УДК 621.314.57

М.С. Сегеда, д-р техн. наук, проф.,
Є.В. Черемних, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
Т.А. Мазур

Національний університет „Львівська політехніка“, м. Львів, Україна, e-mail: mseheda@ukr.net

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ НАПРУГИ В ОБМОТКАХ ТРАНСФОРМАТОРІВ З УРАХУВАННЯМ ВЗАЄМОІНДУКЦІЇ МІЖ ВИТКАМИ ПІД ЧАС ІМПУЛЬСНИХ ПЕРЕНАПРУГ

M.S. Seheda, Dr. Sci. (Tech.), Professor,
Ye.V. Cheremnykh, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor,
T.A. Mazur

Lviv Politechnic National University, Lviv, Ukraine, e-mail: mseheda@ukr.net

MATHEMATICAL MODELING OF FREE VOLTAGE OSCILLATIONS ON TRANSFORMER WINDINGS TAKING INTO ACCOUNT WINDS MUTUAL INDUCTION UNDER SURGE OVERVOLTAGE

Мета. Формування математичної моделі для дослідження хвильових процесів в обмотках трансформаторів з урахуванням взаємоіндукції між витками та розв’язання отриманих інтегрально-диференційних рівнянь у часткових похідних.

Методика. Математична модель трансформатора отримана на підставі заступної схеми обмотки на одиницю довжини вздовж її осі з урахуванням струмів спливу між витками, відносно землі та взаємоіндукції між витками. Для розв’язання інтегрально-диференційних рівнянь запропоновано метод розділення змінних. Початкові умови визначаються на підставі алгоритму розрахунку усталеного режиму електричних кіл. Граничні умови визначаються із розв’язання рівнянь стану, що описують початок та кінець заступної схеми.

Результати. Запропонована математична модель дозволяє досліджувати хвильові процеси в обмотках трансформаторів з урахуванням усіх параметрів заступної схеми. Під час дослідження хвильових процесів в обмотках трансформаторів необхідно враховувати співвідношення між інтервалом часу поширення електромагнітних хвиль уздовж усієї довжини обмотки та інтервалом часу, упродовж якого струм і напруга змінюються значніше від повної їх зміни у процесі, що розглядається. Коливання напруги у витку виникає з частотою, що відповідає всій обмотці, так і з власною частотою витка. Власні коливання характеризуються високими частотами й майже повністю затухають. Ці коливання залежать від індуктивних і ємнісних зв’язків в обмотці.

Наукова новизна. Полягає в новому підході щодо формування математичної моделі, яка враховує розподіл параметрів і дозволяє здійснювати розрахунки імпульсних перенапруг з урахуванням усіх параметрів заступної схеми та розв’язані отриманих інтегрально-диференційних рівнянь методом розділення змінних.

Практична значимість. Надійність ізоляції трансформаторів під час імпульсних перенапруг має визначальне значення та залежить від правильної її координації. Ізоляція високовольтних трансформаторів повинна забезпечувати їх безаварійну роботу як під час довготривалої дії напруги, так і під час короткотривалих зовнішніх і внутрішніх перенапруг. Розроблення математичних моделей для дослідження хвильових процесів у трансформаторах, з урахуванням цих факторів, є актуальним. Ізоляція обмоток трансформатора істотно впливає на його розміри, вартість та вагу, збільшує реактивний опір, тим самим зменшує його пропускну здатність.

Ключові слова: *математичне моделювання, імпульсна перенапруга, взаємоіндукція, обмотка трансформатора, хвильовий процес, часткові похідні, початкові умови, граничні умови*

Вступ. Для вибору ізоляції обмотки трансформаторів та схем захисту трансформаторів від перенапруг необхідно знати максимальні значення напруг по відношенню до землі окремих частин обмоток трансформаторів, а також значення напруг між витками обмотки і обмотками під час імпульсних перенапруг з урахуванням усіх параметрів заступної схеми. Для отримання таких результатів використовується математичне моделювання, так як для великих трансформаторів виготовлення таких моделей у натуральну величину є дорогим і недоцільним.

Протікання хвильових процесів в обмотках трансформаторів залежить від часу, геометричних розмірів обмотки, питомого опору матеріалу обмотки, діелектричних постійних ізоляції, магнітної проникності сталі та форми імпульсу на початку обмотки.

Постановка задачі. Рівняння в часткових похідних, що описують хвильові процеси в обмотках трансформаторів з урахуванням взаємоіндукції між витками [1–5] для невідомих $i(x,\,t)$, $u(x,\,t)$, $0<x<l$, $t>0$, утворюють таку систему

$$-\frac{\partial i(x,\,t)}{\partial x}=g_0u(x,\,t)+C_0\frac{\partial u(x,\,t)}{\partial t}-C_{M_0}\frac{\partial^3 u(x,\,t)}{\partial x^2\partial t};\quad (1)$$

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=r_0 i(x,t)+\int_0^l M(x,s)\frac{\partial i(s,t)}{\partial t}ds \qquad (2)$$

з початковими умовами

$$i\big|_{t=0}=\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=0 \qquad (3)$$

і граничними умовами

$$L_n\frac{\partial i(0,t)}{\partial t}-u(0,t)=f(t); \qquad (4)$$

$$L_k\frac{\partial i(l,t)}{\partial t}=u(l,t). \qquad (5)$$

Зведення до задачі з однорідними граничними умовами. Позначимо

$$h(t)=i(0,t),\;\; g(t)=i(l,t). \qquad (6)$$

Згідно з (4) – (5)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial i(l,t)}{\partial t}=\frac{1}{L_k}u(l,t)=\frac{dg(t)}{dt};\\&\frac{\partial i(0,t)}{\partial t}=\frac{1}{L_n}\left[u(0,t)+f(t)\right]=\frac{dh(t)}{dt}.\end{aligned} \qquad (7)$$

Введемо невідому функцію $v(x,t)$ співвідношенням

$$i(x,t)=v(x,t)+\frac{x}{l}g(t)+\frac{l-x}{l}h(t). \qquad (8)$$

Підставляючи разом з

$$\frac{\partial i(s,t)}{\partial t}=\frac{\partial v(s,t)}{\partial t}+\frac{x}{l}\frac{dg(t)}{dt}+\frac{l-x}{l}\frac{dh(t)}{dt}$$

в (1) – (2), одержимо

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}=g_0u(x,t)+C_0\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-C_{M_0}\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2\partial t}+F_0(t);\\&-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=r_0v(x,t)+\int_0^l M(x,s)\frac{\partial v(s,t)}{\partial t}ds+F_1(x,t),\end{aligned} \qquad (9)$$

де

$$F_0(t)=\frac{1}{l}(g(t)-h(t)); \qquad (10)$$

$$\begin{aligned}&F_1(x,t)=r_0\frac{x}{l}g(t)+r_0\frac{l-x}{l}h(t)+\\&+\frac{1}{l}\frac{dg(t)}{dt}\int_0^l sM(x,s)ds+\frac{1}{l}\frac{dh(t)}{dt}\int_0^l (l-s)M(x,s)ds.\end{aligned} \qquad (11)$$

Із рівностей (3) і (6) випливає

$$h(0)=\frac{dh(t)}{dt}\bigg|_{t=0}=g(0)=\frac{dg(t)}{dt}\bigg|_{t=0}=0,$$

а з (3), (8) одержуємо початкові умови

$$v(x,t)\big|_{t=0}=\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=0. \qquad (12)$$

Підстановка $x=0$ чи $x=l$ у (8), з урахуванням (6), дає

$$v(0,t)=v(l,t)=0, \qquad (13)$$

тобто однорідні граничні рівняння для системи (9).

Рівняння для функції $v(x,t)$ **.**

Диференціювання за x першого рівняння системи (9), а також значення за $x=0$ дає систему

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0}=\\&=\left[g_0u(x,t)+C_0\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-C_{M_0}\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2\partial t}+F_0(t)\right]\Big|_{x=0};\end{aligned} \qquad (14)$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}=-g_0\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-C_0\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\partial t}+\\&+C_{M_0}\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^3\partial t};\end{aligned} \qquad (15)$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=-r_0v(x,t)-\int_0^l M(x,s)\frac{\partial v(s,t)}{\partial t}ds-\\&-F_1(x,t),\end{aligned} \qquad (16)$$

що еквівалентна системі (9).

Підставляючи

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

з (16) у (15), отримуємо

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}=g_0\left[r_0v(x,t)+\int_0^l M(x,s)\frac{\partial v(s,t)}{\partial t}ds+F_1(x,t)\right]+$$

$$+C_0\left[r_0\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}+\int_0^l M(x,s)\frac{\partial^2 v(s,t)}{\partial t^2}ds+\frac{\partial F_1(x,t)}{\partial t}\right]-$$

$$-C_{M_0}\left[r_0\frac{\partial^3 v(x,t)}{\partial x^2\partial t}+\int_0^l\frac{\partial^2 M(x,s)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v(s,t)}{\partial t^2}ds+\frac{\partial^3 F_1(x,t)}{\partial x^2\partial t}\right]$$

чи

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[v(x,t)+C_{M_0}r_0\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right]-(g_0r_0v(x,t)+C_0r_0\frac{\partial v(x,t)}{\partial t})= \\ =\int_0^l\left[g_0M(x,s)\frac{\partial v(s,t)}{\partial t}+M_1(x,s)\frac{\partial^2 v(s,t)}{\partial t^2}\right]ds+F(x,t), \quad (17)$$

де (див. (11))

$$M_1(x,s)=C_0M(x,s)-C_{M_0}\frac{\partial^2 M(x,s)}{\partial x^2}; \quad (17')$$

$$F(x,t)=g_0F_1(x,t)+C_0\frac{\partial F_1(x,t)}{\partial t}-C_{M_0}\frac{\partial^3 F_1(x,t)}{\partial x^2\partial t}. \quad (18)$$

Розділення змінних. Представимо функцію $v(x,t)$ рядом Фур'є

$$v(x,t)=\sum_n T_n(t)\sin(\frac{\pi nx}{l}),\ x\in(0,l). \quad (19)$$

Розглянемо вираз із правої частини рівняння (17)

$$I=\int_0^l\left[g_0M(x,s)\frac{\partial v(s,t)}{\partial t}+M_1(x,s)\frac{\partial^2 v(s,t)}{\partial t^2}\right]ds= \\ =\sum_k\left[\begin{array}{l}\frac{dT_k(t)}{dt}\int_0^l g_0M(x,s)\sin(\frac{\pi ks}{l})ds+ \\ +\frac{d^2T_k(t)}{dt^2}\int_0^l M_1(x,s)\sin(\frac{\pi ks}{l})ds\end{array}\right].$$

Представимо інтеграли рядами Фур'є

$$\int_0^l g_0M(x,s)\sin(\frac{\pi ks}{l})ds=\sum_n\widetilde{B}_{nk}\sin(\frac{\pi nx}{l});$$

$$\int_0^l M_1(x,s)\sin(\frac{\pi ks}{l})ds=\sum_n A_{nk}\sin(\frac{\pi nx}{l}),$$

де

$$\widetilde{B}_{nk}=\frac{1}{l}\int_0^l\int_0^l g_0M(x,s)\sin(\frac{\pi ks}{l})\sin(\frac{\pi nx}{l})dsdx;$$

$$A_{nk}=\frac{1}{l}\int_0^l\int_0^l M_1(x,s)\sin(\frac{\pi ks}{l})\sin(\frac{\pi nx}{l})dsdx;\ k=1,2,..., \quad (19')$$

тоді

$$I=\sum_n\left[\sum_k(A_{nk}\frac{d^2T_k(t)}{dt^2}+\widetilde{B}_{nk}\frac{dT_k(t)}{dt})\right]\sin(\frac{\pi nx}{l}).$$

Підставляючи (19), вираз I, а також розклад

$$F(x,t)=\sum_n F_n(t)\sin(\frac{\pi nx}{l}),$$

де

$$F_n(t)=\frac{1}{l}\int_0^l F(x,t)\sin(\frac{\pi nx}{l})dx\ , \quad (20)$$

у рівняння (17), одержуємо

$$-\frac{\pi^2n^2}{l^2}(T_n(t)+C_{M_0}r_0\frac{dT_n(t)}{dt})-(g_0r_0T_n(t)+ \\ +C_0r_0\frac{dT_n(t)}{dt})=\sum_k(A_{nk}\frac{d^2T_k(t)}{dt^2}+\widetilde{B}_{nk}\frac{dT_k(t)}{dt})+ \\ +F_n(t), \quad (21)$$

де $n=1,2,...$

Згідно з (12), (19) одержимо умови

$$T_k(0)=\left.\frac{dT_k(t)}{dt}\right|_{t=0}=0,\ k=1,2,...\ .$$

Зауважимо, що функції $F_1(x,t)$, $F(x,t)$ (див. (11), (18)) залежать від невідомих функцій $h(t)$, $g(t)$. Отже функції $v(x,t)$, $i(x,t)$ визначатимуться функціями $h(t)$, $g(t)$. Побудуємо систему рівнянь для визначення функцій $h(t)$, $g(t)$. Першим рівнянням системи є рівняння (14), де використовується представлення (16) і умови (7).

Представлення (16) і умови (17) визначають також друге рівняння системи, а саме

$$\int_0^l\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}dx=u(l,t)-u(0,t). \quad (22)$$

Отримавши функцію $h(t)$, $g(t)$ як розв'язок побудованої системи, знаходимо $v(x,t)$ і потім (див (16))

$$u(x,t)=u(0,t)+\int_0^x\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}dx=u(0,t)- \\ -\int_0^x\left[r_0v(x,t)+\int_0^l M(x,s)\frac{\partial v(s,t)}{\partial t}ds+F_1(x,t)\right]dx. \quad (23)$$

Система рівнянь для функції $T_k(t)$. Розглядаємо наближений розв'язок задачі (1), що виникає за обмеження в системі (21) N рівняннями та N невідомими функціями $T_1(t), T_2(t), ..., T_N(t)$.

Позначення $u(x,t)$, $v(x,t)$ зберігаємо без зміни.

Для зручності використовуємо простір R^N, його елементи позначаємо $\theta, \sigma, ...$, скалярний добуток має вигляд $\vec{\theta}\cdot\vec{\tilde{\theta}}=\sum_{i=1}^{N}\theta_i\tilde{\theta}_i$. Елементи простору R^{2N} позначимо через $\vec{Q}(t), \vec{W}(t), \vec{W}1^i$, ... Елементи простору R^N записуємо у векторній формі, тобто (див. (19), (20))

$$\vec{\theta}(t)=(T_1(t),\, T_2(t),\, ...,\, T_N(t))_t;$$

$$\vec{\sigma}(x)=(\sin(\frac{\pi x}{l}),\, \sin(\frac{\pi 2x}{l}),\, ...,\, \sin(\frac{\pi Nx}{l}))_t; \qquad (24)$$

$$\vec{\tilde{\varphi}}(t)=(F_1(t),\, F_2(t),\, ...,\, F_N(t))_t,$$

тоді (19) запишемо так

$$v(x,t)=\vec{\theta}(t)\cdot\vec{\sigma}(x). \qquad (24')$$

Розглянемо систему (21)

$$\sum_{k=1}^{N}(A_{nk}\frac{d^2T_k(t)}{dt^2}+B_{nk}\frac{dT_k(t)}{dt})+(\frac{\pi^2n^2}{l^2}C_{M_0}r_0+$$
$$+C_0r_0)\frac{dT_n(t)}{dt}+(\frac{\pi^2n^2}{l^2}+g_0r_0)T_n(t)+F_n(t)=0,$$

де

$$B_{nk}=\begin{cases}\tilde{B}_{nk}+\dfrac{\pi^2n^2}{l^2}C_{M_0}r_0+C_0r_0, & k=n\\ \tilde{B}_{nk}, & k\neq n\end{cases};\ n=1,...,N.$$

Введемо матриці A, B і D розмірністю $N\times N$, де

$$D=diag(\frac{\pi^2n^2}{l^2}+g_0r_0).$$

Система (21) приймає вигляд

$$\begin{aligned}&A\frac{d^2\vec{\theta}(t)}{dt^2}+B\frac{d\vec{\theta}(t)}{dt}+D\vec{\theta}(t)+\vec{\tilde{\varphi}}(t)=0;\\ &\vec{\theta}(0)=\frac{d\vec{\theta}(t)}{dt}=0.\end{aligned} \qquad (25)$$

1) Випадок $\det A=0$**.** Позначимо через $r=rankA$ ранг матриці A. Використовуючи метод Гауса, матрицю коефіцієнтів A системи (25) зводимо до такого вигляду, де елементи нижче діагоналі дорівнюють нулю і останні $N-r$ рядків складено з нулів, а саме

$$\left.\begin{matrix}a'_{11}\frac{d^2T_1(t)}{dt^2}+a'_{12}\frac{d^2T_2(t)}{dt^2}+a'_{13}\frac{d^2T_3(t)}{dt^2}+\cdots+a'_{1r}\frac{d^2T_r(t)}{dt^2}+\cdots+a'_{1N}\frac{d^2T_N(t)}{dt^2}\\ a'_{22}\frac{d^2T_2(t)}{dt^2}+a'_{23}\frac{d^2T_3(t)}{dt^2}+\cdots+a'_{2r}\frac{d^2T_r(t)}{dt^2}+\cdots+a'_{2N}\frac{d^2T_N(t)}{dt^2}\\ \vdots\quad\cdots\quad\vdots\quad\cdots\quad\vdots\\ a'_{rr}\frac{d^2T_r(t)}{dt^2}+\cdots+a'_{rN}\frac{d^2T_N(t)}{dt^2}\end{matrix}\right\}r$$
$$\left.\begin{matrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\end{matrix}\right\}N-r$$

де $a'_{kk}\neq 0$, $k=1, .., r$. Введемо замість функції

$$T_1(t),\, T_2(t),\, ..,\, T_N(t)$$

невідомі функції $Y_1(t), Y_2(t), .., Y_N(t)$ заміною

$$\begin{Vmatrix}a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} & a'_{15} & \cdots & a'_{1r} & a'_{1r+1} & a'_{1r+2} & \cdots & a'_{1N}\\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & a'_{25} & \cdots & a'_{2r} & a'_{2r+1} & a'_{1r+2} & \cdots & a'_{2N}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a'_{rr} & a'_{rr+1} & a'_{rr+2} & \cdots & a'_{rN}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{Vmatrix}\times \qquad (26)$$
$$\times(T_1(t),\, T_2(t),\, T_3(t),\, T_4(t),\, T_5(t),\, ...,\, T_r(t),\, T_{r+1}(t),\, T_{r+2}(t),\, ...,\, T_N(t))_t=$$
$$=(y_1(t),\, y_2(t),\, ...,\, y_r(t),\, y_{r+1}(t),\, y_{r+2}(t),\, ...,\, y_N(t))_t,$$

де

$$\det A'\neq 0;\quad A'=(a'_{kn})^r_{k,n=1}.$$

Розв'язавши систему лінійних алгебраїчних рівнянь (26) і подаючи $T_1(t), T_2(t), .., T_N(t)$ лінійними комбінаціями функцій $Y_1(t), Y_2(t), .., Y_N(t)$, зводимо систему диференційних рівнянь (25), тобто систему (21), до вигляду

$$\begin{aligned}&\frac{d^2Y_1(t)}{dt^2}+P_1(t, Y_1, Y_2, ..., Y_N, \frac{dY_1(t)}{dt}, \frac{dY_2(t)}{dt}, ..., \frac{dY_N(t)}{dt})=0;\\ &\frac{d^2Y_2(t)}{dt^2}+P_2(t, Y_1, Y_2, ..., Y_N, \frac{dY_1(t)}{dt}, \frac{dY_2(t)}{dt} ..., \frac{dY_N(t)}{dt})=0;\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\ &\frac{d^2Y_r(t)}{dt^2}+P_r(t, Y_1, Y_2, ..., Y_N, \frac{dY_1(t)}{dt}, \frac{dY_2(t)}{dt}, ..., \frac{dY_N(t)}{dt})=0;\\ &P_{r+1}(t, Y_1, Y_2, ..., Y_N, \frac{dY_1(t)}{dt}, \frac{dY_2(t)}{dt}, ..., \frac{dY_N(t)}{dt})=0;\\ &P_{r+2}(t, Y_1, Y_2, ..., Y_N, \frac{dY_1(t)}{dt}, \frac{dY_2(t)}{dt}, ..., \frac{dY_N(t)}{dt})=0;\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\ &P_N(t, Y_1, Y_2, ..., Y_N, \frac{dY_1(t)}{dt}, \frac{dY_2(t)}{dt}, ..., \frac{dY_N(t)}{dt})=0,\end{aligned} \qquad (27)$$

де матриця коефіцієнтів біля других похідних є одиничною. Це означає випадок рівняння (25), де $\det A \neq 0$. Відповідний розв'язок наведено далі в (29) і (32). Розв'язавши перші r рівнянь, подаємо $Y_1(t), Y_2(t), ..., Y_r(t)$ та їх похідних через $Y_{r+1}(t), Y_{r+2}(t), ..., Y_N(t)$ та їх похідних, інші $N-r$ рівнянь тоді утворюють систему рівнянь 1-го порядку для функції $Y_{r+1}(t), Y_{r+2}(t),..., Y_N(t)$.

Приклад.

Нехай $N=3$, $M_1(x,s)=\mu_1(x)\mu_2(x)$, тоді, згідно з (17′), (19′), $A_{nk}=a_n b_k$, $n, k=1, 2, 3,$ тобто

$$A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix};\ \det A=0.$$

Заміна (26) очевидно має вигляд

$$\begin{cases} b_1T_1(t)+b_2T_2(t)+b_3T_3(t)=Y_1(t) \\ T_2(t)=Y_2(t) \\ T_3(t)=Y_3(t) \end{cases}.$$

2) Випадок $\det A \neq 0$. Обернена матриця A^{-1} існує, тоді систему рівнянь (25) можна записати так (див. (24))

$$\frac{d^2\vec{\theta}(t)}{dt^2}=-A^{-1}B\frac{d\vec{\theta}(t)}{dt}-A^{-1}D\vec{\theta}(t)-A^{-1}\vec{\tilde{\varphi}}(t). \quad (28)$$

Введемо позначення (див. (24))

$$\vec{p}(t)=\vec{\theta}(t);\ \vec{q}(t)=\frac{d\vec{\theta}(t)}{dt}$$

і в просторі R^{2N} введемо вектор розмірністю $2N$, а саме

$$\vec{Q}(t)=\begin{pmatrix} \vec{p}(t) \\ \vec{q}(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \vec{\theta}(t) \\ \dfrac{d\vec{\theta}(t)}{dt} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Так як

$$\begin{pmatrix} \vec{p}(t) \\ \vec{q}(t) \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} \dfrac{d\vec{\theta}(t)}{dt} \\ \dfrac{d^2\vec{\theta}(t)}{dt^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \vec{q}(t) \\ -A^{-1}B\vec{q}(t))-A^{-1}D\vec{p}(t)-A^{-1}\vec{\tilde{\varphi}}(t) \end{pmatrix},$$

то, позначивши

$$H=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -A^{-1}D & -A^{-1}B \end{pmatrix};\ \vec{W}(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ -A^{-1}\vec{\tilde{\varphi}}(t) \end{pmatrix}, \quad (30)$$

одержимо (28) у вигляді

$$\frac{d\vec{Q}(t)}{dt}=H\vec{Q}(t)+\vec{W}(t);\ \vec{Q}(0)=0. \quad (31)$$

Шукаємо $\vec{Q}_0(t)$ так, що $\vec{Q}(t)=e^{tH}\vec{Q}_0(t)$, підстановка в (31) дає $e^{tH}\dfrac{d\vec{Q}_0(t)}{dt}=\vec{W}(t)$, $\vec{Q}(0)=0$.

Звідки

$$\vec{Q}_0(t)=\int_0^t e^{-\tau H}\vec{W}(\tau)d\tau$$

і, отже,

$$\vec{Q}(t)=e^{tH}\int_0^t e^{-\tau H}\vec{W}(\tau)d\tau. \quad (32)$$

Позначимо через $P_1:\ R^{2N}\to R^N$ оператор проектування $2N-$вектора на першу компоненту, тобто у прямій сумі $R^{2N}=R^N\oplus R^N$ маємо представлення

$$P_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Згідно з (29), маємо

$$\vec{\theta}(t)=P_1\vec{Q}(t). \quad (33)$$

Вираз (32) містить $2N-$вектор $\vec{W}(t)$ (див.(30)), залежний від $\vec{\tilde{\varphi}}(t)=(F_1(t), F_2(t), ..., F_N(t))_t$, де, згідно з (20), (18), (11), маємо представлення компонент векторів через функції $g(t)$, $h(t)$.

Представлення розв'язків $u(x,t)$***,*** $v(x,t)$ ***через функції*** $g(t)$***,*** $h(t)$***.***

Визначимо скалярні функції

$$\alpha_0(x), \alpha_1(x), \alpha_2(x), \beta_0(x), \beta_1(x), \beta_2(x)$$

рівністю (див. (11), (18)).

$$F(x,t)=\sum_{i=0}^{2}(\alpha_i(x)g^{(i)}(t)+\beta_i(x)h^{(i)}(t)). \quad (34)$$

Тоді, згідно з (20)

$$F_n(t)=\frac{1}{l}\int_0^l F(x,t)\sin(\frac{\pi nx}{l})dx$$

і згідно з (24)

$$\vec{\tilde{\varphi}}(t) = (F_1(t),\, F_1(t),\, ...,\, F_N(t))_t =$$
$$= \frac{1}{l}\int_0^l F(x,\,t)(\sin(\frac{\pi x}{l}),\, \sin(\frac{2\pi x}{l}),\, ...,\, \sin(\frac{N\pi x}{l}))_t\, dx =$$
$$= \frac{1}{l}\int_0^l F(x,\,t)\vec{\sigma}(x)dx.$$

В отримане рівняння підставимо (34), отримаємо

$$\vec{\tilde{\varphi}}(t) = \sum_{i=0}^{2}(g^{(i)}(t)\vec{\varphi}_i + h^{(i)}(t)\vec{\psi}_i),$$

де

$$\vec{\varphi}_i = \frac{1}{l}\int_0^l \alpha_i(x)\vec{\sigma}(x)dx;\;\; \vec{\psi}_i = \frac{1}{l}\int_0^l \beta_i(x)\vec{\sigma}(x)dx;\; \text{які} \in R^N.$$

Введемо позначення

$$\vec{W}1^i = (0,\, -A^{-1}\vec{\varphi}_i)_t;\;\; \vec{W}2^i = (0,\, -A^{-1}\vec{\psi}_i)_t,\; \text{які} \in R^{2N}.$$

Тоді, згідно з (30)

$$\vec{W}(t) = \sum_{i=0}^{2}(g^{(i)}(t)\vec{W}1^i + h^{(i)}(t)\vec{W}2^i). \qquad (34')$$

Підставимо (34′) в (32), отримаємо

$$\vec{Q}(t) = \sum_{i=0}^{2} e^{tH}\int_0^t e^{-\tau H}(g^{(i)}(\tau)\vec{W}1^i + h^{(i)}(\tau)\vec{W}2^i)d\tau. \qquad (35)$$

Інтегрування частинами дає ($g(0) = \left.\frac{dg(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$)

$$\int_0^t e^{-\tau H}\frac{dg(\tau)}{d\tau}d\tau = e^{-tH}g(t) + H\int_0^t e^{-\tau H}g(\tau)d\tau;$$
$$\int_0^t e^{-\tau H}\frac{d^2g(\tau)}{d\tau^2}d\tau = e^{-tH}(\frac{dg(t)}{dt} + Hg(t)) + H^2\int_0^t e^{-\tau H}g(\tau)d\tau.$$

Застосуємо оператори

$$e^{tH}\int_0^t e^{-\tau H}g(\tau)d\tau;$$
$$e^{tH}\int_0^t e^{-\tau H}\frac{dg(\tau)}{d\tau}d\tau = g(t) + e^{tH}H\int_0^t e^{-\tau H}g(\tau)d\tau;$$
$$e^{tH}\int_0^t e^{-\tau H}\frac{d^2g(\tau)}{d\tau^2}d\tau = \frac{g(t)}{dt} + Hg(t) + e^{tH}H^2\int_0^t e^{-\tau H}g(\tau)d\tau$$

до векторів $\vec{W}1^i$ і оператори

$$e^{tH}\int_0^t e^{-\tau H}h(\tau)d\tau;$$
$$e^{tH}\int_0^t e^{-\tau H}\frac{dh(\tau)}{dt}d\tau = h(t) + e^{tH}H\int_0^t e^{-\tau H}h(\tau)d\tau;$$
$$e^{tH}\int_0^t e^{-\tau H}\frac{d^2h(\tau)}{dt^2}d\tau = \frac{dh(t)}{dt} + Hh(t) + e^{tH}H^2\int_0^t e^{-\tau H}h(\tau)d\tau$$

до векторів $\vec{W}2^i$.

Підставляючи отримані вирази в (35), отримуємо

$$\vec{Q}(t) = \frac{g(t)}{dt}\vec{\hat{W}}1^2 + g(t)\vec{\hat{W}}1^1 + e^{tH}\int_0^t e^{-\tau H}g(\tau)d\tau\cdot\vec{\hat{W}}1^0 +$$
$$+\frac{dh(t)}{dt}\vec{\hat{W}}2^2 + h(t)\vec{\hat{W}}2^1 + e^{tH}\int_0^t e^{-\tau H}h(\tau)d\tau\cdot\vec{\hat{W}}2^0, \qquad (36)$$

де

$$\vec{\hat{W}}1^0 = \vec{W}1^0 + H\vec{W}1^1 + H^2\vec{W}1^2;$$
$$\vec{\hat{W}}1^1 = \vec{W}1^1 + H\vec{W}1^2;$$
$$\vec{\hat{W}}1^2 = \vec{W}1^2; \qquad (37)$$
$$\vec{\hat{W}}2^0 = \vec{W}2^0 + H\vec{W}2^1 + H^2\vec{W}2^2;$$
$$\vec{\hat{W}}2^1 = \vec{W}2^1 + H\vec{W}2^2;\;\; \vec{\hat{W}}2^2 = \vec{W}2^2.$$

Згідно з (24′) і (33)

$$v(x,\,t) = \vec{\theta}(t)\cdot\vec{\sigma}(x)) = P_1\vec{Q}(t)\cdot\vec{\sigma}(x)). \qquad (37')$$

Підставляючи в (37′) вираз (36), отримуємо

$$v(x,\,t) = c_0(x)g(t) + \int_0^t K(t,\,x,\,\tau)g(\tau)d\tau +$$
$$+ d_0(x)h(t) + \int_0^t L(t,\,x,\,\tau)h(\tau)d\tau, \qquad (38)$$

де $c_0(x) = P_1\vec{\hat{W}}1^1\cdot\vec{\sigma}(x);\;\; d_0(x) = P_1\vec{\hat{W}}2^1\cdot\vec{\sigma}(x);$

$$K(t,\,x,\,\tau) = P_1e^{(t-\tau)H}\vec{\hat{W}}1^0\cdot\vec{\sigma}(x); \qquad (39)$$
$$L(t,\,x,\,\tau) = P_1e^{(t-\tau)H}\vec{\hat{W}}2^1\cdot\vec{\sigma}(x).$$

У (39) враховано, що

$$P_1\vec{\hat{W}}1^2 = P_1\vec{W}1^2 = 0;\; P_1\vec{\hat{W}}2^2 = P_1\vec{W}2^2 = 0. \qquad (40)$$

Розглянемо рівняння (23). Згідно з (11), введемо функції $\vec{a}_i$ та b_i $(i = 0,\,1)$ рівністю

$$\int_0^x F_1(y,t)dy = a_0(x)g(t) + a_1(x)\frac{dg(t)}{dt} + b_0(x)h(t) + \\ + b_1(x)\frac{dh(t)}{dt}. \tag{41}$$

Згідно з (7), $u(0,t) = L_n \frac{dh(t)}{dt} - f(t)$ рівняння (23) запишеться так

$$u(x,t) = L_n\frac{dh(t)}{dt} - f(t) - (a_0(x)g(t) + a_1(x)\frac{dg(t)}{dt} + \\ + b_0(x)h(t) + b_1(x)\frac{dh(t)}{dt}) - r_0\int_0^x v(y,t)dy - \\ - \int_0^x\int_0^l M(y,s)\frac{\partial v(s,t)}{\partial t}dsdy. \tag{42}$$

Згідно з (37')

$$\int_0^x v(y,t)dy = P_1\vec{Q}(t)\cdot\vec{\sigma}_1(x), \tag{43}$$

де $\vec{\sigma}_1(x) = \int_0^x \vec{\sigma}(y)dy.$

Зауважимо, що з означення $\vec{W}(t)$ (формула (30)) випливає, що $P_1\vec{W}(t) \equiv 0,$ тому (формула (31))

$$P_1\frac{d\vec{Q}(t)}{dt} = P_1 HQ(t). \tag{44}$$

Згідно з (37′)

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = P_1\frac{d\vec{Q}(t)}{dt}\cdot\vec{\sigma}(x),$$

тому

$$\int_0^x\int_0^l M(y,s)\frac{\partial v(s,t)}{\partial t}dsdy \equiv P_1\frac{d\vec{Q}(t)}{dt}\cdot\vec{\sigma}_M(x),$$

де $\vec{\sigma}_M(x) = \int_0^x\int_0^l M(y,s)\vec{\sigma}(s)dsdy.$

Підстановка в (42) дає (див. формулу (44))

$$u(x,t) = L_n\frac{dh(t)}{dt} - f(t) - (a_0(x)g(t) + a_1(x)\frac{dg(t)}{dt} + \\ + b_0(x)h(t) + b_1(x)\frac{dh(t)}{dt}) - r_0 P_1\vec{Q}(t)\cdot\vec{\sigma}_1(x) - \\ - P_1 H\vec{Q}(t)\cdot\vec{\sigma}_M(x). \tag{45}$$

Зауважимо, що вираз $P_1\vec{Q}(t)$, на відміну від $\vec{Q}(t)$ (див. формулу (36)), не містить похідних $\frac{dg(t)}{dt}$ та $\frac{dh(t)}{dt}$ (див. формулу (40)), тобто

$$P_1\vec{Q}(t) = g(t)P_1\vec{\hat{W}}1^1 + h(t)P_1\vec{\hat{W}}2^1 + \\ + P_1 e^{tH}\int_0^t e^{-\tau H}g(\tau)d\tau\cdot\vec{\hat{W}}1^0 + P_1 e^{tH}\int_0^t e^{-\tau H}h(\tau)d\tau\cdot\vec{\hat{W}}2^0. \tag{46}$$

Система рівнянь для функцій $g(t)$ ***та*** $h(t)$. Згідно з (7), $u(l,t) = L_к\frac{dg(t)}{dt}$ і, підставляючи $x = l$ у рівність (45), одержуємо (див. також формулу (44))

$$L_к\frac{dg(t)}{dt} = L_n\frac{dh(t)}{dt} - f(t) - (a_0(l)g(t) + a_1(l)\frac{dg(t)}{dt} + \\ + b_0(l)h(t) + b_1(l)\frac{dh(t)}{dt}) - r_0 P_1\vec{Q}(t)\cdot\vec{\sigma}_1(l) - \\ - P_1\frac{d\vec{Q}(t)}{dt}\cdot\vec{\sigma}_M(l).$$

Інтегруючи в інтервалі $[0;t]$ і враховуючи $h(0) = g(0) = 0,\ \vec{Q}(0) = 0$, отримуємо

$$L_к g(t) = L_n h(t) - \int_0^t (a_0(l)g(\tau) - b_0(l)h(\tau))d\tau - \\ - \int_0^t f(\tau)d\tau - (a_1(l)g(t) + b_1(l)h(t)) - \\ - r_0\int_0^t (P_1\vec{Q}(\tau)\cdot\vec{\sigma}_1(l)d\tau - P_1\vec{Q}(t)\cdot\vec{\sigma}_M(l)). \tag{47}$$

Розглянемо рівняння (14). Згідно з (37′)

$$\left.\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = P_1\vec{Q}(t)\cdot\frac{d\sigma(0)}{dx}.$$

Далі (див. (3) – (4) і (45))

$$u(x,t)\Big|_{\substack{x=0\\t=0}} = -f(0);\quad \left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|_{t=0} = 0$$

і, інтегруючи (14) в інтервалі $[0;t]$, одержуємо

$$-\int_0^t (P_1\vec{Q}(t)\cdot\frac{d\sigma(0)}{dx})d\tau = g_0\int_0^t u(0,\tau)d\tau + C_0(u(0,t) + f(0)) - \\ - C_{M_0}\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} + \int_0^t F_0(\tau)d\tau.$$

Так як $u(0,t)=L_n\dfrac{dh(t)}{dt}-f(t)$, згідно з (45), (10), одержуємо

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^t (P_1\vec{Q}(t)\cdot\frac{d\sigma(0)}{dx}d\tau = g_0h(t)-g_0\int_0^t f(\tau)d\tau+\\
&+C_0(L_n\frac{dh(t)}{dt}-f(t)+f(0))+\\
&+C_{M_0}(\frac{d^2a_0(0)}{dx^2}g(t)+\frac{d^2a_1(0)}{dx^2}\frac{dg(t)}{dt}+\\
&+\frac{d^2b_0(0)}{dx^2}h(t)+\frac{d^2b_1(0)}{dx^2}\frac{dh(t)}{dt})+r_0P_1\vec{Q}(t)\cdot\frac{d^2\sigma_1(0)}{dx^2}-\\
&-P_1H\vec{Q}(t)\cdot\frac{d^2\sigma_M(0)}{dx^2})+\frac{1}{l}\int_0^t(g(\tau)-h(\tau))d\tau.
\end{aligned}
\tag{48}
$$

Враховуючи (36) і інтегруючи рівняння (48) в інтервалі $[0;t]$, одержуємо разом з (47) систему двох лінійних рівнянь, що містять $g(t)$, $h(t)$ та інтегральні перетворення від них. Розв'язавши ці рівняння, відновлюємо $v(x,t)$ згідно з (38), $u(x,t)$ згідно з (45).

Для розв'язання системи отриманих інтегральних рівнянь достатньо використати метод послідовних наближень.

Висновки. Запропоновані математична модель, розв'язання інтегрально-диференційних рівнянь методом розділення змінних, дозволяють досліджувати хвильові процеси в обмотках трансформаторів з урахуванням усіх параметрів заступної схеми. Такі дослідження необхідні для правильного вибору ізоляційних проміжків на стадії проектування, співставляючи діючу та допустиму напруги на різних ізоляційних проміжках.

Список літератури / References

1 Математичне моделювання в електроенергетиці: Підручник / О.В. Кириленко, М.С. Сегеда, О.Ф. Буткевич, Т.А. Мазур – Львів, 2010. – 608 с.

Kyrylenko, O.V., Seheda, M.S., Butkevych, O.F. and Mazur, T.A. (2010), *Matematycne modeliuvannia v elektroenerhetytsi* [Mathematical Modeling In Electric Power Engineering], Lviv, Uraine.

2. Сегеда М.С. Математичне моделювання хвильових процесів у трансформаторах / Сегеда М.С. // Техн. електродинаміка. – 2002. – №3. – С. 47–49.

Seheda, M.S. (2002), "Mathematical Modeling of Wave Processes in Transformers", *Tekhnicha elektrodynamika*, no.3, pp. 47–49.

3. Seheda, M.S. and Mazur, T.A. (2008), "modeling of electromagnetic processes in transformers with considering of distributed parameters", *Proc. of the 6th Sci. and Tech. Conf. "Sieci elektroenergetyczne w przemysle i energetyce"*, SIECI 2008, Szklarska Poreba, Poland, pp. 415–424.

4. Seheda, M.S., Mazur, T.A. and Chutora, I. (2011), "Analysis of overvoltages in transformer windings with considering of distributed parameters", *Proc. of the 12th International Workshop "Computational Problems of Elektrical Engineering"*, CPEE'2011, Kostryna, pp. 47.

5. Seheda, M.S., Cheremnykh, Y. and Mazur, T.A. (2012), "Mathematical modeling of free voltage oscillations in the transformer windings during pulse overvoltages", *Proc. of the 7th Sci. and Tech. Conf. "Sieci elektroenergetyczne w przemysle i energetyce"*, SIECI 2012, September 19–21, Szklarska Poreba, Poland, ISBN: 978-83-935801-0-1.

Цель. Формирование математической модели для исследования волновых процессов в обмотках трансформаторов с учетом взаимоиндукции между витками и решение полученных интегрально-дифференциальных уравнений в частных производных.

Методика. Математическая модель трансформатора получена на основании схемы замещения обмотки на единицу длины вдоль ее оси, с учетом токов утечки между витками, относительно земли и взаимоиндукции между витками. Для решения интегрально-дифференциальных уравнений предложен метод разделения переменных. Начальные условия определяются на основании алгоритма расчета установившегося режима электрических цепей. Граничные условия определяются из решения уравнений состояния, которые описывают начало и конец схемы замещения.

Результаты. Предложенная математическая модель позволяет исследовать волновые процессы в обмотках трансформаторов с учетом всех параметров схемы замещения. При исследовании волновых процессов в обмотках трансформаторов необходимо учитывать соотношения между интервалом времени распространения электромагнитных волн вдоль всей длины обмотки и интервалом времени, в продолжение которого ток и напряжение изменяются больше от полного их изменения в рассматриваемом процессе. Колебание напряжения в витке возникает с частотой, которая относится ко всей обмотке, так и с собственной частотой витка. Собственные колебания характеризуются высокими частотами и почти полностью затухают. Эти колебания зависят от индуктивных и емкостных связей обмотки.

Научная новизна. Научная новизна состоит в новом подходе к формированию математической модели, которая учитывает распределенность параметров и позволяет осуществлять расчеты импульсных перенапряжений с учетом всех параметров схемы замещения, и решении полученных интегрально-дифференциальных уравнений методом разделения переменных.

Практическая значимость. Надежность изоляции трансформаторов во время импульсных перенапряжений имеет определяющее значение и зависит от правильной ее координации. Изоляция высоковольтных трансформаторов должна обеспечивать их безаварийную работу как во время длительного действия напряжения, так и во время кратковременных внешних и внутренних перенапряжений. Разработка математических моделей для исследования волновых процессов в трансформаторах, с учетом этих факторов, является актуальной. Изоляция обмоток трансформаторов су-

щественно влияет на размеры, стоимость и его вес, увеличивает реактивное сопротивление, тем самым уменьшает его пропускную способность.

Ключевые слова: *математическое моделирование, импульсное перенапряжение, взаимоиндукция, обмотка трансформатора, волновой процесс, частные производные, начальные условия, граничные условия*

Purpose. To create a mathematical model for study of wave processes in the transformer windings with mutual induction between their coils and the solution of integral-differential equations in partial derivatives.

Methodology. The mathematical model of the transformer has been obtained on the basis of the equivalent circuit of its winding per unit length along its axis with considering of the leakage currents between coils relatively to the ground and mutual induction between their coils. For solving the integral-differential equations the method of separation of variables has been proposed. The initial conditions have been determined based on the algorithm of calculating the steady state mode of electric circuits. Boundary conditions have been determined using the solution of equations describing the beginning and the ending of the equivalent circuit.

Findings. The proposed mathematical model allows us to analyze the wave processes in the transformer windings taking into account all parameters of the equivalent circuit. During the study of wave processes in the transformer windings it is necessary to consider the ratio between time interval of electromagnetic wave propagation along the entire length of the winding and time interval, during which the current and voltage take considerable changes with respect to the their full change during the process under research. The voltage oscillations in turn arise with frequency corresponding both to the entire winding and the self frequency of the winding turn. Free oscillations are characterized by high frequencies and die out completely.These oscillations depend on inductive and capacitive coupling in the winding.

Originality. We suggest the new approach to the formation of the mathematical model which takes into account the distributed parameters and makes it possible to model the surge overvoltage taking into account all parameters of the equivalent scheme and solution of the integral-differential equations in partial derivatives using the method of separation of variables.

Practical value. Reliability of the transformers insulation during the surge overvoltage is very important and depends on its correct coordination. The insulation of the high-voltage transformers must ensure their accident-free operation both during the long-term action of the applied voltage and the short-time external and internal overvoltage. Development of the mathematical models for the wave processes study in the power transformers with consideration of these factors is an important and actual problem because the insulation of the transformer windings has a significant influence on its size, cost and weight, increases the reactance, thereby reducing its bandwidth.

Keywords: *mathematical modeling, surge voltage, mutual induction, transformer winding, wave process, partial derivatives, initial conditions, boundary conditions*

Рекомендовано до публікації докт. техн. наук О.С. Бештою. Дата надходження рукопису 08.10.12.