, так и отрицательные значения (рис. 3 б, линия 3).

На рис. 4 представлены напряжения в слое на границе сопряжения вдоль оси  $x$ , при  $z=0$ .

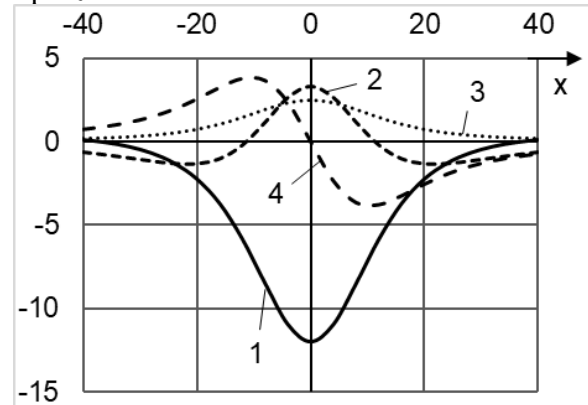


Рис. 4. Напряжения вдоль оси  $x$  на границе сопряжения, в  $\text{кН/см}^2$ : 1 –  $\sigma_y$ , 2 –  $\sigma_x$ , 3 –  $\sigma_z$ , 4 –  $\tau_{yz}$

Напряжения на границе сопряжения вдоль оси  $x$  (рис.4), в отличие от напряжений вдоль оси  $z$  (рис.3), спадают медленно. Кроме того, напряжения  $\sigma_x$  вдоль оси  $x$  (рис. 4, линия 2) имеет как положительные, так и отрицательные значения, а напряжения  $\sigma_z$  (рис. 4, линия 3) постоянно положительные.

**Выводы.** Предложен метод решения пространственной задачи теории упругости на основе обобщенного метода Фурье для полупространства с продольной цилиндрической полостью, жестко сцепленного с упругим слоем. Задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, допускающей применение к ней метода редукции. Численные исследования дают основания утверждать, что ее решение может быть с любой точностью найдено предложенным методом, что подтверждается высокой точностью выполнения граничных условий.



Метод решения можно использовать при проектировании строительных конструкций и подземных сооружений, расчетная схема которых совпадает с постановкой данной задачи.

Представленный анализ напряженного состояния можно использовать при подборе геометрических параметров конструкции.

Дальнейшее исследование данной задачи актуально для нескольких полостей.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Grinchenko, V. T., Ulitko A. F. An exact solution of the problem of stress distribution close to a circular hole in an elastic layer. *Soviet Applied Mechanics*. 1968. № 10. P. 31-37.
2. Гринченко, В. Т., Улитко А. Ф. *Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Равновесие упругих тел канонической формы*. Київ: Наук.думка. 1985. 280 с.
3. Bobyleva, T. Approximate Method of Calculating Stresses in Layered Array. *Procedia Engineering*. 2016. Vol.153. P.103-106. doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.087.
4. Vaysfel'd, N., Popov G., Reut V. The axisymmetric contact interaction of an infinite elastic plate with an absolutely rigid inclusion. *Acta Mech*. 2015. Vol. 226. P. 797-810. doi.org/10.1007/s00707-014-1229-7.
5. Попов Г. Я., Вайсфельд Н.Д. Осесимметричная задача теории упругости для бесконечной плиты с цилиндрическим включением при учете ее удельного веса. *Прикладная механика*, 2014. Т. 50. № 6. С. 27-38.
6. Гузь А. Н., Космодамианский А. С., Шевченко В. П. *Механика композитов*. Київ: Наук. Думка, 1998. Том 7. Концентрация напряжений. С. 114-137.
7. Николаев, А. Г., Проценко В. С. *Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости*. Харьков: Нац. аэрокосм. университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 2011. 344 с.
8. Мірошніков В.Ю. Друга основна задача теорії пружності у півпросторі з декількома паралельними круговими циліндричними порожнинами. *Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии*. 2018. №79. С. 88-99.
9. Проценко В. С., Попова Н. А. Вторая основная краевая задача теории упругости для полупространства с круговой цилиндрической полостью. *Доповіді НАН України*. 2004. № 12. С. 52-58.
10. Николаев А. Г., Орлов Е. М. Решение первой осесимметричной термоупругой краевой задачи для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной полостью. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2012. Вип.20. С. 253-259.
11. Miroshnikov, V. Yu. First basic elasticity theory problem in a half-space with several parallel round cylindrical cavities. *Journal of Mechanical Engineering*. 2018. Vol. 21, № 2. P. 12-18.
12. Protsenko V., Miroshnikov V. Investigating a problem from the theory of elasticity for a half-space with cylindrical cavities for which boundary conditions of contact type are assigned. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Applied mechanics*. 2018. Vol. 4. № 7 (94). P. 43-50. doi.org/10.15587/1729-4061.2018.139567
13. Мірошніков В.Ю., Олешкевич С.В., Савін О.Б., Медведева А.В. Змішана задача теорії пружності для півпростору з циліндричними порожнинами та деякими крайовими умовами контактного типу. *Науковий вісник будівництва*. Харків: ХНУБА, 2018. Том 94. №4. С. 82-94. doi.org/10.29295/2311-7257-2018-94-4-82-94
14. Николаев, А. Г., Танчик Е. А. Распределение напряжений в ячейке однонаправленного композиционного материала, образованного четырьмя цилиндрическими волокнами. *Вісник Одеського національного університету. Математика. Механіка*. 2013. Т. 18. Вип. 4(20). С. 101-111.
15. Мірошніков, В.Ю. Дослідження другої основної задачі теорії пружності для шару з циліндричною порожниною. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2019. №102. С. 77-90.
16. Miroshnikov, V. Yu., Medvedeva A. V., Oleshkevich S. V. Determination of the stress state of the layer with a cylindrical elastic inclusion. *Materials Science Forum*. 2019. Vol. 968. P. 413 - 420. doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.413
17. Мірошніков, В. Ю. Змішана задача теорії пружності для шару з циліндричним включенням. *Науковий вісник будівництва*. Харків: ХНУБА, 2019. Том 96. №2. С. 247-252. doi.org/10.29295/2311-7257-2019-96-2-247-252.
18. Miroshnikov, V. Investigation of the Stress Strain State of the Layer with a Longitudinal Cylindrical Thick-Walled Tube and the Displacements Given at the Boundaries of the Layer. *Journal of Mechanical Engineering*. 2019. Vol. 22. No 2. P. 44-52. doi.org/10.15407/jpmach2019.02.044

**Мірошніков В.Ю. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ КОМПОЗИТУ У ВИГЛЯДІ ШАРУ І ПІВПРОСТОРУ З ЦИЛІНДРИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ, ПРИ ЗАДАНИХ НА ГРАНИЧНИХ ПОВЕРХНЯХ ПЕРЕМІЩЕННЯХ.** Розв'язано просторову задачу теорії пружності для півпростору, жорстко зчепленого з пружним шаром. Півпростір

має кругову нескінченну циліндричну порожнину, паралельну його поверхні. Шар і півпростір - однорідні ізотропні матеріали, відмінні один від одного. На порожнині і на верхній межі шару задані переміщення. Для розв'язку просторової задачі теорії пружності використаний узагальнений метод Фур'є щодо системи рівнянь Ламе. В результаті задоволення граничним умовам і умовам сполучення шару і півпростору, отримані нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які розв'язані методом редукції. В результаті були знайдені переміщення і напруження в різних точках пружного тіла. Проведено числовий аналіз напружено - деформованого стану шару і півпростору.

**Ключові слова:** циліндрична порожнина в півпросторі, композит, рівняння Ламе, умови сполучення, узагальнений метод Фур'є

**Miroshnikov V.Yu. DETERMINATION OF THE STRESS STATE OF THE COMPOSITE IN THE FORM OF A LAYER AND A HALF-SPACE WITH A CYLINDRICAL**

**CAVITY, WITH DISPLACEMENTS SPECIFIED ON THE BOUNDARY SURFACES.**

The spatial problem of the theory of elasticity for a half-space rigidly coupled to an elastic layer is solved. The half-space has an infinite circular cylindrical cavity parallel to its surface. Layer and half-space - homogeneous isotropic materials, different from each other. Displacements are specified on the cavity and on the upper boundary of the layer. To solve the spatial problem of the theory of elasticity, the generalized Fourier method with respect to the system of Lamé equations is used. As a result of satisfying the boundary conditions and the conjugation conditions of the layer and half-space, infinite systems of linear algebraic equations are obtained, which are solved by the reduction method. As a result, displacements and stresses were found at various points of the elastic body. A numerical analysis of the stress - strain state of the layer and half-space is carried out.

**Keywords:** cylindrical cavity in half-space, composite, Lamé equation, conjugation conditions, generalized Fourier method.

DOI: 10.29295/2311-7257-2019-97-3-64-69

УДК 621.792.05:691.588:621.792.4

**Фірсов П.М., Золотов С.М., Кічаєва О.В., Хамзе Мохамад**

*Харківський національний університет міського господарства імені О.М. Бекетова  
(вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, Україна, 61002; e-mail: [pavelfirsov1991@gmail.com](mailto:pavelfirsov1991@gmail.com);  
<https://orcid.org/0000-0001-9119-3968>; <https://orcid.org/0000-0002-1493-3958>;  
<https://orcid.org/0000-0002-3649-1871>)*

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СТАЛЕКЛЕЙОВОГО З'ЄДНАННЯ З БЕТОНОМ

Розглянуто питання щодо теоретичного обґрунтування проектування сталеклеювого з'єднання з бетоном без застосування анкерів, шляхом конструктивної приклейки сталевих вузлів або опорних частин технологічного устаткування безпосередньо до поверхні бетону. За результатами розрахунків обчислено математичну модель напружено-деформованого стану безанкерного клеювого з'єднання для трьох шарів (сталеві пластини, клеювого шва та бетонної основи) при осесиметричному довільному навантаженні. Набули подальшого розвитку методики з оцінки напружено-деформованого стану сталеклеювих з'єднань з бетоном. Результати даних експериментальних досліджень можуть бути використані для розробки вузлів кріплення виробничого обладнання та технологічних ліній підприємств, а також для подальшого поліпшення складів полімерних клеювих матеріалів.

**Ключові слова:** бетон, сталеклеюве кріплення, акриловий модифікований клей, функція напружень, руйнування, осесиметричне навантаження.

**Вступ.** В наш час в будівельній галузі при підсиленні, реконструкції, відновленні залізобетонних конструкцій та при влаштуванні анкерних кріплень використовуються різноманітні клеюві полімерні розчини [1-3]. За рахунок ряду переваг та відносно низької вартості, найбільш

раціональними для використання в будівництві, з метою забезпечення надійної сумісної роботи бетону і сталі, є епоксидні та акрилові клеї.

У наукових публікаціях Лапенка О.І., Машкової А.І., Білокурова П.С. [4, 5] наведено чисельні експериментальні