tion adaptability and its indicators has been formulated. The developed criterion makes it possible to evaluate the level of the enterprise innovation adaptability on the basis of the actual values of the enterprise resistance level to innovations and the enterprise receptivity level to innovations. The criterion is referred to the structure of the cycle of the enterprise innovation adaptation, thus ensuring formalization of the account of the natural laws providing the cyclicity of the enterprise innovation adaptation process which makes it possible to estimate the level of the enterprise innovation adaptability at any point of its innovation development path.

Originality. The developed criterion makes it possible to determine the enterprise innovation adaptability as the index characterizing the result of the combination of the actual level of the enterprise resistance to innovations and the actual level of the enterprise receptivity to innovations at any point of the innovation development path. This solves the contradiction of simultaneous providing the stability and the changeability of the enterprise as the subject of adaptation.

Practical value. The criterion is one of the instruments to estimate the level of the enterprise adaptability to the innovation development. It can be used in the process of forming the system of analytical providing monitoring of the actual level of the enterprise innovation adaptability.

Keywords: *innovation development, adaptability, resistance, receptivity, many-valued logic function, criterion*

Рекомендовано до публікації докт. екон. наук Н.В. Коваленком. Дата надходження рукопису 14.06.13.

УДК 519.248:62-192

Ю.І. Швацька,
О.Г. Байбуз, д-р техн. наук, проф.

Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара, м. Дніпропетровськ, Україна, e-mail: jshvatskaya@gmail.com

ТЕХНОЛОГІЯ АПРОКСИМАЦІЇ ЗГОРТКИ РОЗПОДІЛІВ СПЛАЙН-ВЕЙБУЛЛА

I.I. Shvatska,
O.H. Baibuz, Dr. Sci. (Tech.), Professor

Oles Honchar Dnipropetrovsk National University, Dnipropetrovsk, Ukraine, e-mail: jshvatskaya@gmail.com

THE TECHNOLOGY OF APPROXIMATION OF A CONVOLUTION OF A SPLINE-WEIBULL DISTRIBUTION

Мета. Розробити інформаційну технологію статистичної обробки даних відмов гірничодобувного обладнання із застосуванням сплайн-розподілів. Дослідити модель відновлення функції розподілу сплайн-Вейбулла та розробити алгоритм аналітичної апроксимації згортки розподілів сплайн-Вейбулла у класі сплайн-експоненційних розподілів, оцінити ефективність використання запропонованих апроксимаційних методів.

Методика. Використаний модифікований метод максимальної правдоподібності для відтворення параметрів сплайн-розподілів. Апроксимовані функції інтенсивності розподілу сплайн-Вейбулла кусково-сталими функціями інтенсивності сплайн-експоненційного розподілу з одним і трьома вузлами. Обчислена згортка сплайн-експоненційних розподілів з використанням методу характеристичних функцій.

Результати. Проведений аналіз апроксимаційних методів показав доцільність використання розподілу сплайн-Вейбулла для аналізу відмов гірничодобувних систем. Доведено, що апроксимація сплайн-експоненційним розподілом є універсальною, оскільки дозволяє побудову процедур апроксимації для будь-яких значень параметрів форми β_i , де i=1,2.

Наукова новизна. Запропонована методика побудови функції розподілу згортки розподілів сплайн-Вейбулла, для якої неможливе знаходження точного аналітичного розв’язку, запропоновані апроксимаційні методи та алгоритми побудови згортки сплайн-експоненційних розподілів з одним і трьома вузлами.

Практична значимість. Розроблена інформаційна технологія може бути використана для оцінки надійності та ефективності складних технічних систем гірничодобувної промисловості в умовах накопиченням порушень, що вимагають застосування більш адекватних та достовірних розподілів, які базуються на розподілі Вейбулла.

Ключові слова: *відновлення, сплайн-експоненційний розподіл, емпірична функція, відмова*

Вступ. Сплайн-розподіли мають широке застосування при вивченні фізичних принципів, явищ або процесів, що спостерігаються та мають різну природу прояву. До них можуть бути віднесені механізми руйнування у твердих тілах, випробування та експлуатація систем (елементів) у змінних режимах, фазові переходи, що спостерігаються в тілах та системах, задачі надійності системи зі змінною структурою та ін.

Закон Вейбулла задовільно описує напрацювання до відмови елементів радіоелектронної апаратури, його використовують для оцінки надійності деталей і вузлів машин, зокрема автомобілів, а також для оцінки надійності машин у процесі їх приробления.

Розподіл сплайн-Вейбулла є найбільш адекватним для опису надійності функціонування складних систем в умовах накопичення порушень, тому виникає необхідність більш досконалого вивчення даного розподілу.

Визначення надійності систем з накопичення порушень вимагає розв’язання задачі побудови згортки розподілів. Знаходження згортки розподілів сплайн-Вейбулла в явному аналітичному вигляді є неможливим, тому замість згортки розподілів сплайн-Вейбулла може бути запропонована аналітична апроксимація. Найчастіше будуються апроксимації розподілу Вейбулла, засновані на розподілах, похідних від експоненційного.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Моделям процесів відновлення змінних функцій розподілу напрацювань на відмову, видаткам на відновлення та ефективності змінних об'єктів присвячені роботи М. Броупа та Ф. Прошана, М. Кійама та У. Смита, К. Дорадо та інших авторів [1–2]. Але дані моделі не цілком достатні для опису процесів функціонування технічних засобів у теорії надійності.

Найвідомішими дослідженнями проблеми знаходження згортки розподілів Вейбулла є роботи наступних учених: Р. Барлоу та Ф. Прошан, Л. Бакстер, Е. Шойер, В. Блішке, Д. МакКоналог, В. Феллер, Б.В. Гнеденко, Ю.К. Біляєв, А.Д. Соловйов, Л. Сміття, М. Лидбеттер та інші [3].

На даний момент є актуальною задача розробки сучасних інформаційних технологій статистичної обробки даних про відмови гірничодобувного обладнання при застосуванні сплайн-розподілів та дослідження нових апроксимаційних методів теорії відновлення, що можуть бути застосовані для знаходження згортки розподілів, побудова яких є неможливою в кінцевому аналітичному вигляді.

Постановка задачі. Розробити інформаційну технологію статистичної обробки даних відмов гірничодобувного обладнання при застосуванні сплайн-розподілів. Провести відновлення розподілу сплайн-Вейбулла та розробити алгоритми апроксимації згортки розподілів сплайн-Вейбулла згорткою сплайн-експоненційних розподілів. Зробити висновки щодо точності запропонованих апроксимаційних моделей для різних параметрів форми β.

Основний матеріал. Аналіз характеру виникнення відмов агрегатів дозволив виявити, що впродовж терміну експлуатації агрегати піддаються природному зношенню, на них впливає дія навколишнього середовища, мають місце фізико-механічні зміни, а також дефекти, пов'язані з порушенням технології виготовлення. Тим самим накопичений масив даних є неоднорідним, що визначає використання сплайн-розподілів.

Для відтворення сплайн-розподілів запропоновано використовувати модифікований метод максимальної правдоподібності.

Функція розподілу сплайн-Вейбулла представляється у вигляді [4]

$$F_w(t)=\begin{cases}1-\exp\left(-\dfrac{t^{\beta_1}}{\alpha}\right), 0<t<t_0\\ 1-\exp\left(-\dfrac{t_0^{\beta_1}}{\alpha}\left(\dfrac{t}{t_0}\right)^{\beta_2}\right), t\ge t_0\end{cases}, \tag{1}$$

де α – коефіцієнт масштабу; β_1 , β_2 – параметри форми; t_0 – вузол склеювання.

При $t_0=0$ маємо окремий випадок – розподіл Вейбулла, при цьому $\beta_1=\beta_2$.

Зведемо функцію розподілу сплайн-Вейбулла (1) до лінійного вигляду

$$\ln\ln\left(\frac{1}{1-F_w(t)}\right)=\begin{cases}A+\beta_1 y, 0<t<t_0\\ A+\beta_1 y_0+\beta_2(y-y_0), t\ge t_0\end{cases},$$

де $A=\ln\alpha;\ y=\ln t;\ y_0=\ln t_0$.

Тоді параметри розподілу $\alpha;\ \beta_1;\ \beta_2$ знаходяться з умови

$$\rho_0=\min_k\sup_i\left|F_n(t_i)-\widehat{F}_w(t_i,\widehat{\alpha}_k,\widehat{\beta}_{1,k},\widehat{\beta}_{2,k},t_k)\right|. \tag{2}$$

При цьому оцінки параметрів $\alpha;\ \beta_1;\ \beta_2$ отримаємо після реалізації

$$\begin{gathered}\min_{\alpha,\beta_1,\beta_2.} S^2=\min_{\alpha,\beta_1,\beta_2\cdot}\frac{1}{n-4}\left[\sum_{i=0}^{k}(z_i-A-\beta_1 y_i)^2+\right.\\ \left.+\sum_{i=k+1}^{N}\left((z_i-z_0)-\beta_2(y_i-y_0)\right)^2\right]\end{gathered}, \tag{3}$$

де $z_i=\ln\ln\left(\dfrac{1}{1-F_n(t_i)}\right)$.

Унаслідок перетворення (1) до лінійної форми, для знаходження розв’язку (3), достатньо реалізувати процедуру пошуку мінімуму наступних функцій

$$\min_{\alpha,\beta_1,\beta_2.} S_1^2\approx\min_{\alpha,\beta_1,\beta_2\cdot}\sum_{i=0}^{k}(z_i-A-\beta_1 y_i)^2$$

та

$$\min_{\alpha,\beta_1,\beta_2.} S_2^2\approx\min_{\alpha,\beta_1,\beta_2\cdot}\sum_{i=k+1}^{N}\left((z_i-z_0)-\beta_2(y_i-y_0)\right)^2.$$

Маємо наступну обчислювальну процедуру:

1. Вважаємо, що вузол склеювання t_0 функції розподілу сплайн-Вейбулла (1) співпадає з однією з ва-

ріант t_k; $k = 3$; $n-4$. Обчислюємо для кожного t_k оцінки параметрів $\left\{\hat{\alpha}_k,\ \hat{\beta}_{1k},\ \hat{\beta}_{2k}\right\}$ [4]

$$\hat{\alpha}_k = \exp\left(\frac{1}{k}\left(\beta_1\bar{y} - \bar{z}\right)\right),\ \hat{\beta}_{1k} = \frac{\bar{z}\cdot\bar{y} - k\cdot\overline{zy}}{\bar{y}^2 - k\cdot\overline{y^2}};$$

$$\hat{\beta}_{2k} = \frac{\sum\limits_{i=k+1}^{N}(z_i - z_0)(y_i - y_0)}{\sum\limits_{i=k+1}^{N}(y_i - y_0)^2},$$

де $\bar{z} = \sum\limits_{i=0}^{k} z_i$; $\bar{y} = \sum\limits_{i=0}^{k} y_i$; $\overline{zy} = \sum\limits_{i=0}^{k} z_i y_i$; $\overline{y^2} = \sum\limits_{i=0}^{k} y_i^2$.

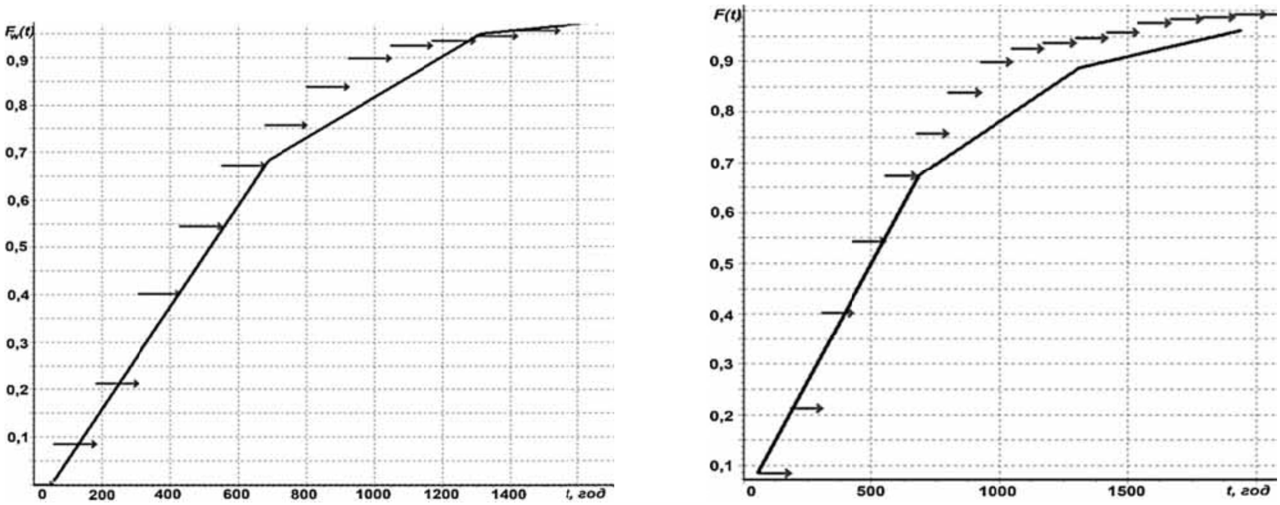
2. Для t_k, $k = 3, n-4$ у кожній точці варіаційного ряду обчислюємо значення теоретичної функції розподілу $F(t_i,\ \hat{\alpha}_k,\ \hat{\beta}_{1,k},\ \hat{\beta}_{2,k})$.

3. З умови (3) знаходимо місцезнаходження вузла склеювання $t_0 = t_{\rho_0}$ та приписуємо даному вузлу оцінки параметрів.

4. Оцінювання точності оцінок параметрів.

5. Визначення критеріїв згоди для оцінки достовірності розподілу (Колмогорова, Пірсона).

На рис. 1 зображені функції розподілу напрацювань, побудовані за даними відмов екскаватора ЄКГ-8І в умовах експлуатації І категорії. Відновлення як розподілу Вейбулла, так і розподілу сплайн-Вейбулла є узгодженим за Хі-критерієм. Застосування розподілу сплайн-Вейбулла є більш адекватним для оцінки відмов гірничодобувної техніки, оскільки відтворена функція розподілу співпадає з емпіричним розподілом із максимальною різницею $D_n = 0{,}001712$ (для розподілу Вейбулла) та $D_n = 8{,}926\times 10^{-5}$ (для розподілу сплайн-Вейбулла), де $D_n = \max\limits_{1\le i\le n}\left|F_n(t_i) - F_w(t_i)\right|$.



а) б)

Рис. 1. Відновлення функції розподілу напрацювань до відмови екскаватора ЄКГ-8І: а) за розподілом сплайн-Вейбулла – $\alpha = 0{,}00006113$; $\beta_1 = 2{,}0924$; $\beta_2 = 1{,}489$; $t_0 = 492{,}8$; б) розподілом Вейбулла – $\alpha = 689$; $\beta = 1{,}019$

Явний вигляд функції згортки розподілів є лише для деяких функцій розподілу, наприклад, для експоненційного, Ерланга, рівномірного. Розподіл сплайн-Вейбулла потребує побудови різноманітних апроксимацій для функції розподілу згортки.

У даній роботі запропонована технологія обчислення згортки розподілів сплайн-Вейбулла на базі апроксимації функції інтенсивності розподілу сплайн-Вейбулла кусково-сталими функціями інтенсивності сплайн-експоненційного розподілу з одним вузлом (4) та трьома вузлами (5) [5], що мають наступні функції розподілу

$$F_{se1}(t) = \begin{cases} 1-\exp(-\lambda_1 t), & 0 \le t \le t_1 \\ 1-\exp(-(\lambda_1-\lambda_2)t_1 - \lambda_2 t), & t_1 \le t < \infty \end{cases}, \qquad (4)$$

де λ_1, λ_2 – зворотні коефіцієнти масштабу; t_1 – вузол склеювання та

$$F_{se3}(t) = \begin{cases} 1-\exp(-\lambda_1 t), & 0 \le t \le t_1 \\ 1-\exp(-(\lambda_1-\lambda_2)t_1 - \lambda_2 t), & t_1 \le t < t_2 \\ 1-\exp(-(\lambda_2-\lambda_3)t_2 - \lambda_3 t), & t_2 \le t < t_3 \\ 1-\exp(-(\lambda_3-\lambda_4)t_3 - \lambda_4 t), & t_3 \le t < \infty \end{cases}, \qquad (5)$$

де λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 – зворотні коефіцієнти масштабу; t_1, t_2, t_3 – вузли склеювання.

Задача апроксимації неперервної функції інтенсивності переходів у середньому представляє собою задачу найкращого наближення розподілу функції $\lambda(x)$ з вагою $p(x)$ ступінчатої функції $c(x)$. На заданому розбитті $a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots x_n \le x_{n+1} = b$ $c(x) = c_i(x) = c_i$ при $x_{i-1} \le x < x_{i-1}$.

Міра близькості $f(x)$ і $c(x)$ на (a, b) визначається як

$$\delta_a^b = \delta_a^b\left(\left|\lambda - c\right|\right) = \int_a^b p(x)\left|\lambda(x) - c(x)\right|dx.$$

Задача наближення складається в найкращому виборі вузлів $x_1, x_2, \ldots x_n$, що знаходять у результаті вирішення задачі мінімізації

$$\min_{a \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le b} \delta_a^b\left(\left|\lambda - c\right|\right),$$

при цьому функція $c_i(x)$ залежить від x_{i-1} та x_i. Якщо x_{i-1} і x_i фіксовані, то $c_i(x)$ визначається з рішення локальної задачі

$$\min_{c_i(x) \in R_i} \delta_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\left|\lambda - c\right|\right).$$

Параметри апроксимації розподілу сплайн-Вейбулла сплайн-експоненційним розподілом з одним вузлом визначаються формулами

$$\lambda_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}\left(\frac{a+t_0}{2}\right)^{\beta_1-1};\ \lambda_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2}\left(\frac{t_0+b}{2}\right)^{\beta_2-1};\ t_1 = t_0,$$

де $\alpha_1 = \alpha$; $\alpha_2 = \alpha_1 t_0^{\beta_2-\beta_1}$; $b = \sqrt[\beta_2]{-\alpha_2 \ln \lambda_w}$; λ_w – критичні значення.

Задача знаходження параметрів сплайн-експоненційного розподілу з трьома вузлами може бути описана наступною схемою

1. а) якщо $\left|b - t_0\right| < \dfrac{\left|a-b\right|}{3}$, то при $A = a$, $B = t_0$ вузол t_1 можна визначити з рівняння

$$2^{\beta_1}\left(\sqrt[\beta_1-1]{2^{\beta_1} t_1^{\beta_1-1} - (A+t_1)^{\beta_1-1}} - t_1\right)^{\beta_1-1} -$$
$$-2^{\beta_1} t_1^{\beta_1-1} - (A+t_1)^{\beta_1-1} -$$
$$-\left(\sqrt[\beta_1-1]{2^{\beta_1} t_1^{\beta_1-1} - (A+t_1)^{\beta_1-1}} - t_1 + B\right)^{\beta_1-1} = 0.$$

Наступні значення вузлів та інтенсивностей визначаються за формулами

$$t_2 = \sqrt[\beta_1-1]{2^{\beta_1} t_1^{\beta_1-1} - (A+t_1)^{\beta_1-1}} - t_1;\ t_3 = t_0;$$

$$\lambda_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}\left(\frac{A+t_1}{2}\right)^{\beta_1-1};\ \lambda_2 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)^{\beta_1-1};$$

$$\lambda_3 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}\left(\frac{t_2+t_3}{2}\right)^{\beta_1-1};\ \lambda_4 = \frac{\beta_2}{\alpha_2}\left(\frac{t_3+b}{2}\right)^{\beta_2-1};$$

б) якщо $\left|a - t_0\right| < \dfrac{\left|a-b\right|}{3}$, то при $A = t_0$, $B = b$, $t_1 = t_0$, вузол t_2 можна визначити з рівняння

$$2^{\beta_2}\left(\sqrt[\beta_2-1]{2^{\beta_2} t_2^{\beta_2-1} - (A+t_2)^{\beta_2-1}} - t_2\right)^{\beta_2-1} -$$
$$-2^{\beta_2} t_2^{\beta_2-1} - (A+t_2)^{\beta_2-1} -$$
$$-\left(\sqrt[\beta_2-1]{2^{\beta_2} t_2^{\beta_2-1} - (A+t_2)^{\beta_2-1}} - t_2 + B\right)^{\beta_2-1} = 0.$$

Наступні значення вузлів та інтенсивностей визначаються за формулами

$$t_3 = \sqrt[\beta_2-1]{2^{\beta_2} t_2^{\beta_2-1} - (A+t_2)^{\beta_2-1}} - t_2;$$

$$\lambda_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}\left(\frac{a+t_1}{2}\right)^{\beta_1-1};\ \lambda_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2}\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)^{\beta_2-1};$$

$$\lambda_3 = \frac{\beta_2}{\alpha_2}\left(\frac{t_2+t_3}{2}\right)^{\beta_2-1};\ \lambda_4 = \frac{\beta_2}{\alpha_2}\left(\frac{t_3+b}{2}\right)^{\beta_2-1}.$$

2. В іншому випадку маємо формули для розрахунку параметрів

$$t_1 = \frac{t_0}{C_1};\ t_2 = t_0;\ t_3 = \frac{b}{C_2},$$

де $C_1 = \sqrt[\beta_1-1]{(2^{\beta_1}-1)} - 1$; $C_2 = \sqrt[\beta_2-1]{(2^{\beta_2}-1)} - 1$;

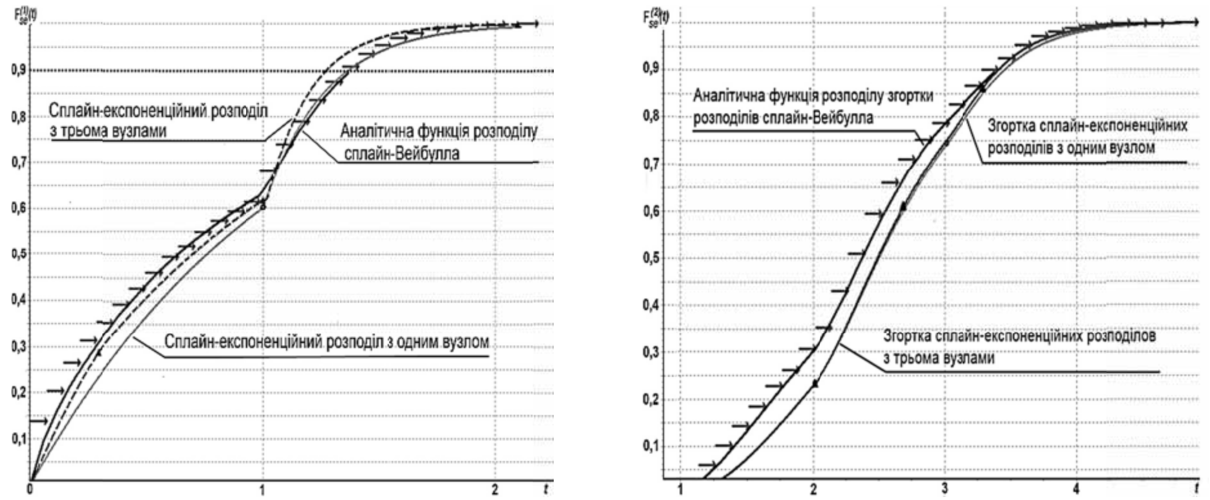
$$\lambda_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}\left(\frac{t_0}{2}\right)^{\beta_1-1} C_1^{1-\beta_1};$$

$$\lambda_2 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}\left(\frac{t_0}{2}\right)^{\beta_1-1} C_1^{1-\beta_1}\left(2^{\beta_1}-1\right);$$

$$\lambda_3 = \frac{\beta_2}{\alpha_2}\left(\frac{b}{2}\right)^{\beta_2-1} C_2^{1-\beta_2};$$

$$\lambda_4 = \frac{\beta_2}{\alpha_2}\left(\frac{b}{2}\right)^{\beta_2-1} C_2^{1-\beta_2}\left(2^{\beta_2}-1\right).$$

На рис. 2 зображені результати аналітичних апроксимацій функції розподілу та згортки двох розподілів сплайн-Вейбула з параметрами $\alpha_1 = 1$; $\beta_1 = 0{,}8$; $\alpha_2 = 1$; $\beta_2 = 2{,}6$ сплайн-експоненційним розподілом з одним вузлом ($\lambda_1 = 0{,}919$; $\lambda_2 = 3{,}775$; $t_1 = 1$) та трьома вузлами ($\lambda_1 = 1{,}179$; $\lambda_2 = 0{,}874$; $\lambda_3 = 5{,}238$; $\lambda_4 = 8{,}527$; $t_1 = 0{,}288$; $t_2 = 1$; $t_3 = 2{,}099$).



а) *б)*

Рис. 2. Імперична та аналітична функції розподілу сплайн-Вейбулла та апроксимація сплайн-експоненційним розподілом з одним вузлом та трьома вузлами у випадку простого розподілу сплайн-Вейбуллла (а) та згортки двох розподілів сплайн-Вейбулла з однаковими параметрами (б)

У табл. 1 представлені похибки апроксимації розподілу сплайн-Вейбулла з параметрами $\alpha=1$, $t_0=1$, β_1 від 0,4 до 2 та β_2 від 0,9 до 1,9 з кроком 0,4 сплайн-експоненційними розподілами з одним та трьома вузлами за запропонованою вище схемою. Аналіз апроксимаційних похибок показує, що запропонований апроксимаційний метод може бути застосований для будь-яких значень параметрів форми β_i, де i=1,2, але найбільш оптимальним є застосування даної схеми для розподілів сплайн-Вейбулла з параметрами форми від 0,4 до 1,8 у довільній комбінації значень параметрів форми β_1 та β_2.

Важливу роль у теорії надійності має функція $F^{(n)}(t)$ – n-кратна згортка функцій розподілів $F_1(t), F_2(t), ..., F_n(t)$

$$F^{(n)}(t) = (F^{(n-1)} * F_n)(t).$$

Таблиця 1

Похибки апроксимації розподілу сплайн-Вейбулла сплайн-експоненційним розподілом

Параметри розподілу сплайн-Вейбулла, $\beta_1; \beta_2$	Параметри сплайн-експоненційного розподілу з 1-им вузлом, $\lambda_1; \lambda_2; t_1$	Похибка, Δ_1, %	Параметри сплайн-експоненційного розподілу з 3-ма вузлами, $\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3; \lambda_4; t_1; t_2; t_3$	Похибка, Δ_2, %
0,4; 0,9	0,6; 0,83; 1	8,9	0,6; 0,79; 0,7; 0,7; 1, 6.4, 16	29
0,8; 0,9	0,92; 0,83; 1	2,4	0,92; 0,78; 0,7; 0,69; 1; 6,3; 16,4	24
1,6; 0,9	1,06; 0,83; 1	3,6	1,06; 0,78; 0.7; 0,69; 1; 6,4; 16,41	19
2,0; 0,9	1; 0,83; 1	5	1,01; 0,78; 0,7; 0,69; 1; 6,3; 16,44	24
0,4; 1,3	0,6; 1,5; 1	13	0,6;1,6; 2; 2,2; 1; 3,25; 6,2	30
0,8; 1,3	0,9; 1,5; 1	3,8	0,91; 1,62; 2; 2,2; 1; 3,26; 6,24	27
1,6; 1,3	1,05; 1,5; 1	8,9	1,05;1,63; 2,07; 2,21; 1; 3,26; 6,24	29
2,0; 1,3	1; 1,5; 1	11	1; 1,6; 2,07; 2,21; 1; 3,26; 6,24	32
0,4; 1,9	0,6; 2,55; 1	13	1,72; 0,55; 4,61; 5,46; 1; 2,1; 3,24	8,6
0,8; 1,9	0,91; 2,55; 1	3,3	0,91; 2,8; 4,61; 5,46; 1; 2,1; 3,24	4,8
1,6; 1,9	1,9; 2,55; 1	7	0,64; 1,31; 4,61; 5,05; 0,45; 1; 1,9	16
2,0; 1,9	1; 2,55; 1	7,7	1,01; 2,82; 4,61; 5,46; 1; 2,12; 3,25	20

Задача знаходження функції розподілу згортки сплайн-експоненційних розподілів може бути вирішена за допомогою характеристичних функцій [5]. Характеристична функція $\varphi_n(s)$ для функції розподілу має вигляд

$$\varphi_n(s) = \int_0^{\infty} \exp(-sz) dF_n(t).$$

Для $F_1(t)$ характеристична функція має вигляд

$$\begin{aligned}\phi_1(s) &= \int_0^{\infty} \exp(-sz) dF_1(t) = \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+s} + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2+s} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1+s}\right)\exp(-(\lambda_1+s)t_1) + \\ &+ \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_3+s} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2+s}\right)\exp(-(\lambda_2+s)t_2) + \\ &+ \left(\frac{\lambda_4}{\lambda_4+s} - \frac{\lambda_3}{\lambda_3+s}\right)\exp(-(\lambda_3+s)t_3).\end{aligned}$$

Шукана характеристична функція для функції розподілу згортки сплайн-експоненційних розподілів $F^{(n)}(t)$ буде мати вигляд

$$\phi^{(n)}(s) = \prod_{i=1}^{n} \phi_i(s).$$

Функція щільності розподілу часу появи n-ої відмови визначається наступною формулою

$$f^{(n)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(-tz)\phi^{(n)}(z)dz.$$

Обчислення даного інтегралу представляє певні труднощі. Якщо час між відмовами системи є однаковим та розподіленим за сплайн-експоненційним розподілом, то, беручи до уваги, що підінтегральна функція має в точках $s = -\lambda_1$, $s = -\lambda_2$, $s = -\lambda_3$, $s = -\lambda_4$ полюси n-ого порядку, застосуємо Теорему про вичіти та отримаємо наступний вираз для функції щільності розподілу згортки

$$f^{(n)}(t) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{i=1}^{4} \lim_{s\to-\lambda_i} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\left[(s+\lambda_i)^n \phi^{(n)}(s)\exp(st)\right].$$

У табл. 2 представлені похибки апроксимації згортки двох розподілів сплайн-Вейбулла згорткою сплайн-експоненційних розподілів, побудованої на базі апроксимації розподілу сплайн-Вейбулла з використанням запропонованої апроксимаційної схеми.

У табл. 2 представлені похибки апроксимації згортки розподілів сплайн-Вейбулла з параметрами $\alpha=1$, $t_0=1$, β_1 від 0,4 до 2 та β_2 від 0,9 до 1,9 з кроком 0,4 згорткою сплайн-експоненційних розподілів з одним та трьома вузлами. Аналіз апроксимаційних похибок показує, що запропонований апроксимаційний метод може бути застосований для будь-яких значень параметрів форми β_i, де i=1,2, але найбільш оптимальним є застосування даної схеми для згортки розподілів сплайн-Вейбулла з параметрами форми від 0,8 до 1,6.

Таблиця 2

Похибки апроксимації згортки двох розподілів сплайн-Вейбулла згорткою сплайн-експоненційних розподілів

Параметри розподілу сплайн-Вейбулла, β_1, β_2	Похибка, Δ_1, %	Похибка, Δ_2, %
0,8; 0,9	4,3	16
1,6; 0,9	9,2	17
2,0; 0,9	10	16
0,8; 1,3	6,5	21
1,6; 1,3	14	19
2,0; 1,3	25	22
0,8; 1,9	12	23
1,6; 1,9	26	27
2,0; 1,9	31	27

Висновки. Проведений аналіз апроксимаційних методів показав, що апроксимація розподілу сплайн-Вейбулла сплайн-експоненційним розподілом є ефективною та універсальною, оскільки дозволяє побудову процедур апроксимації для будь-яких значень параметрів форми β_i, i=1,2.

Технологія апроксимації розподілу сплайн-Вейбулла у класі сплайн-експоненційних розподілів може бути успішно застосована для знаходження аналітичної апроксимації згортки розподілів сплайн-Вейбулла у вигляді згортки сплайн-експоненційних розподілів.

Список літератури / References

1. Бабак В.П. Статистична обробка даних: монографія / Бабак В.П., Білецький А.Я., Приставка П.О. – К.: МІВВЦ, 2001. – 386с.

Babak, V.P. and Biletskiy, A.Y. and Pristavka, P.O. (2001), *Statystychna obrobka danykh* [Statistical Analysis of Data], Monograph, MIVVT, Kiev, Ukraine.

2. Половко А.М. Основы теории надежности: 2-е изд., перераб. и доп. / А.М. Половко, С.В. Гуров – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 704 с.

Polovko, A.M. and Gurov, S.V. (2006), *Osnovy teorii nadezhnosti* [Fundamentals of Reliability Theory], 2nd edition, Piter, St.-Petersburg, Russia.

3. Horst Rinne (2008), "The Weibull Distribution", A Handbook / Chapman & Hall/CRC, 816 p.

4. Приставка О.П. Сплайн-розподіли у статистичному аналізі / Приставка О.П. – Дніпропетровськ, 1995. – 152 с.

Pristavka, O.P. (1995), *Splain-rozpodily u statystychnomu analizi* [Spline Distributions in Statistical Analysis], Dnipropetrovsk, Ukraine.

5. Байбуз О.Г. Сплайны в надежности / О.Г. Байбуз, А.Ф. Приставка – Днепропетровск, 2003. – 256 с.

Baibuz, O.H. and Pristavka, O.P. (2003), *Splayny v nadezhnosti* [Splines in Reliability], Dnipropetrovsk, Ukraine.

Цель. Разработать информационную технологию статистической обработки данных отказов горнодобывающего оборудования с использованием сплайн-распределений. Исследовать модель восстановления функции распределения сплайн-Вейбулла и разработать алгоритм аналитической аппроксимации свертки распределений сплайн-Вейбулла в классе сплайн-экспоненциальных распределений, оценить эффективность использования предложенных аппроксимационных методов.

Методика. Использован модифицированный метод максимальной правдоподобности для восстановления параметров сплайн-распределений. Аппроксимированы функции интенсивности распределения сплайн-Вейбулла кусочно-постоянными функциями интенсивности сплайн-экспоненциального распределения с одним и тремя узлами. Рассчитана свертка сплайн-экспоненциальных распределений с использованием метода характеристических функций.

Результаты. Проведенный анализ аппроксимационных методов показал целесообразность использования распределения сплайн-Вейбулла для анализа отказов горнодобывающих систем. Доказано, что аппроксимация сплайн-экспоненциальным распределением является универсальной, поскольку позволяет построение аппроксимационных процедур для любых значений параметров форми β_i , где i=1,2.

Научная новизна. Предложена методика построения функции распределения свертки распределений сплайн-Вейбулла, точное аналитическое решение для которой найти невозможно, предложены аппроксимационные методы и алгоритмы построения свертки сплайн-экспоненциальных распределений с одним и тремя узлами.

Практическая значимость. Разработанная информационная технология может быть использованна для оценки надежности и эффективности сложных технических систем горнодобывающей промышленности в условиях накопления нарушений, которые требуют использования более адекватных и достоверных распределений, базирующихся на распределении Вейбулла.

Ключевые слова: *восстановление, сплайн-экспоненциальное распределение, эмпирическая функция, отказ*

Purpose. To develop the informational technology of statistical treatment of the data about mining and processing equipment failures using spline-distributions. To study the renewal model of the distribution function of spline-Weibull and to develop the algorithm of analytical approximation of convolution of spline-Weibull distributions in class of spline-exponential distributions, to evaluate the efficiency of the proposed approximation methods.

Methodology. We have used the modified method of maximum reality to reproduce the parameters of spline distributions. We have approximated the function of intensity of spline-Weibull distribution by pieces-constant functions of intensity of spline-exponential distribution with 1 and 3 knots. We have calculated the convolution of spline-exponential distributions by the method of characterizing functions.

Findings. The analysis of the approximation methods showed the necessity of usage of spline-Weibull distributions for analyzing the failures of mining and processing systems. We have proved that the approximation by spline-exponential distribution is universal as it lets us to conduct approximation procedures for any values of parameters of $\beta_{i,}$ form, where i=1.2.

Originality. We have proposed the methods of construction of distribution function of convolution of spline-Weibull distribution, for which the exact analytical decision is impossible, and the approximation methods and algorithms of construction of the convolution of spline-exponential distributions with 1 and 3 knots.

Practical value. The new informational technology can be used for evaluation of the reliability and efficiency of complicated technical systems of the mining and processing industry in the conditions of accumulation of violations which require the usage of more adequate and reliable distributions based on Weibull distribution.

Keywords: *renewal, spline-exponential distribution, empirical function, failure*

Рекомендовано до публікації докт. фіз.-мат. наук В.Б. Говорухою. Дата надходження рукопису 06.06.13.