

МОДЕЛЬ АСИНХРОННОЇ МАШИНИ У ФІЗИЧНИХ КООРДИНАТАХ

Розглядається математична модель асинхронної машини у фазних координатах, диференціальні рівняння якої записані у нормальній формі Коші. Показано, що така модель є найбільш ефективною для аналізу несиметричних режимів роботи двигуна. Приведені результати числового моделювання одного з несиметричних режимів роботи асинхронного двигуна.

Ключові слова: асинхронний двигун, статор, кутова швидкість, математична модель.

Рассматривается математическая модель асинхронного двигателя в фазовых координатах, дифференциальные уравнения которой записаны в нормальной форме Коши. Показано, что такая модель есть наиболее эффективной для анализа несимметрических режимов асинхронного двигателя. Приведены результаты численного моделирования одного из несимметрических режимов работы асинхронного двигателя.

Ключевые слова: асинхронный двигатель, статор, угловая скорость, математическая модель.

In the paper is proposed mathematical model of asynchronous motors of physical coordinates. The differential equations of electromechanical state are written in normal Cauchy form. It has been shown, that such a model is one of the most effective for analysis of unsymmetrical mode of asynchronous motor. The results of numerical modeling for one of unsymmetrical modes of asynchronous motor.

Keywords: asynchronous motor, stator, angular velocity, mathematical model.

Вступ

Математичне моделювання електротехнічних пристроїв ускладнюється описом фізичних явищ різної природи (електромагнітні, механічні, теплові тощо). Адекватність математичної моделі реальному прототипу досягається вмілим використанням законів теоретичної електротехніки та формою подання диференціальних рівнянь, а також вмілим прийняттям тих чи інших припущень. У даній праці математична модель максимально орієнтована на числові методи, для яких використовується якісно новий математичний апарат, що спирається на теорію нелінійних диференціальних рівнянь. Оскільки, асинхронні двигуни є найпоширенішими серед усіх електротехнічних пристроїв (більше 50% електроенергії змінного струму споживають саме ці двигуни), то науковий інтерес до процесів, що протікають у них є неминучим. Математична модель у фізичних координатах оперує реальними фізичними електро-магнітними величинами. Її доцільно застосовувати у випадку несиметрії як кола статора, так і ротора.

Постановка задачі

Розглянемо асинхронну машину з фазним ротором. Вона містить як на статорі, так і на роторі симетричні трифазні обмотки, в яких фази зміщені у просторі на 120° . Струми обмоток створюють обертове магнітне поле. Оскільки ротор і статор у просторі взаємопереміщуються, то обертове магнітне поле перетинає їх із різними швидкостями, отже, й індукує у них відмінні за частотою електрорушійні сили ЕРС – трансформаторні та руху [3, 5]

$$\frac{d\Psi_j}{dt} = U_j - R_j I_j, \quad (1)$$

де Ψ_j , U_j , I_j ($j=S, R$) – колонки повних поточкозчеплень електричних напруг і струмів обмоток статора ($j=S$) й ротора ($j=R$):

$$h_j (h = \Psi, U, I; j = S, R) = (h_{jA}, h_{jB})_t. \quad (2)$$

R_j ($j=S, R$) – матриці резистивних опорів

$$R_j = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2r_{jA} + r_{jA} & r_{jC} - r_{jB} \\ r_{jC} - r_{jA} & 2r_{jB} + r_{jC} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

причому, r_{jA} , r_{jB} , r_{jC} – резистивні опори окремих фаз статора і ротора.

Компоненти фаз C у (2) опущені. Їх легко знайти за першим законом Кірхгофа:

$$h_C = -h_A - h_B. \quad (4)$$

У випадку симетрії опорів матриця (3) перетворюється у скаляр. Короткозамкнений ротор двигуна автоматично характеризується симетрією його опорів.

Повні потокозчеплення обмоток Ψ_j умовно подамо сумою

$$\Psi_j = L_{\sigma j} I_j + w_j \Phi_k, \quad j = S, R; \quad k = A, B, \quad (5)$$

де $L_{\sigma j}$ – індуктивність дисипації (розсіяння) вітки, w_j – кількість витків обмотки, Φ_k – магнітний потік k -ї фази.

Перший доданок у правій частині (5) відповідає потокозчепленню дисипації, а другий – робочому потокозчепленню.

Струми віток знаходимо, розв'язавши (5) стосовно струму

$$I_S = \alpha_S (\Psi_S - w_S \Phi_S); \quad I_R = \alpha_R (\Psi_R - w_R \Phi_R), \quad (6)$$

де α_S, α_R – обернені індуктивності розсіяння фаз обмоток статора і ротора, Φ_S, Φ_R – колонки робочих потоків.

$$\Phi_j (j = S, R) = (\Phi_{jA}, \Phi_{jB})_i. \quad (7)$$

Введемо у розгляд колонки основних потокозчеплень:

$$\Psi_S = w_S \Phi_S; \quad \Psi'_R = w_S \Phi_R. \quad (8)$$

Згідно з (8) рівняння (6) набувають остаточного вигляду

$$I_S = \alpha_S (\Psi_S - \Psi_S); \quad I'_R = \alpha'_R (\Psi'_R - \Psi'_R). \quad (9)$$

Щоб система (1), (9) стала повною, потрібно знати колонки основних потокозчеплень (8). Це досягається використанням рівнянь стану магнітопроводу

$$\Psi_m = \Psi_m (I_m). \quad (10)$$

Проекції векторів Ψ_m та i_m на координатні вісі розглядаються як відповідні компоненти. Певним вибором осей координат A, B можна спростити рівняння електромеханічного стану асинхронної машини. Тоді скориставшись матрицями перетворення [3] отримаємо:

$$\Pi = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\sin(\gamma - 120^\circ) & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \sin(\gamma + 120^\circ) \end{bmatrix};$$

$$\Pi^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sin(\gamma + 120^\circ) & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & -\sin(\gamma - 120^\circ) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

де γ – кут повороту ротора машини.

Зв'язок фазних і перетворених змінних такий:

$$h_n = \Pi h_\phi; \quad h_\phi = \Pi^{-1} h_n. \quad (12)$$

Матриці кругових частот обертання обмоток статора і ротора мають вигляд

$$\Omega_j = \Pi_j \frac{d\Pi_j^{-1}}{dt}, \quad j = S, R. \quad (13)$$

Здійснивши математичні дії у (13), отримаємо [1]

$$\Omega_j = \omega_j \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Застосування фазних координат характерне для асиметрії кола статора. Тоді кутові швидкості обертання координатних осей такі: $\omega_S = 0, \omega_R = -\omega$ [2, 3].

Матриці кутової частоти обертання статора і ротора згідно із (11), (14):

$$\Omega_S = 0; \quad \Omega_R = \frac{\omega}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Тепер розглянемо рівняння стану магнітопроводу.

Компоненти намагнічуючого струму будуть проекціями вектора i_m на осі A і B :

$$I_A = I_m \cos \alpha; \quad I_B = I_m \cos(\alpha - 120^\circ), \quad (16)$$

або

$$I_A = \frac{2}{3} \sum_k I_k \cos \alpha_{kx} = I_{SA} + I_{Rx}; \quad (17)$$

$$I_B = \frac{2}{3} \sum_k I_k \cos \alpha_{kz} = I_{SB} + I_{Rz}.$$

Компоненти колонок (10) подібно до (16) знаходимо як проекції вектора Ψ_m на координатні осі A і B

$$\Psi_A = \Psi_{SA} = \Psi_{Rx} = \Psi_m \cos \alpha; \quad (18)$$

$$\Psi_B = \Psi_{SB} = \Psi_{Rz} = \Psi_m \cos(\alpha - 120^\circ).$$

Виключаючи тригонометричні функції із (16), (17), (18), отримуємо

$$I_A = \tau \Psi_A; \quad I_B = \tau \Psi_B, \quad (19)$$

де τ – статичний питомий магнітний опір,

який визначаємо з кривої намагнічування (10)

$$\tau = \frac{I_m}{\Psi_m} = \tau(I_m). \quad (20)$$

Модуль струму намагнічування набуває вигляду

$$I_m = 2\sqrt{\frac{I_A^2 + I_A I_B + I_B^2}{3}}, \quad (21)$$

де $I_A = I_{SA} + I_{RA}$; $I_B = I_{SB} + I_{RB}$. (22)

Ураховуючи (12), (19) співвідношення (21), (22) можна записати у матричному вигляді

$$I_m = \tau \Psi_S = I_S + \Pi I_R. \quad (23)$$

За відомою колонкою основних потокозчеплень обмотки статора знаходимо колонку основних потокозчеплень обмотки ротора

$$\Psi_R = \Pi^{-1} \Psi_S. \quad (24)$$

Співвідношення (1), (6), (23), (24) утворюють N -модель асинхронної машини у фізичних координатах. Такою моделлю зручно користуватись, якщо диференціальні рівняння електромеханічного стану є жорсткими.

Продиференціюємо вираз (23) за часом

$$\frac{d\tau}{dt} \Psi_S + \tau \frac{d\Psi_S}{dt} = \frac{dI_S}{dt} + \Pi \frac{dI_R}{dt} + \frac{d\Pi}{dt} I_R. \quad (25)$$

Диференціюючи (20) за Ψ_m , отримаємо

$$\frac{d\tau}{d\Psi_m} = \frac{\rho - \tau}{\Psi_m}, \quad (26)$$

де ρ – диференціальний питомий магнітний опір, що визначається з (10)

$$\rho = \frac{dI_m}{d\Psi_m} = \rho(I_m). \quad (27)$$

У випадку ненасиченої магнітної системи машини $\rho = \tau$.

Скориставшись співвідношенням (25), похідну $d\tau/dt$ розпишемо як повну

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial \tau}{\partial \Psi_m} \left(\frac{\partial \Psi_m}{\partial \Psi_A} \cdot \frac{\partial \Psi_A}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_m}{\partial \Psi_B} \cdot \frac{\partial \Psi_B}{\partial t} \right). \quad (28)$$

Модуль основного потокозчеплення за аналогією до (21)

$$\Psi_m = 2\sqrt{\frac{\Psi_A^2 + \Psi_A \Psi_B + \Psi_B^2}{3}}. \quad (29)$$

Диференціюючи (29) згідно (19), (20), отримаємо

$$\frac{d\Psi_m}{d\Psi_A} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2I_A + I_B}{I_m}, \quad \frac{d\Psi_m}{d\Psi_B} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2I_B + I_A}{I_m}. \quad (30)$$

Диференціюючи за часом (6) і підставляючи в отриманий результат (1) з урахуванням $\omega_S = 0$, отримуємо

$$\begin{cases} \frac{dI_S}{dt} = \alpha_S \left(U_S - R_S I_S - \frac{d\Psi}{dt} \right); \\ \frac{dI_R}{dt} = \alpha_R \left(U_R - R_R I_R - \frac{d\Psi}{dt} \right). \end{cases} \quad (31)$$

Підставляючи (24) у (9) і диференціюючи результат, отримаємо:

$$\frac{dI_S}{dt} = \alpha_S \left(\frac{d\Psi_S}{dt} - \frac{d\Psi_S}{dt} \right); \quad (32)$$

$$\frac{dI_R}{dt} = \alpha_R \left(\frac{d\Psi_R}{dt} - \Pi^{-1} \frac{d\Psi_S}{dt} \right) - \alpha_R \frac{d\Pi^{-1}}{dt} \Psi_S.$$

Підставляючи (1), (26), (28), (30), (33) у (25), отримуємо

$$M \frac{d\Psi_S}{dt} = \alpha_S (U_S - R_S I_S) + \quad (33)$$

$$+ \alpha_R \Pi (U_R - R_R I_R) + \alpha_R \Pi \frac{d\Pi^{-1}}{dt} \Psi_S,$$

де M – матриця зв'язку приростів основних і повних потокозчеплень

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_S + \frac{2\rho - \tau}{3} \frac{2I_A^2 + I_A I_B}{I_m^2} & \frac{2}{3} (\rho - \tau) \frac{2I_A I_B + I_A^2}{I_m^2} \\ \frac{2}{3} (\rho - \tau) \frac{2I_A I_B + I_B^2}{I_m^2} & \alpha_S + \frac{2\rho - \tau}{3} \frac{2I_B^2 + I_A I_B}{I_m^2} \end{pmatrix}, \quad (34)$$

$$\text{де } \alpha = \tau + \alpha_S + \alpha_R. \quad (35)$$

Похідна $d\tau/dt$ у (25) задається виразами (26), (28), (30).

Приводячи (33) до нормальної форми Коші, отримуємо

$$\frac{d\Psi_S}{dt} = G_S (U_S - R_S I_S) + \quad (36)$$

$$+ G_R (U_R G_0 + \Omega_R \Psi_R - R_R I_R) + G_0,$$

де G_S, G_R – матриці зв'язку робочих і повних потокозчеплень:

$$G_S = \alpha_S G; \quad G_R = \alpha_R G \Pi, \quad G_0 = \alpha_R G \Omega_R \Psi_S. \quad (37)$$

$$\text{де } G = \begin{pmatrix} T + b_A I_A & b_B I_A \\ b_A I_B & T + b_B I_B \end{pmatrix}, \quad (38)$$

$$b_A = b(2I_A + I_B); \quad b_B = b(I_A + 2I_B); \quad b = \frac{2(R-T)}{3I_m^2}. \quad (39)$$

Підставляючи (1) у (32) з урахуванням (36) отримуємо диференціальні рівняння асинхронної машини у фізичних координатах

$$\frac{dI_S}{dt} = A_S(U_S - R_S I_S) + A_{SR}(\Omega_R \Psi_R - R_R I_R) + A_{S0}; \quad (40)$$

$$\frac{dI_R}{dt} = A_{RS}(U_S - R_S I_S) + A_R(\Omega_R \Psi_R - R_R I_R) + A_{R0},$$

$$A_S = \alpha_S(1 - G_S); \quad A_{SR} = -\alpha_S G_R;$$

$$A_{RS} = -\alpha_R \Pi^{-1} G_S; \quad A_R = \alpha_R(1 - \Pi^{-1} G_R); \quad (41)$$

$$A_{R0} = -\alpha_R \left(\Pi^{-1} G_0 - \frac{d\Pi}{dt} \Psi_S \right); \quad A_{S0} = -\alpha_S G_R.$$

До рівнянь електромеханічного стану слід додати рівняння механічного руху ротора

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{p_0}{J}(M_E - M); \quad \frac{d\gamma}{dt} = \omega, \quad (42)$$

де p_0 – число пар магнітних полюсів машини; J – момент інерції ротора; M_E – електромагнітний момент; M – механічний момент; γ – кут повороту ротора в радіанах.

Вираз для моменту M_E взято з праці [3]

$$M_E = \sqrt{3} p_0 (I_{Rz} I_{SB} - I_{Rz} I_{SA}) / \tau. \quad (43)$$

Співвідношення (1), (6), (40), (42) утворюють повну систему алгебродиференціальних рівнянь електромагнітного стану або А-модель асинхронної машини у координатах.

Для практичного використання даної моделі необхідно знати резистивні опори обмоток статора і ротора R_S, R_R , обернені індуктивності дисипації α_S, α_R обмоток, криву намагнічування (10), момент інерції J , кількість пар магнітних полюсів p_0 , напругу обмотки статора U_S , і механічний момент на валу ротора M .

Найпростішим з чисельних методів інтегрування диференціальних рівнянь є метод Ейлера. Він ґрунтується на заміні шуканої функції многочленом першого степеня, тобто на лінійній екстраполяції [4].

Розглянемо диференціальне рівняння (40) стосовно струмів обмоток машин з нульовими початковими умовами:

$$\frac{di}{dt} = f(i, t), \quad i(t_0) = i^{(0)} = 0 \quad A, \quad (44)$$

для якого існує розв'язок в інтервалі $[a, b]$.

На інтервалі часу $[t_k, t_{k+1}]$ функцію струму i апроксимуємо поліномом

$$i(t) = \Pi_{k,n}(t) = \sum_{l=0}^n a_l (t - t_{k-1})^l, \quad k, n = 0, 1, \dots, \quad (45)$$

де n – порядок апроксимуючого полінома.

Отже,

$$\frac{di}{dt} = \sum_{l=1}^n k a_l (t - t_{k-1})^{l-1}. \quad (46)$$

У випадку однокрокових методів коефіцієнти a_l визначаються з умови збігу значень полінома $\Pi_{k,n}(t)$ і функції $i(t)$ у момент часу t_m і t_{m-1} , а також з рівності відповідних $n-1$ похідних при t_{m-1} :

$$a_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k} x(t) \Big|_{t=t_{k-1}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (47)$$

$$a_n = \left(i_k - \sum_{l=0}^{n-1} a_l h^l \right) h^{-n}, \quad (48)$$

де $i_k = i(t_k)$, $h = t_k - t_{k-1}$ – крок дискретизації.

Підставивши (47) у (46) при $t=t_k$, отримуємо

$$\frac{di}{dt} \Big|_{t=t_k} = a_n i_k + b_n, \quad (49)$$

$$a_n = \frac{n}{h}, \quad b_n = -\frac{n}{h} i_{k-1} - \sum_{l=1}^{n-1} \frac{n-l}{l!} \cdot h^{l-1} \frac{d^l i(t)}{dt^l} \Big|_{t=t_{k-1}}.$$

Підставляючи похідну (49) у (44) при $t=t_k$, отримуємо формулу однокрокових ($n=1$) неявних різницевих схем

$$a_n i_k + b_n = f(i_k, t_k). \quad (50)$$

Отже, отримуємо схему неявного методу Ейлера

$$i_k = i_{k-1} + h \cdot f(i_k, t_k), \quad (51)$$

яка на кожному кроці вимагає розв'язання нелінійного рівняння відносно i_k . Ця задача ще більше ускладнюється для систем нелінійних диференціальних рівнянь.

Результати числового моделювання

Як приклад реалізації моделі проаналізуємо несиметричний режим роботи асинхрон-

ного двигуна, а саме, обрив фази статора. За основу візьмемо паспортні дані трифазного асинхронного двигуна з короткозамкненим ротором.

Номинальна напруга обмотки статора $U_{ном}=380/220$ В, номинальна потужність на валу $P_{ном}=1500$ Вт, момент інерції $J=0,04$ кг·м², опори обмоток статора і ротора: $R_S=7,32$ Ом, $R_R=4$ Ом, кількість пар полюсів $p_0=2$, обернені індуктивності розсіяння обмоток статора і ротора: $\alpha_S=71,4$ Гн⁻¹, $\alpha_R=11,1$ Гн⁻¹, основна обернена індуктивність розсіяння $\alpha_m=2,7$ Гн⁻¹, коефіцієнт корисної дії $\eta=0,9$, коефіцієнт потужності $\cos\varphi=0,9$, номинальна швидкість обертання ротора $n_{ном}=1450$ об/хв.

Інтегрування диференціальних рівнянь електромеханічного стану системи здійснено саме неявним методом Ейлера враховуючи "жорсткість" диференціальних рівнянь. Явними методами такий стан роботи машини проаналізувати неможливо, виникає, так звана, числова нестійкість інтегрування.

Для розрахунку перехідного процесу використано професійну мову програмування *VisualFORTRAN*. Поряд з цією мовою програмування використано пакет *GRAPHER* для ілюстрації одновимірних графічних залежностей.

Здійснено холостий пуск мотора до установлені швидкості з механічним моментом на валу, що становить $M_{мех}=1$ Нм.

На рис. 1 наведено кутову швидкість обертання валу ротора мотора як функцію часу. Час входу в усталений процес – 1 с. Тут же спостерігається незначне перерегулювання швидкості (до 30 об/хв), що є можливим у реальних машинах. У момент часу $t=1,5$ с навантаження на валу мотора збільшується до $M_{мех}=8$ Нм. При цьому його швидкість зменшується до значення, близького до номинальної, а саме до 1454 об/хв протягом часу $t \in [1,5 \div 2,5]$ с. У момент часу $t=2,5$ с імітується обрив фази А статора двигуна. Моделювання обриву фази здійснюється класичним способом [2] – введенням у фазу високого опору, наприклад, $R_{SA}=1$ МОм. У цей момент часу диференціальні рівняння

електромеханічного стану машини стають жорсткими, внаслідок великого розкиду власних чисел (опорів фаз статора) матриці Якобі. Трифазний двигун працює у двофазному режимі, швидкість обертання при цьому зменшується до 1250 об/хв.

На рис. 2 наведено перехідний струм у фазі двигуна де стався обрив. Амплітудне значення струму при ввімкненні становить 11 А. Струм холостого ходу, що відповідає проміжку $t \in [1,0 \div 1,5]$ с становить $I_{хх} \approx 0,5$ А. Номинальний струм фази двигуна, розрахований за паспортними даними становить 2,8 А. Із результатів інтегрування на проміжку часу $t \in [1,5 \div 2,5]$ с, що відповідає номинальному стану роботи двигуна, маємо $I_{ном} \approx 2,6$ А.

На рис. 3 наведено часову залежність електромагнітного моменту мотора. Пусковий момент становить $M_n \approx 18$ Нм. У двофазному режимі момент є пульсуючим додатним.

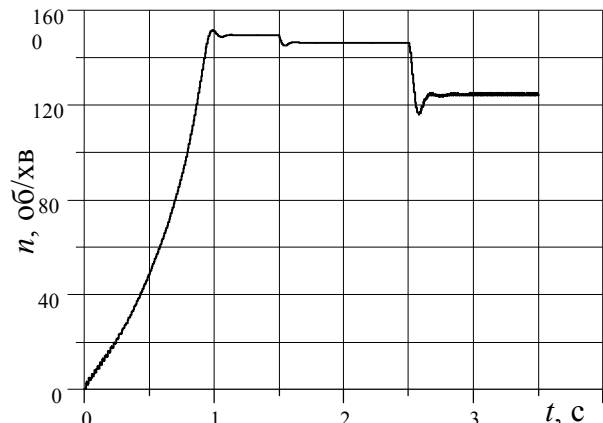


Рис.1. Кутова швидкість обертання мотора.

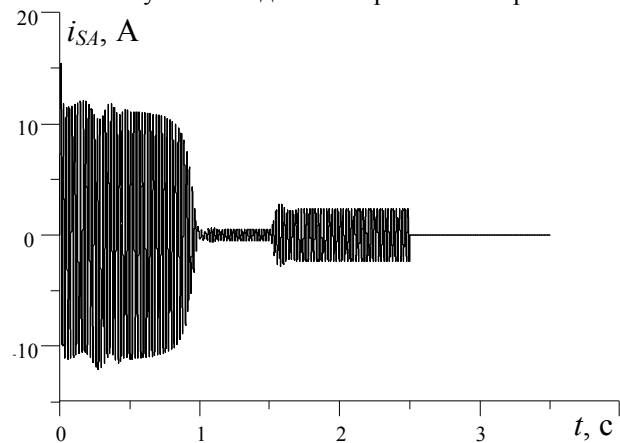


Рис.2. Перехідний струм фази А обмотки статора.

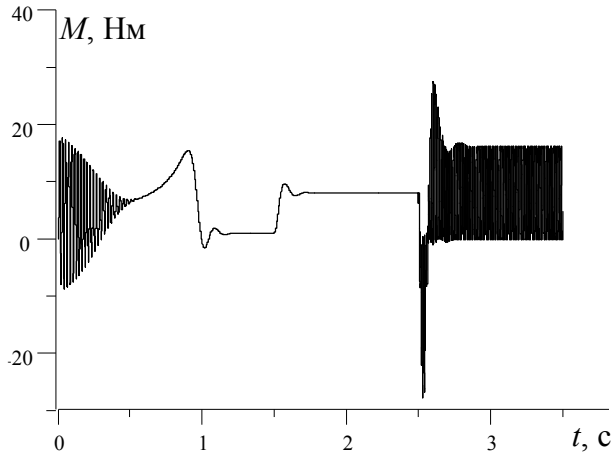


Рис.3. Перехідний електромагнітний момент мотора.

Висновки

Запропонована математична модель асинхронної машини дозволяє відтворювати всі можливі аварійні й несиметричні стани і напевно придатна для аналізу перехідних процесів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Беспалов В.Я., Моцинский Ю.А., Петров А.П. Математическая модель асинхронного двигателя в обобщенной ортогональной системе координат // Электричество. – 2002. – № 8. – С. 33-39.
2. Мартынов В.А. Математическая модель несимметричных переходных процессов электрических машин // Электричество. – 2006. – № 12. – С. 40-45.
3. Чабан В., Лишук В. Математична модель вузла живлення асинхронних машин. – Луцьк. РВВ ЛНТУ, 2011. – 116 с.
4. Чабан В. Чисельні методи. – Львів: В-во Нац. у-ту "Львівська політехніка", 2001. – 186 с.
5. Чабан А. Особливості Ψ - та A -моделей асинхронного мотора у фазних координатах // Електротехніка і електромеханіка. – 2005. – № 4. – С. 37-40.