# ТЕНЗОРНІ СИЛИ І АСИМПТОТИКА ХВИЛЬОВИХ ФУНКЦІЙ

**І.І.Гайсак[1], Р.І.Селянчин[1], Д.Брунцко[2], Я.Кіш[2]**

[1] Ужгородський національний університет, кафедра теоретичної фізики, вул. Волошина 32, Ужгород, 88000
[2] Інститут експериментальної фізики, АН Словаччини, Кошіце

Шляхом розв'язку системи рівнянь Раріти-Швінгера для двоферміонної системи розглянуто асимптотику хвильових функцій, що характеризують змішані стани. Розглянуто вплив тензорної складової потенціалу на асимптотику хвильових функцій. Наведено загальні особливості асимптотики у випадку векторних та тензорних мезонів.

## Вступ

При розгляді релятивістських ефектів, обумовлених спіном, застосовують або рівняння Дірака (релятивістська модель), або квазірелятивістське рівняння Шредінгера з потенціалом, в який включено спін-орбітальну та спін-спінову взаємодії. Відомо [1], що врахування тензорних сил призводить до змішування хвиль із різним значенням орбітального моменту, S- і D-хвиль у випадку векторних станів, P- і F-хвиль у випадку тензорних станів. Так домішок D-хвилі

$$P_D = \int_0^\infty |w(r)|^2 dr ,$$

де $w(r)$ – хвильова функція, що відповідає значенню орбітального моменту $L$=2, для дейтрона становить близько 6%. У потенціальних кваркових моделях домішок D-хвилі в повну хвильову функцію становить десяті частки відсотка. Тому багатьма авторами вважається недоцільним розглядати тензорну компоненту потенціалу в двокваркових системах. Однак у роботі [2] показано, що врахування D-хвилі дає поправку в енергетичний спектр уже значно більшу, а саме – 1-5 %, а вклад в ширини розпадів дає поправку ~ 10%.

При дослідженні структури дейтрона залишається відкритим питання опису високоімпульсної компоненти хвильової функції, що відповідає малим відстаням у координатному представленні. До цього часу різні потенціальні моделі не дають остаточної відповіді відносно амплітуди D-стану на відстанях, менших ніж 1.5 фм. Крім того, значення хвильової функції в межах цього діапазону все ще є питанням припущень та екстраполяцій [3].

Характерною рисою опису двоферміонного зв'язаного стану є система з двох зв'язаних диференціальних рівнянь Шредінгера. Аналогічна система має місце і в задачах атомної фізики [4] та різних варіантах методу зв'язаних каналів (див., наприклад, [5] та наведені там посилання). Тому асимптотична поведінка хвильових функцій у таких системах потребує акуратного розгляду.

## Стани двоферміонної системи

Для двоферміонної системи характерними є два спінові стани, коли спіни паралельні (триплетний стан) і коли вони антипаралельні (синглетний стан):

$$\vec{S} = \frac{\vec{1}}{2} + \frac{\vec{1}}{2} = \begin{cases} 1 - \text{триплет} \\ 0 - \text{синглет} \end{cases}$$

Таким чином повний момент такої системи, що визначається згідно з формулою $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, буде приймати такі можливі значення в залежності від спінових станів:

$\vec{L}+\vec{0}=L$ синглетний стан

$\vec{L}+\vec{1}=(L+1,\ \ L,\ \ L-1)$ триплетний стан

Стан двоферміонної системи визначається наступним повним набором квантових чисел:

$$|E,J,M,P,(C)\rangle$$

де $E$ – енергія системи, $J$ – повний момент імпульсу, $M$ – проекція моменту, $P=(-1)^{L+1}$ – парність та $C=(-1)^{L+S}$ – зарядова парність. Можливі стани наведено в таблиці 1.

Таблиця 1. Стани двоферміонної системи.

| | Синглетний стан (S = 0) | | Триплетний стан (S = 1) | |
|---|---|---|---|---|
| P → J ↓ | + | – | + | – |
| 0 | — | $^1S_0$ | $^3P_0$ | — |
| 1 | $^1P_1$ | — | $^3P_1$ | $^3S_1+^3D_1$ |
| 2 | — | $^1D_2$ | $^3P_2+^3F_2$ | $^3D_2$ |

У загальному випадку потенціал для системи двох ферміонів можна представити у вигляді:

$$\hat{V}(r)=\hat{V}_C+\hat{V}_{SL}+\hat{V}_{SS}+\hat{V}_T,$$

де $\hat{V}_C$ – центральна частина потенціалу, $\hat{V}_{SL}$ – спін-орбітальна взаємодія, $\hat{V}_{SS}$ – спін-спінова взаємодія, $\hat{V}_T$ – тензорний потенціал [2].

Синглетний, а також триплетний стани з $J = L$ описуються рівнянням Шредінгера

$$v''+\left(k^2-\frac{L(L+1)}{r^2}-\hat{V}(r)\right)v=0 \quad ,(1)$$

з відповідними потенціалами.

Триплетні стани з змішаними орбітальними моментами описуються системою рівнянь Раріти-Швінгера [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dr^2}+\left(k^2-\dfrac{J(J-1)}{r^2}-\hat{V}(r)\right)u(r)=6\dfrac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1}V_T(r)\cdot w(r) \\ \dfrac{d^2w}{dr^2}+\left(k^2-\dfrac{(J+1)(J+2)}{r^2}-\hat{V}(r)\right)w(r)=6\dfrac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1}\cdot V_T(r)\cdot u(r) \end{cases} \quad ,(2)$$

де $u(r)$ – хвильова функція, що відповідає значенню орбітального квантового числа $L=J-1$, а $w(r)$ відповідно – $L=J+1$. На хвильові функції накладаються такі крайові умови:

$$\begin{matrix} u(0)=0, u(\infty)=0 \\ w(0)=0, w(\infty)=0 \end{matrix} \quad (3)$$

### Асимптотика хвильових функцій

Добре відомо [6], що радіальне рівняння Шредінгера з сферично-симетричним потенціалом виду

$$V(r)\sim\frac{1}{r^{\varepsilon}},\quad \varepsilon<2,$$

має два незалежні розв'язки з асимптотикою при $r\to 0$:

$$v_1(r)\sim r^{L+1},\ \ v_2(r)\sim r^{-L}. \quad (4)$$

Другий розв'язок не задовольняє крайові умови і рішення рівняння Шредінгера визначається першим із них

$$v_L\approx \text{const}\cdot r^{L+1}, \quad (5)$$

де $v_L$ – радіальна хвильова функція.

У випадку змішування станів, коли ми маємо справу не з одним, а з двома рівняннями другого порядку (2), незалежних розв'язків – чотири.

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ w_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_3 \\ w_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_4 \\ w_4 \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Аналіз, аналогічний випадку з рівнянням Шредінгера, дає для системи (2) з потенціалами виду $V(r) \sim \frac{1}{r^{\varepsilon}}$, $\varepsilon < 2$ наступну асимтотику в нулі для цих розв'язків :

$$u_1(r) \sim r^{J+4-n},\ w_1(r) \sim r^{J+2},$$

$$u_2(r) \sim r^{J},\ w_2(r) \sim r^{J+2-n},$$

$$u_3(r) \sim r^{1-J},\ w_3(r) \sim r^{3-J-n},$$

$$u_4(r) \sim r^{1-J-n},\ w_4(r) \sim r^{-1-J},$$

де $n$ – показник степеня тензорної складової потенціалу. Перші два розв'язки регулярні в нулі і задовольняють першу крайову умову (3) і повний розв'язок системи, що задовольняє і другу крайову умову (3), є суперпозицією перших двох незалежних розв'язків:

$$\begin{aligned} u(r) &= Au_1(r) + Bu_2(r) \\ w(r) &= Aw_1(r) + Bw_2(r) \end{aligned}. \qquad (7)$$

Так, у випадку $J = 1$ матимемо:

$$u_1(r) \sim r^4,\ u_2(r) \sim r,$$

$$w_1(r) \sim r^3,\ w_2(r) \sim r^2,$$

тобто $u(r) \sim r$, а $w(r) \sim r^2$.

У випадку $J = 2$, як видно з табл. 1, у триплетному стані з додатною парністю змішуються стани ${}^3P_2 + {}^3F_2$. Хвильові функції будуть мати наступну асимптотику:

$$\begin{aligned} u &= Au_1 + Bu_2 \sim r^2 \\ w &= Aw_1 + Bw_2 \sim r^3 \end{aligned},$$

тут $u(r)$ – радіальна хвильова функція при $L=1$, $w(r)$ – хвильова функція при $L=3$. Отже, асимптотика компонент рішення системи рівнянь Раріти-Швінгера вже не визначається орбітальним числом $L$, як у випадку з розв'язками рівняння Шредінгера, а обумовлюється повним орбітальним моментом $J$ і тензорним потенціалом, який забезпечує зв'язування рівнянь Шредінгера в систему (2).

Зазначимо що в роботі [7] при розгляді хвильової функції дейтрона використовувалася асимптотика для хвильових функцій змішаного стану виду $u(r) \sim r$, а $w(r) \sim r^3$.

У роботі [2] в рамках потенціальної кваркової моделі проведено дослідження впливу тензорних сил на параметри мезонів. Показано, що вклад D-хвилі у хвильову функцію для кваркових систем становить всього ~0.1%. Однак, це веде до вкладу в енергетичний спектр уже ~1%, а при розгляді ширин розпадів, які обумовлені значенням хвильової функції в нулі $|\psi(0)|^2$, вже відзначається вклад 10-50%.

## Література


1. W.Rarita, J.Schwinger, *Phys.Rev.* **59**, 436 (1941).
2. І.І.Гайсак, В.С. Морохович, *Наук. вісник Ужг. унів. Сер. Фіз.* **10**, 35 (2001).
3. B.Kuehn, in: *Proc. Int. Workshop "Dubna Deuteron-91"* (Dubna, 1991), p.6.
4. М.И.Гайсак, Дисс... докт. ф.-м. наук, Ужгород 1995.
5. M.Hirano, T.Honda, K.Kato, Y.Matsuda, M.Sakai, *Phys.Rev. D* **51**, 2353 (1995).

Uzhhorod University Scientific Herald. Series Physics. Issue 10. – 2001

# TENSOR FORCES AND ASYMPTOTIC OF WAVE FUNCTIONS

**I.I.Haysak[1], R.I.Selyanchyn[1], D.Bruncko[2], M.Kish[2]**

[1]Uzhhorod National University, Department of Theoretical Physics, Voloshina st.32, Uzhhorod 88000,
[2]Institute of Experimental Physics of the Slovak Academy of Sciences, Košice, Slovak Republic

The asymptotic behavior of wave functions for mixed states is examined by using the Rarita-Swinger system of equations for the two-fermion bound state. The influence of tensor part of potential on asymptotic is analyzed. The general features of asymptotic behavior in the case of vector and tensor mesons are shown.