УДК 519.876.5

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕЧІЇ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ ЗА УМОВИ НАЯВНОСТІ ВІДТОКУ ЧЕРЕЗ ГРАНИЦЮ ОБЛАСТІ ТА ПЕРЕПАДУ ТИСКУ

А.П. Олійник, Л.О. Штаєр

ІФНТУНГ, 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел.(03422) 48000,
e-mail: lida.shtayer@gmail.com

Розглянуто задачу моделювання течії в'язкої рідини поверхнею пластини за умови зміни тиску згідно з лінійним законом по поздовжній координаті. Здійснено постановку граничних умов задачі. Знайдено точний розв'язок системи рівнянь Нав'є-Стокса в задачі обтікання пластини з відбором рідини за наявності поздовжнього перепаду тиску. Одержано розрахункові формули для визначення профілю швидкості, проаналізовано граничні випадки з метою виявлення узгодженості різних моделей , виявлено умови, які накладаються на тиск, при яких система Нав'є-Стокса має точний розв'язок. Результати роботи можуть бути використані при теоретичному обґрунтуванні методів виявлення витоків рідин із трубопроводів.

Ключові слова: система рівнянь Нав'є-Стокса, точний розв'язок, обтікання пластини, витоки рідини

Рассмотрена задача моделирования течения вязкой жидкости по поверхности пластины при условии изменения давления по линейному закону вдоль продольной координаты. Осуществлена постановка граничных условий задачи. Найдено точное решение системы уравнений Навье-Стокса в задаче обтекания пластины с отбором жидкости при наличии продольного перепада давления. Получены расчетные формулы для определения профиля скорости, проанализированы предельные случаи с целью выявления согласованности разных моделей, обнаружены условия, налагаемые на давление, при которых система Навье-Стокса имеет точное решение. Результаты работы могут быть использованы при теоретическом обосновании методов обнаружения утечек жидкости из трубопроводов.

Ключевые слова: система уравнений Навье-Стокса, точное решение, обтекание пластины, утечка жидкости

The problem of viscous fluid flow modeling over the plate surface under the condition of pressure changes according to linear law along the longitudinal coordinate has been considered. The boundary conditions for the problem have been given. The Navier-Stokes equations system exact solution has been found for the fluid outflow streamlined plate with the longitudinal pressure drop. The formula to determine the velocity profile has been received, the limit moments have been analyzed the aim to investigate the consistency between different models, the conditions to find the exact solution of Navier-Stokes equations system have been defined. The results of this research work could be used for the theoretical substantiation of the methods used for the definition of pipelines liquid leakage.

Keywords: Navier-Stokes equation's system, exact solution, streamlined plate, liquid leakage

При вирішенні задачі виявлення місця розташування витоків з трубопроводів використовуються різні теоретичні підходи, що базуються на одновимірних моделях [1]. В той же час існує клас задач динаміки в'язкої рідини, які допускають точні аналітичні розв'язки і можуть бути розглянуті як модельні задачі для підтвердження достовірності широкого класу експериментальних та теоретичних методів. При цьому можна розглянути задачі більшої розмірності з метою деталізації поведінки системи за наявності витоків.

В роботі [2] розглядається точний розв'язок задачі обтікання пластини з відтоком рідини через поверхню при умові, що тиск рідини залишається сталим ($p = const$). В той же час ця умова послаблює достовірність моделі в тому випадку, коли відбір рідини здійснюється за наявності перепаду тиску вздовж пластини. В такому випадку виникає наступна задача: розв'язати систему рівнянь Нав'є-Стокса в двовимірній постановці для знаходження компонент $\vec{V}(u,\upsilon)$ вектора швидкості для рідини з кінематичною в'язкістю ν , густиною ρ та тиском p :

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right); \\ u\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}+\upsilon\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}\right); \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y}=0, \end{cases} \quad (1)$$

з граничними умовами:

$$\begin{cases} u=0,\ \ \upsilon=-V_0 \ \text{при}\ \ y=0; \\ u\to U_\infty \ \ \text{при}\ \ y\to\infty, \end{cases} \quad (2)$$

де: V_0 – швидкість відтоку рідини; U_∞ – швидкість потоку на достатній відстані від поверхні пластини.

Вважатимемо, що, на відміну від існуючої моделі [2], тиск є функцією поздовжньої координати: $p = p(x)$, і, зокрема, враховуючи відомі результати [1]:

$$p = kx + p_0 , \quad (3)$$

тобто, має місце лінійний перепад тиску (для діючих трубопроводів, як правило, $k < 0$).

Як і у випадку $p = const$, для системи (1) в такій постановці розв'язок можна шукати у вигляді:

$$u = u(y),\ \upsilon = -V_0;\ \ p = kx + p_0, \qquad (4)$$

де p_0 та k – відомі величини.

В такому випадку система (1) може бути записана у вигляді єдиного рівняння:

$$-V_0 u' = -\frac{k}{\rho} + \nu u'', \qquad (5)$$

оскільки при умовах (4) в системі (1) друге та третє рівняння задовольняються тотожно, перше рівняння записується у вигляді (5).

Рівняння (5) записується у вигляді:

$$u' + \frac{V_0}{\nu} u = \frac{k}{\nu\rho} y + C_1. \qquad (6)$$

Рівняння (6) є неоднорідним рівнянням, яке розв'язується методом варіації сталих: однорідне рівняння

$$u' + \frac{V_0}{\nu} u = 0$$

має розв'язок

$$u = C_2 e^{-\frac{V_0}{\nu} y}. \qquad (7)$$

Залежність (7) подається у вигляді:

$$u = C_2(y) e^{-\frac{V_0}{\nu} y}, \qquad (8)$$

підставляючи (8) у (6), одержуємо таке рівняння:

$$C_2'(y) = \frac{k}{\nu\rho} y e^{\frac{V_0}{\nu} y} + C_1 e^{\frac{V_0}{\nu} y}. \qquad (9)$$

Інтегрування (9) дозволяє одержати залежність:

$$C_2(y) = \frac{ky}{\rho V_0} e^{\frac{V_0}{\nu} y} - \frac{k\nu}{\rho V_0^2} e^{\frac{V_0}{\nu} y} + C_1 \frac{\nu}{V_0} e^{\frac{V_0}{\nu} y} + C_2, \qquad (10)$$

підставляючи (10) в (8) одержуємо:

$$u(y) = \frac{ky}{\rho V_0} - \frac{k\nu}{\rho V_0^2} + C_1 \frac{\nu}{V_0} + C_2 e^{-\frac{V_0}{\nu} y}. \qquad (11)$$

Слід зазначити, що задання граничних умов у вигляді (2), що є характерним для задачі про обтікання пластини в'язкою рідиною з відбором речовини через поверхню, вступає в протиріччя з лінійним доданком у формулі (11). Потрібно розглянути інший тип граничних умов, модифікувавши умови (2). Необхідно знайти коефіцієнти C_1 та C_2 виходячи з граничних умов (2). Виникає питання, яким чином задовольнити другу умову (2), якщо в (11) є доданок, що лінійно залежить від y, а, отже, границі при $y \to \infty$ не існує. З цією метою граничні умови (2) можуть бути записані у такому вигляді:

$$\begin{cases} u = 0, \quad \upsilon = -V_0 \ \text{ при } \ y = 0; \\ u = U_\infty \quad \text{ при } \ y = L, \end{cases} \qquad (12)$$

де: U_∞ – швидкість незбуреного потоку; величина L визначається, наприклад, з розв'язку вказаної задачі при $p = const$ для різних тисків рідини та газу: вибирається таке значення $y = L$, при якому швидкість u мало відрізняється від U_∞. В такому випадку для знаходження коефіцієнтів C_1 та C_2 одержується система:

$$\begin{cases} C_1 \dfrac{\nu}{V_0} + C_2 = \dfrac{k\nu}{\rho V_0^2}; \\ C_1 \dfrac{\nu}{V_0} + C_2 e^{-\frac{V_0}{\nu} L} = \dfrac{k\nu}{\rho V_0^2} - \dfrac{kL}{\rho V_0} + U_\infty, \end{cases} \qquad (13)$$

розв'язавши яку одержуємо:

$$C_1 = \frac{k}{\rho V_0} - \frac{kL - U_\infty \rho V_0^{\,2}}{\rho V_0 \nu \left(1 - e^{-\frac{V_0}{\nu} L}\right)};$$

$$C_2 = \frac{kL - U_\infty \rho V_0^{\,2}}{\rho V_0^{\,2} \left(1 - e^{-\frac{V_0}{\nu} L}\right)}. \qquad (14)$$

Підставляючи (14) в (11), одержуємо:

$$u(y) = \frac{ky}{\rho V_0} - \frac{k\nu}{\rho V_0^2} + \left(\frac{k}{\rho V_0} - \frac{kL - U_\infty \rho V_0^{\,2}}{\rho V_0 \nu \left(1 - e^{-\frac{V_0}{\nu} L}\right)} \right) \times$$

$$\times \frac{\nu}{V_0} + \frac{kL - U_\infty \rho V_0^{\,2}}{\rho V_0^{\,2} \left(1 - e^{-\frac{V_0}{\nu} L}\right)} e^{-\frac{V_0}{\nu} y}. \qquad (15)$$

Одержаний результат є досить важливим з теоретичної точки зору, оскільки фактично, одержаний точний розв'язок системи рівнянь Нав'є-Стокса. Певним обмеженням одержаного розв'язку є те, що замість загальних і достатньо очевидних граничних умов, записаних у формі (2), використовується форма задання граничних умов (12), які використовуються при вирішенні практичної інженерної задачі. Необхідно перевірити наступні факти: чи збігатиметься профіль (15) з відомим результатом для задачі при умові сталості тиску рідини. Очевидно, для цього треба в формулі (15) розглянути випадок $k = 0$. Крім того, розв'язок задачі за допущень (4), на відміну від розв'язку задачі за умови $p = const$, містить два додаткових параметри: густину ρ рідини, що обтікає пластину, та величину k, яка характеризує лінійний перепад тиску вздовж лінійної координати. Ця величина визначається експериментально.

При $k = 0$ залежність (15) набуває вигляду

$$u(y) = \frac{U_\infty \left(1 - e^{-\frac{V_0}{\nu} y}\right)}{1 - e^{-\frac{V_0}{\nu} L}}, \qquad (16)$$

що збігається з результатами [2] при $p = const$ з точністю до множника A:

$$A = 1 - e^{-\frac{V_0}{\nu} L} = 1 - \frac{1}{e^{\frac{V_0}{\nu} L}}. \qquad (17)$$

Як показано в роботі [2], формула (16), в якій знаменник рівний одиниці, є розв'язком задачі про течію в'язкої рідини по пластині зі сталим відбором рідини. Водночас, проведені розрахунки показують, що величина $1 - e^{-\frac{V_0}{\nu} L}$ стає близькою до одиниці для реальних газів, що транспортуються трубопроводом при $L = 20$ см від поверхні, а для рідин – при $L = 1 - 2$ см, тому допущення (12) відповідає реальній фізичній картині процесу.

Очевидно, задавши V_0 та ν можна знайти величину L, за якої значення A мало відрізняється від одиниці:

$$L = \frac{\nu}{V_0} ln\left(\frac{1}{1 - A}\right). \qquad (18)$$

Висновки

Проаналізувавши одержані результати в представленій роботі і в роботах [1, 2], можна зауважити, що при розв'язанні задач, пов'язаних з визначенням місця витоку рідини та оцінки їх інтенсивності, часто фігурують залежності виду:

$$f(x) = Ce^{-x} = \frac{C}{e^x}.$$

Це породжує певні проблеми при оцінці відповідних величин, оскільки має місце момент, пов'язаний з поняттям рівномірної неперервності функцій [4]. Наприклад, між двома точками: $x_1 = \ln n$ та $x_2 = \ln Mn$, де $M >> 1$, відстань між якими:

$$x_2 - x_1 = \ln Mn - \ln n = \ln M > 1,$$

різниця в значеннях функції:

$$\left| f(x_2) - f(x_1) \right| = \left| \frac{C}{Mn} - \frac{C}{n} \right| = C\left| \frac{1 - M}{Mn} \right|$$

прямує до нуля при достатньо великих значеннях n, тобто ідентифікація місця витоку пов'язана з певними труднощами.

При використанні залежності (15) можна описати розподіл повздовжньої компоненти швидкості при обтіканні пластини з відбором рідини або газу за наявності перепаду тиску вздовж пластини, що дозволяє вивчити поведінку різних речовин при обтіканні пластини за таких умов. З теоретичної точки зору, одержані результати є точним розв'язком двовимірної стаціонарної системи рівнянь Нав'є-Стокса, причому проведеним аналізом встановлено, що випадок (3) є єдиним, коли при умові $p \neq const$ можна одержати точний розв'язок системи (1): якщо $p = p(x)$, то друге і третє рівняння (1) задовольняються тотожно, а перше записується у вигляді:

$$-V_0 \frac{du}{dy} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{d^2 u}{dy^2}. \qquad (19)$$

Записуючи (19) у вигляді:

$$\nu \frac{d^2 u}{dy^2} + V_0 \frac{du}{dy} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}, \qquad (20)$$

можна зробити наступний висновок: рівність (20) має місце лише в тому випадку, коли:

$$\nu \frac{d^2 u}{dy^2} + V_0 \frac{du}{dy} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = const, \qquad (21)$$

оскільки величина $\nu \frac{d^2 u}{dy^2} + V_0 \frac{du}{dy}$ є функцією невідомої y, тоді як $\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$ є функцією невідомої x. Очевидно, в такому випадку має бути виконана умова (21), тобто, тиск повинен задовольняти умові (3). Таким чином, подальші дослідження можуть бути пов'язані з встановленням величин k в (3) та ρ в (1), вивченням поведінки розв'язку (15) для різних типів речовин [3].

Література

1 Щербаков С.Г. Проблемы трубопроводного транспорта нефти и газа / С. Г. Щербаков. – М.: Наука, 1982. – 206 с.

2 Шкадов В.Я. Течение вязкой жидкости / В. Я. Шкадов, З. Д. Запрянов. – М.: Из-во Моск. ун-та, 1984. – 200 с.

3 Заміховський Л.М. Дослідження впливу частоти генерування тестових сигналів на максимальну відстань виявлення витоків з трубопроводів / Л.М. Заміховський, Л.О. Штаєр, В.А. Ровінський // Методи та прилади контролю якості. – 2010. – № 25. – С. 60-66.

4 Зорич В.А. Математический анализ / В.А. Зорич. – М.: Наука, 1981. – Т. 1. – 544 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 08.07.11

Рекомендована до друку професором ***М.І. Горбійчуком***