

## ВИКОРИСТАННЯ ФУНКЦІЇ ЛАМПЕРТА ДЛЯ АНАЛІЗУ ІНЖЕКЦІЙНИХ СТРУМІВ У ШИРОКОЗОННИХ МАТЕРІАЛАХ

З використанням спеціальної  $LW$ -функції знайдено аналітичний розв'язок диференціального рівняння, що описує інжекційний струм у непровіднику. Знайдено аналітичну функцію співвідношення інжекційного та дифузійного струмів, останнім з яких у більшості розрахунків прийнято нехтувати. Показано, що дифузійний струм істотний лише у приконтатній області непровідника, яку можна не брати до уваги при розрахунках.

Using specific  $LW$ -function, it was found the analytical solution of the differential equation, which describes an injection current in non-conductor. The analytical fraction of injection and diffusion currents was found. It was shown that diffusion current is considerable only in a little space just near the contact. This space may be not taken into consideration in calculation.

Широке використання діелектричних діодів, діелектричних антен та інше спонукають до подальших експериментальних та теоретичних досліджень електричних властивостей згаданих матеріалів. Відповідно до класифікації С. Грея [1] при описі електричних властивостей діелектриків останні коротко називатимемо непровідниками. В ідеальних непровідників власні носії заряду відсутні (такі речовини використовують для виготовлення ізоляторів), однак за допомогою спеціальних контактів (як правило, омичних) у непровідник можна інжектувати сторонні носії заряду.

Аналіз вольт-амперної характеристики (ВАХ) резисторів із твердих ідеальних непровідників вперше провели 1940 р. Н.Ф. Мотт та З.В. Герні [2]. Вони отримали квадратичний закон ВАХ

$$j = \frac{9\varepsilon\varepsilon_0\mu}{8L^3} U^2, \quad (1)$$

де  $j$  – густина струму,  $U$  – напруга на резисторі,  $L$  – його довжина,  $\mu$  – рухливість носіїв,  $\varepsilon$  – діелектрична проникність середовища,  $\varepsilon_0$  – електрична стала.

У реальних непровідників наявні власні носії заряду. Аналіз ВАХ резисторів із таких матеріалів здійснили М. Ламперт і П. Марк [2]. Зіткнувшись із математичними труднощами, вони змогли отримати результат лише наближеними методами. У даній роботі показано, що з використанням нульової гілки  $LW$ -функції Ламперта [3], такої, що є розв'язком  $y(z)$  рівняння

$$y \cdot \exp(y) = z, \quad (2)$$

можна провести детальний аналіз ВАХ-аналітичними методами.

### ВАХ резистора з безпастьового непровідника із рівноважними носіями при монополярній інжекції

Розглянемо розміщений між паралельними омичними контактами непровідник, у якому наявні рівноважні носії з концентрацією  $n_0$ . Якщо  $n$  – концентрація всіх носіїв, то в одновимірному випадку електростатичну теорему Гауса запишемо так:

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{dE}{dx} = ne - n_0e, \quad (3)$$

де  $E$  – напруженість електричного поля, а  $x$  – вісь, направлена вздовж резистора. Без урахування дифузії носіїв густина струму буде:

$$j = en\mu E. \quad (4)$$

Враховуючи (4), перетворимо рівняння (3) до вигляду:

$$EdE = \frac{j}{\varepsilon\varepsilon_0\mu} \left[ 1 - \frac{en_0\mu}{j} E \right] dx. \quad (5)$$

Розділивши змінні у (5), інтегруванням частинами отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{j^2}{(en_0\mu)^2} \left\{ 1 - \frac{en_0\mu}{j} E - \ln \left| 1 - \frac{en_0\mu}{j} E \right| \right\} = \\ = \frac{j}{\varepsilon\varepsilon_0\mu} x + \text{const}. \end{aligned} \quad (6)$$

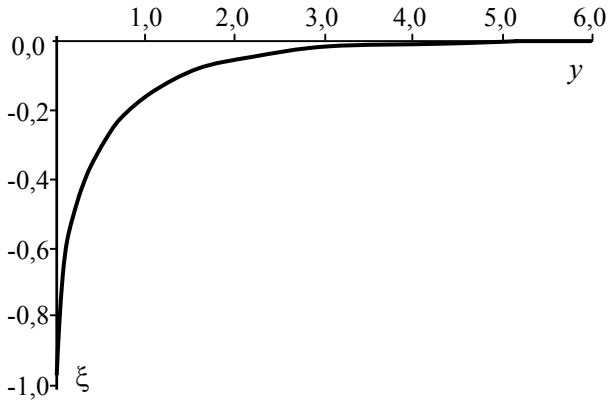


Рис. 1. Хід функції Ламберта

Сталу інтегрування визначимо з граничної умови  $E(0)=0$ , що характеризує резервуарний тип контакту. Враховуючи також безумовне виконання умови

$$en_0\mu E \leq j, \tag{7}$$

доходимо висновку, що аргумент логарифму в (6) завжди додатний, тому можна відмовитись від запису його модуля. Отже, зв'язок між напруженістю  $E$  та відстанню  $x$  набуде вигляду:

$$E + \frac{j}{en_0\mu} \ln\left(1 - \frac{en_0\mu}{j} E\right) = -\frac{en_0x}{\epsilon\epsilon_0}. \tag{8}$$

Аналітичний розв'язок (8) запишемо через функцію Ламберта:

$$E(x) = \frac{j}{en_0\mu} \left\{ 1 + LW\left(-\exp\left(-1 - \frac{e^2 n_0^2 \mu}{\epsilon\epsilon_0 j} x\right)\right)\right\}. \tag{9}$$

Графік функції  $\xi = LW(-\exp(-1-y))$  наведено на рис. 1. Знаючи залежність  $E(x)$ , за формулою (4) легко обчислити розподіл концентрації  $n$  носіїв вздовж зразка.

Інтегруючи  $E(x)$  за  $x$  знаходимо явний вираз для розподілу напруги  $U$  уздовж осі  $x$ . При  $x=L$  він матиме вигляд:

$$U(L) = \int_0^L E(x) dx = \frac{jL}{en_0\mu} - \frac{\epsilon\epsilon_0 \mu j^2}{2(en_0\mu)^3} \times \left[ LW\left(-\exp\left(-1 - \frac{(en_0\mu)^2 L}{j\epsilon\epsilon_0\mu}\right)\right) + 1 \right]^2. \tag{10}$$

Із (10) видно, що напруга  $U$  на резисторі визначається сумою двох складових, обчислених відносно лінійного та нелінійного законів. Асимптотика ВАХ такого резистора простежується із (10). Так, при малих густинах струму:

$$U \approx U_\Lambda = \frac{L}{n_0 e \mu} j. \tag{11}$$

При великих густинах струму напруга на резисторі буде алгебричною сумою напруги  $U_M$  на резисторі з ідеального непровідника (закон Мотта-Герні) і деякої постійної  $U_0$ :

$$U \approx U_M + U_0 = \sqrt{\frac{8j}{9\epsilon\epsilon_0\mu}} L^{3/2} - \frac{n_0 e L^2}{3\epsilon\epsilon_0}, \tag{12}$$

де

$$U_0 = -\frac{en_0 L^2}{3\epsilon\epsilon_0}. \tag{13}$$

Формула (10) отримана без урахування дифузійних струмів. Зважаючи на зв'язки (4) і (9), можна обчислити просторовий розподіл концентрації  $n$  носіїв, а звідси і густину дифузійного струму:

$$j_{diff} = -\text{Degrad } n. \tag{14}$$

Тут  $D$  – коефіцієнт дифузії, який за формулою

$$De = kT\mu, \tag{15}$$

можна пов'язати з рухливістю  $\mu$ , абсолютною температурою  $T$  зразка і сталою Больцмана  $k$ . Провівши перетворення в (14), отримаємо залежність

$$j_{diff} = \frac{kTj}{\epsilon\epsilon_0 e E^2} \left( \frac{j}{\mu E} - en_0 \right). \tag{16}$$

На рис. 2 наведено хід  $j_{diff}/j$  від  $x$  для зразка з непровідника при  $L=1$  см,  $n_0=1,3 \cdot 10^{13}$  м<sup>-3</sup> та  $\epsilon=21$ , характер якого практично не залежить від  $j$ . Такий зразок використовувався для порівняння експериментально отриманих ВАХ та співвідношення (10). Видно, що для  $L>2$ мм  $j_{diff}$  значне лише біля резервуарного контакту і в практичних випадках дифузійним струмом можна нехтувати. Для тонких зразків ( $L<1$ мм) дифузійний струм необхідно враховувати на початкових стадіях аналізу ВАХ.

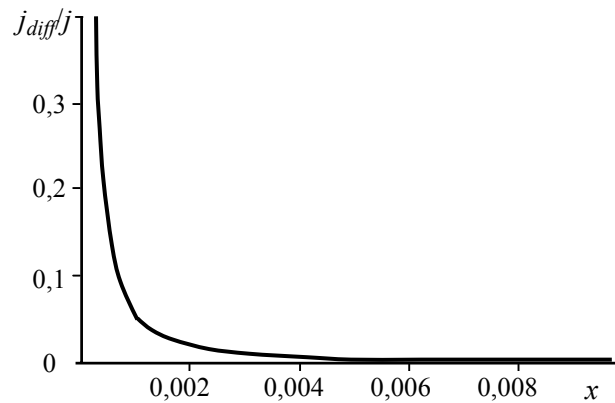


Рис. 2. Частка дифузійного струму вздовж зразка

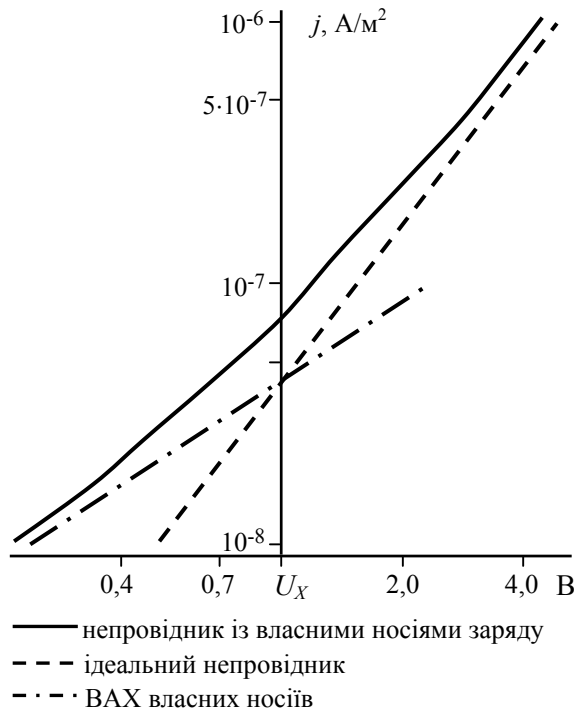


Рис. 3. ВАХ у подвійному логарифмічному масштабі та апроксимаційні криві

### Основні результати та висновки

У роботі [2] показано, що величина терму  $\frac{en_0L^2}{\epsilon\epsilon_0}$  має важливе значення для обчислення

концентрації неглибоких пасток у реальних непровідників, глибини їх залягання тощо. Там його значення пропонують знаходити за напругою  $U_x$  перетину апроксимаційних прямих на графіку ВАХ, побудованому в подвійному логарифмічному масштабі, при малих і великих струмах. Ці графіки для резистора, з названого вище непровідника, наведено на рис. 2. На нашу думку, помилка такого підходу полягає в тому, що при великих струмах апроксимаційною кривою вибирається закон (1), а не (12), а це призводить до виникнення значної похибки, адже за розрахунками, наведеними у [2], напруга  $U_x$  дорівнює  $8/3U_0$ . Крім того, особливість такого підходу вимагає виконання детальних вимірювань ВАХ при малих ( $U \ll U_x$ ) напругах, де значний вплив на результат вносять поверхневі та інші паразитні струми.

Із аналізу формули (12) ми пропонуємо апроксимувати ділянку ВАХ при великих струмах параболою і за точкою екстремуму знаходити напругу  $U_0$ . Результат такої процедури наведено на рис. 3. Запропонований підхід значно підвищує точність перерахунку отриманих результатів у характеристики досліджуваного матеріалу.

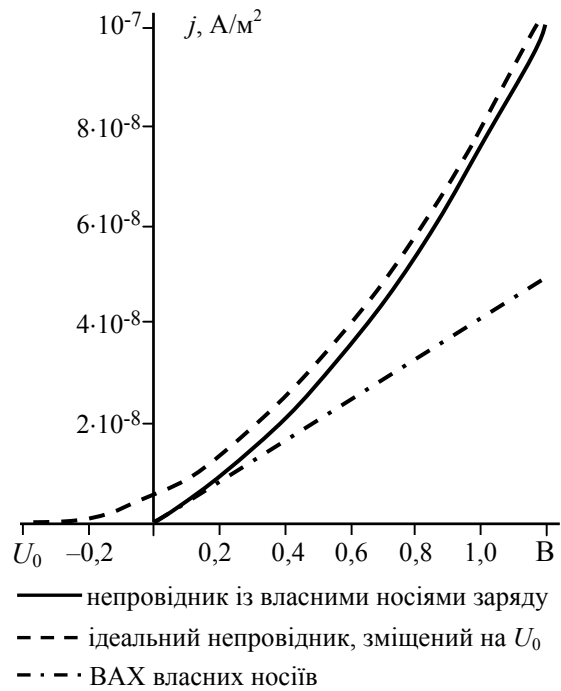


Рис. 4. ВАХ у лінійному масштабі та апроксимаційна крива

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Льюїзи М. История физики. – М.: Мир, 1970.
2. Ламберт М., Марк П. Инжекционные токи в твердых телах – М.: Мир, 1973.
3. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jeffrey D.J., Knuth D.E. On The Lambert W Function // Advances in Computational Mathematics. – 1996. – No.5. – P.329-359.