УДК 539.101:538.3

© 2002р. А.В. Константинович, С.В. Мельничук, І.А. Константинович

Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича, Чернівці

КЛАСИЧНА ТЕОРІЯ ВИПРОМІНЮВАННЯ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК. III. ПОТУЖНІСТЬ ВИПРОМІНЮВАННЯ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК, ЯКІ РУХАЮТЬСЯ В ПОСТІЙНОМУ ЕЛЕКТРИЧНОМУ ПОЛІ В НЕПОГЛИНАЮЧИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Узагальнено і розвинуто дослідження авторів в області випромінювання заряджених частинок, що рухаються в електромагнітних полях, в ізотропних непоглинаючих середовищах та у вакуумі. Методом сили самодії Лоренца досліджені миттєва та середня потужності випромінювання системи невзаємодіючих заряджених частинок, що рухаються в постійному електричному полі в непоглинаючому ізотропному середовищі та у вакуумі.

The work is the generalization and further development of the authors' studies in the field of the radiation of charged particles moving in electromagnetic fields in nonabsorbable isotropic media and in vacuum. The expressions of the momentary and average of radiation power of charged particles moving in constant electrical field in nonabsorbable isotropic medium and in vacuum are studied by using the Lorentz's self-interaction method.

Вступ

Прямолінійний прискорений рух заряджених частинок у постійному електричному полі отримав назву гіперболічного руху [1]. При гіперболічному русі не утворюється хвильова зона і цей факт привів до висновку, що заряд у даному випадку не випромінює [1].

У процесі подальших досліджень стало ясно, що в деяких випадках потужність роботи сили радіаційного тертя може і не дорівнювати енергії випромінювання за одиницю часу [2-6] (парадокс Борна). З одного боку, згідно з класичним рівнянням Дірака [7], сила радіаційного тертя дорівнює нулю. З іншого боку, згідно з теоремою Лармора [8-10], потужність випромінювання заряду, який рухається з прискоренням, відмінна від нуля.

Поле електричного заряду досліджено також Шоттом [11]. Шотт вводить поняття енергії прискорення [6, 12] як енергії, яка накопичується електроном завдяки його прискоренню. Шотт [12], на основі розвинутого ним підходу, дослідив декілька конкретних видів руху, в тому числі й гіперболічний рух, причому в останньому випадку він робить висновок, що енергія випромінювання повністю виникає з його енергії прискорення.

Аналіз необхідності введення поняття енергії прискорення, того факту, що заряд при гіперболічному русі випромінює енергію, яку черпає з ближньої зони, а також виразного факту, що при прискоренні заряд має тенденцію більше випромінювати назад, проведено Тіррингом [13]. Різностороння аргументація на користь наявності випромінювання заряду, який здійснює гіперболічний рух, наведена в роботах [14-23].

В оглядах [3,6], які присвячені питанню випромінювання та силі радіаційного тертя при гіперболічному русі заряду, подано аналіз неясних моментів та удаваних парадоксів у цьому питанні.

У роботі [17] отримана формула для спектрально-кутового розподілу повної енергії випромінювання електрона в постійному електричному полі, на траєкторії частинки знайдена область формування випромінювання з даним хвильовим вектором (інтервал когерентності), що важливо для встановлення умов експериментального спостереження випромінювання.

У роботі [24] запропонований точний метод (без розкладання за будь-яким параметром) розрахунку інтенсивності випромінювання заряду, що рухається по колу або по спіралі. Суть цього методу полягає в розрахунку інтенсивності випромінювання, що проходить через циліндричну поверхню, яка охоплює траєкторію випромінювача і не обов'язково віддалена на нескінченно велику відстань від нього. Цей метод отримав назву охоплюючої поверхні в теорії випромінювання.

Використання до проблеми випромінювання зарядженої частинки в постійному електричному полі методу охоплюючої поверхні [18, 20, 22-23], методу сили самодії Лоренца [19-21], а також методу потенціалів Лієнара Віхерта [19, 23] приводять до однакових виразів потужності випромінювання, а також до спектрально-кутового і кутового розподілів повної енергії випромінювання частинки, отриманих у роботі [17]. У працях [22, 23] досліджено більш загальний випадок випромінювання заряджених частинок у паралельних електричних та магнітних полях.

Важливим подальшим кроком є застосування отриманих в роботі [25] методом сили самодії Лоренца інтегральних співвідношень для дослідження спектрально-кутових та спектральних розподілів миттєвої та середньої потужностей випромінювання до випадку систем точкових невзаємодіючих заряджених частинок, які рухаються в постійному електричному полі у вакуумі та в непоглинаючих ізотропних середовищах.

Миттєва та середня за часом потужності випромінювання заряджених частинок

Миттєву потужність випромінювання заряджених частинок, зумовлену силою самодії Лоренца, можна виразити через потенціали. Скалярний $\varphi^{Dir}(\vec{r},t)$ та векторний $\vec{A}^{Dir}(\vec{r},t)$ потенціали, згідно з гіпотезою Дірака [7, 25-29], визначаються через напіврізницю запізнюючих та випереджаючих потенціалів:

$$\varphi^{Dir}=\frac{1}{2}\left(\varphi^{ret}-\varphi^{adv}\right), \tag{1}$$

$$\vec{A}^{Dir}=\frac{1}{2}\left(\vec{A}^{ret}-\vec{A}^{adv}\right). \tag{2}$$

Повну миттєву потужність $p^{tot}(t)$, зумовлену силою самодії Лоренца, будемо визначати через суму потужностей випромінюваної енергії $p^{rad}(t)$ і енергії прискорення $p^{acc}(t)$ [25, 28]:

$$P^{tot}(t)=P^{rad}(t)+P^{acc}(t), \tag{3}$$

$$P^{rad}(t)=\int_{\tau}\left(\vec{j}(\vec{r},t)\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}^{Dir}}{\partial t}-\rho(\vec{r},t)\frac{\partial\varphi^{Dir}}{\partial t}\right)d\vec{r}\,, \tag{4}$$

$$P^{acc}(t)=\frac{d}{dt}\int_{\tau}\rho(\vec{r},t)\varphi^{Dir}(\vec{r},t)d\vec{r}\,, \tag{5}$$

де $\vec{j}(\vec{r},t)$ - густина струму, $\rho(\vec{r},t)$ - густина заряду.

Отже, в ізотропному непоглинаючому середовищі та у вакуумі дія на заряджену частинку електричного поля, яке визначається згідно з гіпотезою Дірака, спричинює два ефекти: випромінювання електромагнітних хвиль і появу енергії прискорення [25, 28].

Миттєва потужність випромінювання $p^{rad}(t)$, яка виражена через спектрально-кутовий розподіл потужності випромінювання $W_1(t,\omega,\theta,\varphi)$, отримана із співвідношення (4) в роботі [25]:

$$P^{rad}(t)=\int_0^{\infty}d\omega\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta W_1(t,\omega,\theta,\varphi)\,, \tag{6}$$

$$W_1(t,\omega,\theta,\varphi)=\frac{1}{4\pi^2c^3}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}\,'\int_{-\infty}^{\infty}dt'\times$$
$$\times\omega^2\mu(\omega)n(\omega)\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\left(\sin\theta\cos\varphi(x-x')+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sin\theta\sin\varphi(y-y')\right)\right]\times$$
$$\times\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\cos\theta(z-z')\right]\cos\omega(t-t')\times$$
$$\times\left[\vec{j}(\vec{r},t)\vec{j}(\vec{r}\,',t')-\frac{c^2}{n^2(\omega)}\rho(\vec{r},t)\rho(\vec{r}\,',t')\right]. \tag{7}$$

Інтегруючи (6) за кутами φ, θ за допомогою співвідношень для функцій Бесселя цілочисельного індексу [30]:

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\left(\sin\theta\cos\varphi(x-x')+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sin\theta\sin\varphi(y-y')\right)\right]=$$
$$=2\pi J_0\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega\sin\theta\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}\right), \tag{8}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta J_0(\alpha\sin\theta)\cos(\beta\cos\theta)=\frac{\sin\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}. \tag{9}$$

Тоді отримаємо:

$$P^{rad}(t)=\int_0^{\infty}d\omega W(t,\omega)\,, \tag{10}$$

$$W(t,\omega)=\frac{1}{\pi c^2}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}\,'\int_{-\infty}^{\infty}dt'\omega\mu(\omega)\times$$
$$\times\frac{\sin\left[\frac{n(\omega)\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|\right]}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\cos\omega(t-t')\times$$
$$\times\left\{\vec{j}(\vec{r},t)\vec{j}(\vec{r}\,',t')-\frac{c^2}{n^2(\omega)}\rho(\vec{r},t)\rho(\vec{r}\,',t')\right\}. \tag{11}$$

Миттєва потужність випромінювання $p^{rad}(t)$, яка виражена через спектральний розподіл потужності випромінювання $W(t,\omega)$, отримана також у роботах [25, 31].

Середня за часом потужність випромінювання заряджених частинок визначається виразом [25, 32]:

$$\overline{P}^{rad}=\overline{P}^{tot}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}P^{rad}(t)dt=$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dt\int_{\tau}d\vec{r}\left(\vec{j}(\vec{r},t)\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}^{Dir}}{\partial t}-\right.$$
$$\left.-\rho(\vec{r},t)\frac{\partial\varphi^{Dir}}{\partial t}\right). \qquad (12)$$

Згідно з співвідношеннями (3)-(5), середня за часом потужність енергії прискорення дорівнює нулю. Цей висновок відіграє важливу роль при дослідженні процесу випромінювання заряджених частинок у постійному електричному полі.

Миттєва потужність випромінювання невзаємодіючої системи гетерогенних точкових заряджених частинок

При нехтуванні силою радіаційного тертя закон руху l-ї точкової зарядженої частинки визначається з рівнянь руху:

$$\frac{d\vec{p}_l}{dt}=q_l\vec{E}+\frac{q_l}{c}\left[\vec{V}_l\times\vec{B}\right], \qquad (13)$$

$$\vec{p}_l=\frac{m_{0l}\vec{V}_l}{\sqrt{1-V_l^2/c^2}}, \qquad (14)$$

де q_1, m_{0l}, $\vec{V}_l$ і $\vec{p}_l$ відповідно заряд, маса спокою, швидкість і релятивістський імпульс l-ї частинки.

Використовуємо функції джерел N точкових заряджених частинок

$$\vec{j}(\vec{r},t)=\sum_{l=1}^{N}\vec{V}_l(t)\rho_l(\vec{r},t),\quad \rho(\vec{r},t)=\sum_{l=1}^{N}\rho_l(\vec{r},t), \qquad (15)$$

$$\rho_l(\vec{r},t)=q_l\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_l(t)), \qquad (16)$$

де $\vec{r}_l(t)$– закон руху l-ї частинки.

Тоді з (7) і (11) отримаємо спектрально-кутовий і спектральний розподіли миттєвої потужності випромінювання невзаємодіючої гетерогенної системи N точкових заряджених частинок

$$W_1(t,\omega,\theta,\varphi)=\frac{1}{4\pi^2c^3}\int_{-\infty}^{\infty}dt'\omega^2\mu(\omega)n(\omega)\times$$
$$\times\sum_{l,j=1}^{N}q_lq_j\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\left(\sin\theta\cos\varphi\left(x_l(t)-x_j(t')\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sin\theta\sin\varphi\left(y_l(t)-y_j(t')\right)\right)\right]\times$$
$$\times\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\cos\theta\left(z_l(t)-z_j(t')\right)\right]\cos\omega(t-t')\times$$
$$\times\left[\vec{V}_l(t)\vec{V}_j(t')-\frac{c^2}{n^2(\omega)}\right]. \qquad (17)$$

$$W(t,\omega)=\frac{1}{\pi c^2}\int_{-\infty}^{\infty}dt'\omega\mu(\omega)\times$$
$$\times\sum_{l,j=1}^{N}q_lq_j\frac{\sin\left\{\frac{n(\omega)}{c}\omega\left|\vec{r}_l(t)-\vec{r}_j(t')\right|\right\}}{\left|\vec{r}_l(t)-\vec{r}_j(t')\right|}\times$$
$$\times\cos\omega(t-t')\left\{\vec{V}_l(t)\vec{V}_j(t')-\frac{c^2}{n^2(\omega)}\right\}. \qquad (18)$$

Підставляючи співвідношення (17) і (18) у вирази миттєвої потужності випромінювання (6), (10), приходимо до виразів середніх за часом потужностей випромінювання системи заряджених частинок у прозорих феродіелектриках

$$\overline{P}^{rad}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dt\int_{0}^{\infty}d\omega\int_{0}^{2\pi}d\varphi\int_{0}^{\pi}\sin\theta d\theta W_1(t,\omega,\theta,\varphi), \qquad (19)$$

$$\overline{P}^{rad}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dt\int_{0}^{\infty}d\omega W(t,\omega). \qquad (20)$$

Середню потужність випромінювання (20) можна переписати у вигляді [33]:

$$\overline{P}^{rad}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}P^{rad}(t)dt=$$
$$=\frac{1}{\pi c^2}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dt\int_{0}^{\infty}d\omega\omega\mu(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}dt'\times$$
$$\times\sum_{l,j=1}^{N}q_lq_j\frac{\sin\left\{\frac{n(\omega)}{c}\omega\left|\vec{r}_l(t)-\vec{r}_j(t')\right|\right\}}{\left|\vec{r}_l(t)-\vec{r}_j(t')\right|}\times$$
$$\times\cos\omega(t-t')\left\{\vec{V}_l(t)\vec{V}_j(t')-\frac{c^2}{n^2(\omega)}\right\}. \qquad (21)$$

Отримані вирази для спектрально-кутових і спектральних розподілів потужності випромінювання можна використати для дослідження процесу випромінювання заряджених частинок, що рухаються в постійному однорідному електричному полі.

Система тотожних заряджених частинок у постійному та однорідному електричному полі в середовищі та у вакуумі

Розглянемо систему тотожних точкових невзаємодіючих заряджених частинок ($q_l=e$), які рухаються одна за одною вздовж траєкторії у постійному електричному полі у вакуумі та в ідеальному ізотропному феродіелектрику. Тоді закон руху та швидкість l-ї частинки (електрона) цієї системи визначаються співвідношеннями:

$$\vec{r}_l(t)=\vec{r}(t+\Delta t_l)=\frac{cb}{a}\,\mathrm{Arsh}\left[a(t+\Delta t_l)\right]\vec{i}_0+$$

$$+\frac{c}{a}\left(\sqrt{a^2\left(t+\Delta t_l\right)^2+1}-1\right)\vec{k}_0, \qquad (22)$$

$$\vec{V}_l(t)=\vec{V}\left(t+\Delta t_l\right)=\frac{cb}{\sqrt{a^2\left(t+\Delta t_l\right)^2+1}}\vec{i}_0+$$

$$+\frac{ca\left(t+\Delta t_l\right)}{\sqrt{a^2\left(t+\Delta t_l\right)^2+1}}\vec{k}_0, \qquad (23)$$

$$a=\frac{ceE^{ext}}{\tilde{E}_0},\ b=\frac{p_0c}{\tilde{E}_0},\ \tilde{E}_0=\sqrt{p_0^2c^2+m_0^2c^4}.$$

Тут m_0 – маса спокою частинки, c – швидкість світла у вакуумі, E^{ext} – напруженість постійного електричного поля, яке напрямлене вздовж осі z, а p_0 – початковий імпульс частинки вздовж осі x. Середню потужність випромінювання, яка визначається через спектрально-кутовий розподіл середньої потужності випромінювання отримаємо, підставляючи вирази (17), (22), (23) в (19). Тоді одержимо вираз:

$$\overline{P}^{rad}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}P^{rad}(t)dt^{ext}, \qquad (24)$$

$$P^{rad}(t)=\frac{e^2}{4\pi^2c^3}\int_{-\infty}^{\infty}dt'\int_0^{\infty}d\omega\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\,\mu(\omega)n(\omega)\omega^2\times$$

$$\times S_N(\omega)\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\sin\theta\cos\varphi\left(x(t)-x(t')\right)\right]\times$$

$$\times\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\cos\theta\left(z(t)-z(t')\right)\right]\cos\omega(t-t')\times$$

$$\times\left[V_x(t)V_x(t')+V_z(t)V_z(t')-\frac{c^2}{n^2(\omega)}\right]. \qquad (25)$$

Тут $\vec{r}(t)$ та $\vec{V}(t)$ визначаються формулами (22) і (23) відповідно, а фактор когерентності $S_N(\omega)$ визначається співвідношенням:

$$S_N(\omega)=\sum_{l,j=1}^{N}\cos\left\{\omega\left(\Delta t_l-\Delta t_j\right)\right\}. \qquad (26)$$

Інтегруючи за φ у (24), (25) за допомогою співвідношення (8), знаходимо:

$$\overline{P}^{rad}=\frac{e^2}{2\pi c^3}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dt\int_{-\infty}^{\infty}dt'\times$$

$$\times\int_0^{\infty}d\omega\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\,\mu(\omega)n(\omega)\omega^2S_N(\omega)\times$$

$$\times J_0\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\sin\theta\left(x(t)-x(t')\right)\right]\times$$

$$\times\cos\left[\frac{n(\omega)\omega}{c}\cos\theta\left(z(t)-z(t')\right)\right]\cos\omega(t-t')\times$$

$$\times\left[V_x(t)V_x(t')+V_z(t)V_z(t')-\frac{c^2}{n^2(\omega)}\right]. \qquad (27)$$

Після інтегрування за θ згідно зі співвідношенням (9), знаходимо:

$$\overline{P}^{rad}=\frac{e^2}{\pi c^2}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dt\int_{-\infty}^{\infty}dt'\int_0^{\infty}d\omega\mu(\omega)\omega S_N(\omega)\times$$

$$\times\frac{\sin\left\{\frac{n(\omega)}{c}\omega\sqrt{\left(x(t)-x(t')\right)^2+\left(z(t)-z(t')\right)^2}\right\}}{\sqrt{\left(x(t)-x(t')\right)^2+\left(z(t)-z(t')\right)^2}}\times$$

$$\times\cos\omega(t-t')\left[V_x(t)V_x(t')+V_z(t)V_z(t')-\frac{c^2}{n^2(\omega)}\right]. \qquad (28)$$

Отже, отримані вирази (26), (27), (28) визначають через спектрально-кутовий та спектральний розподіли середню потужність випромінювання гомогенної системи заряджених частинок у постійному електричному полі у вакуумі та в ізотропному ідеальному феродіелектрику.

У випадку, коли відсутнє електричне поле, тобто $E^{ext}=0$, $\vec{r}(t)=V_0t\vec{i}_0$, $\vec{V}(t)=V_0\vec{i}_0$, а співвідношення (28) переходить у вираз для потужності випромінювання Черенкова системи електронів, які рухаються один за другим вздовж прямої лінії в ідеальному ізотропному феродіелектрику [33]:

$$\overline{P}^{rad}=\frac{e^2}{c^2}V_0\int_0^{\infty}d\omega\mu(\omega)\omega S_N(\omega)\times$$

$$\times\eta\left(V_0-\frac{c}{n(\omega)}\right)\left(1-\frac{c^2}{n^2(\omega)V_0^2}\right). \qquad (29)$$

де $\eta(x)=\begin{cases}1, & x.>0\\ 0, & x<0\end{cases}$.

Використаємо отриманий вираз (25) для миттєвої потужності випромінювання системи електронів з метою дослідження повної енергії випромінювання окремого електрона.

Повна енергія випромінювання електрона, який рухається в постійному електричному полі

Повну енергію випромінювання окремого електрона можна знайти зі співвідношення:

$$\tilde{E}^{tot}=\int_{-\infty}^{\infty}P^{rad}(t)dt. \qquad (30)$$

Для окремого електрона використаємо заміни $at=\text{sh}\xi$, $at'=\text{sh}\xi'$ у співвідношенні (25), тоді отримаємо повну енергію випромінювання за час від -∞ до +∞:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P^{rad}(t)dt = \frac{e^2}{4\pi^2 a^2 c}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \times$$
$$\times \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \mu(\omega) n(\omega)\omega^2 \times$$
$$\times \cos\left[\frac{b}{a} n(\omega)\omega \sin\theta\cos\varphi(\xi-\xi') + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{a} n(\omega)\omega\cos\theta(\operatorname{ch}\xi - \operatorname{ch}\xi') + \frac{\omega}{a}(\operatorname{sh}\xi - \operatorname{sh}\xi')\right] \times$$
$$\times\left[b^2 + \operatorname{sh}\xi\operatorname{sh}\xi' - \frac{1}{n^2(\omega)}\operatorname{ch}\xi\operatorname{ch}\xi'\right]. \qquad (31)$$

У вакуумі співвідношення (31) набуває вигляду:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P^{rad}(t)dt = \frac{e^2}{4\pi^2 a^2 c}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \times$$
$$\times\omega^2\cos\left[\frac{b}{a}\omega\sin\theta\cos\varphi(\xi-\xi') + \right.$$
$$\left. + \frac{\omega}{a}\cos\theta(\operatorname{ch}\xi - \operatorname{ch}\xi') + \frac{\omega}{a}(\operatorname{sh}\xi - \operatorname{sh}\xi')\right]\times$$
$$\times\left[b^2 + \operatorname{sh}\xi\operatorname{sh}\xi' - \operatorname{ch}\xi\operatorname{ch}\xi'\right]. \qquad (32)$$

Співвідношення (32) можна переписати у вигляді:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P^{rad}(t)dt = \frac{e^2}{4\pi^2 a^2 c}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \times$$
$$\times\omega^2\cos\left[\frac{b}{a}\omega\sin\theta\cos\varphi(\xi-\xi') + \right.$$
$$\left. + \frac{\omega}{a}\sin\theta\left[\operatorname{sh}(\xi+\varphi_0) - \operatorname{sh}(\xi'+\varphi_0)\right]\right]\times$$
$$\times\left[b^2 + \operatorname{sh}\xi\operatorname{sh}\xi' - \operatorname{ch}\xi\operatorname{ch}\xi'\right]. \qquad (33)$$

де $\varphi_0 = \operatorname{Arth}(\cos\theta)$.

Провівши заміну змінних $\xi+\varphi_0=\eta$, $\xi'+\varphi_0=\eta'$, перетворимо (33) до вигляду:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P^{rad}(t)dt = \frac{e^2}{4\pi^2 a^2 c}\int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\eta' \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \times$$
$$\times\omega^2\cos\left[\frac{b}{a}\omega\sin\theta\cos\varphi(\eta-\eta') + \right.$$
$$\left. + \frac{\omega}{a}\sin\theta\left[\operatorname{sh}\eta - \operatorname{sh}\eta'\right]\right]\times$$
$$\times\left[b^2 + \operatorname{sh}\eta\operatorname{sh}\eta' - \operatorname{ch}\eta\operatorname{ch}\eta'\right]. \qquad (34)$$

Введемо позначення

$$z = \frac{\omega}{a}\sin\theta, \quad \nu = bz\cos\varphi, \qquad (35)$$

тоді перетворимо (36) до вигляду:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P^{rad}(t)dt = \frac{e^2}{4\pi^2 a^2 c}\int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\eta' \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta\,\omega^2 \times$$
$$\times\left\{b^2\cos(z\operatorname{sh}\eta + \nu\eta)\cos(z\operatorname{sh}\eta' + \nu\eta') + \right.$$
$$+ \lim_{z_1\to z}\frac{\partial^2}{\partial z_1\partial z}\cos(z\operatorname{sh}\eta + \nu\eta)\cos(z_1\operatorname{sh}\eta' + \nu\eta') -$$
$$-\frac{1}{z^2}\left[\cos(\nu\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}\sin(z\operatorname{sh}\eta) + \sin(\nu\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}\cos(z\operatorname{sh}\eta)\right]\times$$
$$\times\left[\cos(\nu\eta')\frac{\partial}{\partial\eta}\sin(z\operatorname{sh}\eta') + \right.$$
$$\left.\left. + \sin(\nu\eta')\frac{\partial}{\partial\eta}\cos(z\operatorname{sh}\eta')\right]\right\}. \qquad (36)$$

Перетворимо рівняння (36), застосовуючи формули [34]:

$$K_\nu(x)\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) = \int_0^{\infty}\cos(x\operatorname{sh}t)\operatorname{ch}(\nu t)dt,$$
$$\left[x>0,\ -1<\operatorname{Re}\nu<1\right], \qquad (37)$$

$$K_\nu(x)\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) = \int_0^{\infty}\sin(x\operatorname{sh}t)\operatorname{sh}(\nu t)dt,$$
$$\left[x>0,\ -1<\operatorname{Re}\nu<1\right]. \qquad (38)$$

Отримаємо інтегральну формулу для спектрально-кутового розподілу випромінювання електричного заряду, який рухається в електричному полі за час t від -∞ до +∞:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P^{rad}(t)dt = \frac{e^2}{4\pi^2 a^2 c}\int_0^{\infty} d\omega\omega^2\int_0^{\pi} d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\times$$
$$\times\left\{\left(b^2 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)R_\nu^2(z) + R_\nu'^2(z)\right\}, \qquad (39)$$

де $R_\nu(z) = 2\exp\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)K_{i\nu}(z)$, $R'_\nu(z)$ – похідна за z від $R_\nu(z)$. Останній вираз можна переписати у вигляді [17]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P^{rad}(t)dt = \frac{m_0^2 c}{4\pi^2\left(E^{ext}\right)^2}\int_0^{\infty} d\omega\omega^2\int_0^{\pi} d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\times$$
$$\times\left\{\left[\left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)\gamma^2 - 1\right]R_\nu^2(z) + \gamma^2 R_\nu'^2(z)\right\}, \qquad (40)$$

де $\gamma = \dfrac{\sqrt{p_0^2c^2 + m_0^2c^4}}{m_0c^2}$. Формула (40) дає спектрально-кутовий розподіл глобальних втрат енергії заряду на випромінювання.

Замінивши $\tilde{\omega}=\frac{1}{a}\omega\sin\theta$ в формулі (39), одержимо:

$$\int_{-\infty}^{\infty}P^{rad}(t)dt=\frac{e^2a}{8\pi^2c}\int_{-\infty}^{\infty}d\eta\int_{-\infty}^{\infty}d\eta'\int_{-\infty}^{\infty}d\tilde{\omega}\tilde{\omega}^2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sin^2\theta}\times$$
$$\times\,\omega^2\cos\left[b\tilde{\omega}\cos\varphi(\eta-\eta')+\tilde{\omega}\sin\theta(\operatorname{sh}\eta-\operatorname{sh}\eta')\right]\times$$
$$\times\left[b^2+\operatorname{sh}\eta\operatorname{sh}\eta'-\operatorname{ch}\eta\operatorname{ch}\eta'\right]. \qquad (41)$$

Проінтегруємо (41) за $\tilde{\omega}$ та врахуємо співвідношення для дельта-функції

$$\delta(f(x))=\sum_s\frac{\delta(x-x_s)}{|f'(x)|},\ f(x_s)=0. \qquad (42)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}P^{rad}(t)dt=\frac{e^2a}{4\pi c}\int_{-\infty}^{\infty}d\eta\int_{-\infty}^{\infty}d\eta'\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sin^2\theta}\times$$
$$\times\left[b^2+\operatorname{sh}\eta\operatorname{sh}\eta'-\operatorname{ch}\eta\operatorname{ch}\eta'\right]\frac{1}{\operatorname{ch}\eta'+b\cos\varphi}\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial\eta'}\frac{1}{\operatorname{ch}\eta'+b\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\eta'}\frac{\delta(\eta-\eta')}{\operatorname{ch}\eta'+b\cos\varphi}. \qquad (43)$$

Проінтегруємо за η' та врахуємо зв'язок $\gamma^2=(1-b^2)^{-1}$, тоді після елементарних перетворень отримаємо:

$$a\int_{-\infty}^{\infty}P^{rad}(t)dt=\frac{e^2a^2}{4\pi c}\int_{-\infty}^{\infty}d\eta\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sin^2\theta}\int_0^{2\pi}d\varphi\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{(\operatorname{ch}\eta+b\cos\varphi)^3}-\frac{1}{4\gamma^2}\frac{\operatorname{ch}\eta}{(\operatorname{ch}\eta+b\cos\varphi)^4}\right\}. \qquad (44)$$

Проінтегруємо за η та застосуємо формулу обернених тангенсів

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{a-b\cos\varphi}{\sqrt{a^2-b^2\cos^2\varphi}}\right)+$$
$$+\operatorname{arctg}\left(\frac{a+b\cos\varphi}{\sqrt{a^2-b^2\cos^2\varphi}}\right)=\frac{\pi}{2}, \qquad (45)$$

знаходимо кутовий розподіл глобальної енергії випромінювання [18, 21]:

$$a\int_{-\infty}^{\infty}P^{rad}(t)dt=\frac{e^2a^2}{32c}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sin^2\theta}\int_0^{2\pi}d\varphi\times$$
$$\times\left[\frac{4(1+2b^2\cos^2\varphi)}{(1-b^2\cos^2\varphi)^{5/2}}-\frac{1}{\gamma^2}\frac{1+4b^2\cos^2\varphi}{(1-b^2\cos^2\varphi)^{7/2}}\right]. \qquad (46)$$

Оскільки інтегрування за θ та за φ в останній формулі повністю розділяються, то, інтегруючи за φ, знайдемо кутовий розподіл глобальних втрат на випромінювання за кутом θ [18, 21]:

$$a\int_{-\infty}^{\infty}P^{rad}(t)dt=\frac{2e^2a^2}{3c}\gamma^2\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sin^2\theta}\times$$
$$\times\left[\left(\gamma^2+\frac{1}{16}\right)E\left(\frac{\pi}{2},b\right)-\frac{1}{2}F\left(\frac{\pi}{2},b\right)\right]\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sin^2\theta}. \qquad (47)$$

Тут

$$F\left(\frac{\pi}{2},b\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-b^2\cos^2\varphi}}, \qquad (48)$$

$$E\left(\frac{\pi}{2},b\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-b^2\cos^2\varphi}\,d\varphi \qquad (49)$$

– повні еліптичні інтеграли 1-го та 2-го роду.

Вважаючи, що $p_0=0$, знаходимо вираз для кутового розподілу повної енергії за нескінченний час при гіперболічному русі

$$a\int_{-\infty}^{\infty}P^{rad}(t)dt=\frac{2e^2a^2}{3c}\frac{9\pi}{32}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sin^2\theta}. \qquad (50)$$

Як випливає з формул (46), (47), (50), випромінювання при гіперболичному русі являє собою частковий випадок розглянутої вище загальної теорії випромінювання в постійному електричному полі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Паули В.* Теория относительности. - М.: Гостехиздат, 1983.
2. *Соколов А.А.*, *Колесникова М.М.* Об излучении и силе радиационного трения при ускоренном движении // Вестн. Моск. ун-та. Сер. физ., астр. - 1971. - **2**. - С.198-206.
3. *Гинзбург В.Л.* Об излучении и силе радиационного трения при равномерно ускоренном движении заряда // УФН. - 1969. - **98**, №3. - С.569-585.
4. *Соколов А.А.*, *Тернов И.М.* Релятивистский электрон. - М.: Наука, 1974.
5. *Соколов А.А.* К теории классического релятивистского уравнения Дирака // Гравитация (Сборник ст.). - Киев: Наук. думка, 1972. - С.255-275.
6. *Куканов А.Б.*, *Константинович А.В.* Об излучении при гиперболическом движении // История и методология естественных наук. Вып. 21: Физика. - Изд-во Моск. ун-та, 1970. - С.105-109.
7. *Dirac P.A.M.* Classical Theory of Radiating Electrons // Proc. Roy. Soc. - 1938. - **167A**, No1. - P.148-169.
8. *Иваненко Д.*, *Соколов А.* Классическая теория поля. - М.: Ленинград: Гос. изд-во техн. теор. лит., 1951.
9. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. - М.: Мир, 1965.
10. *Ландау Л.Д.*, *Лифшиц Е.М.* Теория поля. - М.: Наука, 1973.

11. *Schott G.A.* Electromagnetic Radiation. - Cambridge: Cambridge University Press, 1912.
12. *Schott G A.* On the Motion of the Lorenz Electron // Phil. Mag. - 1915. - **29**. - P.49-69.
13. *Тирринг В.Е.* Принципы квантовой электродинамики. - М.: Высшая школа, 1964.
14. *Bondi M., Gold T.* The Field of a Uniformly Accelerated Charge, with Special Reference to the Problem of Gravitational Acceleration // Proc. Roy. Soc. - 1955. - **229A**. - P.416-424.
15. *Fulton T., Rohrlich F.* Classical Radiation from a Uniformly Accelerated Charge // Annals of Physics. - 1960. - **9**. - P.499-517.
16. *Rohrlich F.* The Definition of Electromagnetic Radiation // Nuovo Cimento. - 1961. - **21**, No5. - P.811-812.
17. *Никишов А.И., Ритус В.И.* Спектр излучения электрона, движущегося в постоянном электрическом поле // ЖЭТФ. - 1969. - **56**, №6. - С.2035-2042.
18. *Куканов А.Б., Константинович А.В.* Об одной задаче классической теории излучения // ЖТФ. - 1973. - **43**, №8. - С.1778-1780.
19. *Куканов А.Б., Константинович А.В.* К теории излучения электрическим зарядом, движущимся в постоянном электрическом поле // Вестн. Моск. ун-та. Сер. физ., астр. - 1973. - **14**, №5. - С.627-629.
20. *Куканов А.Б., Константинович А.В.* Об одной задаче теории излучения протяженными сгустками // Оптика и спектроскопия. - 1974. - **36**, №6. - С.1217-1219.
21. *Константинович А.В.* Движение и излучение релятивистских заряженных частиц, движущихся в вакууме и в прозрачной среде: Дисс. канд. физ.-мат. наук. - Черновцы, 1974.
22. *Куканов А.Б., Константинович А.В.* Об одном применении метода охватывающей поверхности в классической теории излучения // Вест. Моск. ун-та. Сер. физ., астр. - 1975. - **16**, №4. - С.473-481.
23. *Куканов А.Б., Константинович А.В.* Об одном применении метода охватывающей поверхности в классической теории излучения // Изв. высш. учеб. завед. Физика. - 1975. - **18**, №4. - С.122-124.
24. *Соколов А.А., Гальцов Д.В., Колесникова М.М.* Точный вывод формулы для синхротронного излучения // Изв. высш. учеб. завед. Физика. - 1971. - **14**, №4. - С.14-24.
25. *Константинович А.В., Мельничук С.В., Константинович І.А.* Класична теорія випромінювання заряджених частинок. І. Запізнюючі і випереджаючі потенціали та напруженості електромагнітного поля і метод сили самодії Лоренца // Науковий вісник ЧНУ. Вип. 102. Фізика. Електроніка. - Чернівці: ЧНУ, 2001. - С.5-13.
26. *Константинович А.В., Фортуна* В.В. К теории излучения систем невзаимодействующих зарядов, движущихся в постоянном магнитном поле в вакууме // Изв. высш. учеб. завед. Физика. - 1983. - **26**, №12. - С.102-104.
27. *Соколов А.А.* К классической теории элементарных частиц (точечный электрон) // Вестн. Моск. ун-та. - 1947. - **2**. - С.33-48.
28. *Schwinger J.* On the Classical Radiation of Accelerated Electrons // Phys. Rev. - 1949. - **75**, No12. - P.1912-1925.
29. *Константинович А.В., Ницович В.М.* Энергетические потери заряда, движущегося по спирали в прозрачном диэлектрике // Изв. высш. учеб. завед. Физика. - 1973. - **16**, №2. - С.59-62.
30. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: Наука, 1971.
31. *Schwinger J., Tsai Wu-yang, Erber T.* Classical and Quantum Theory of Synergic Synchrotron-Čerenkov Radiation // Ann. of Phys. - 1976. - **96**, No2. - P.303-332.
32. .*Константинович А.В., Мельничук С.В., Раренко І.М., Константинович І А., Жаркой В П.* Спектр випромінювання системи заряжених частинок, що рухаються в непоглинаючому ізотропному середовищі // Журнал фізичних досліджень. - 2000. - **4**, №1. - С.48-56.
33. *Константинович І.А.* Потужність випромінювання системи електронів, що рухаються з постійною швидкістю у непоглинаючому ізотропному середовищі // Науковий вісник ЧНУ. Вип. 40. Фізика. - Чернівці: ЧДУ, 1998. - С.20-21.
34. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. - М.: Наука, 1974.