УДК 517.946

В. В. Маринець, О. Ю. Питьовка (Ужгородський національний університет, Мукачівський державний університет)

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО - ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

A built modification of two-sides method is used for analysis of a boundary-value problem for a system of the integration of differential equations of hyperbolical type.

За допомогою побудованої модифікації двостороннього методу досліджується крайова задача для систем диференціально - функціональних рівнянь гіперболічного типу.

У даній роботі результати, одержані в [1], поширюються на системи диференціально - функціональних рівнянь гіперболічного типу.

Розглянемо область $D=D^{*}\cup D_2$, де $D^{*}=\{(x,y)\mid x\in([x_1,x_0],\ y\in(g_1(x),y_2]\}$, $D_2=\{(x,y)\mid\ x\ \in\ (x_0,x_2],\ y\in(g_2(x),y_1]\}$, $x_1<x_0<x_2$, $y_0<y_1<y_2$, а $y=g_r(x)$ $(x=g_r^{-1}(y))$, $r=1,2$ — "вільні" криві, причому $g_1'(x)<0$, $x\in(x_1,x_0)$, $g_1(x_k)=y_k, k=0,1$, $g_2'(x)>0, x\in(x_0,x_2)$, $g_2(x_0)=y_0$, $g_2(x_2)=y_1$.

Позначимо:
$L_2U(x,y):=U_{xy}(x,y)+A_1(x,y)U_x(x,y)+A_2(x,y)U_y(x,y)$, $(x,y)\in D$, де $U(x,y)=(u_i(x,y)), i=\overline{1,n}$ — вектор–функція, $A_r(x,y)=(\delta_{i,j}a_{i,j}^{(r)}(x,y))$, $r=1,2$, $i,j=\overline{1,n}$ — задані матриці, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

Дослідимо задачу: в просторі вектор–функцій $C^{*}(\overline{D}):=C^{(1.1)}(D)\cap C(\overline{D})$ знайти розв'язок системи диференціальних рівняння

$$L_2U(x,y)=f(x,y,U(x,y),U(x,\Theta(x,y))):=f[U(x,y)] \tag{1}$$

$f[U(x,y)]=(f_i[U(x,y)])$, $i=\overline{1,n}$ — вектор–функція, який задовольняє умови

$$\begin{gathered}U(x,g_1(x))=\Phi_1(x),\ U_y(x,g_1(x))=\Psi(x),\ x\in[x_1,x_0],\\ \Phi_1(x)\in C^1[x_1,x_0],\ \Psi(x)\in C[x_1,x_0],\end{gathered} \tag{2}$$

$$U(x,g_2(x))=\Phi_2(x),\ x\in[x_0,x_2],\ \Phi_2(x)\in C^1[x_0,x_2], \tag{3}$$

$$U(x_1,y)=\Phi(y),\ y\in[y_1,y_2],\ \Phi(y)\in C^1[y_1,y_2], \tag{4}$$

де для заданих вектор–функцій $\Phi_r(x):=(\varphi_{r,i}(x))$, $\Phi(y):=(\varphi_i(y))$, $\Psi(x):=(\psi_i(x))$, $i=\overline{1,n}$, виконуються умови узгодженості

$$\Phi_1(x_0)=\Phi_2(x_0),\ \Phi_1(x_1)=\Phi(y_1),\ \Phi'(y_1)=\Psi(x_1), \tag{5}$$

а $\Theta(x,y):=(\theta_i(x,y))$ — вектор–функція, $\theta_i(x,y))=y-\tau_i(x,y)$, $i=\overline{1,n}$, $\tau_i(x,y)\geq 0$ — задані неперервні функції, які визначають початкові множини

$$\begin{gathered}\overline{E}_{1,i}=\left\{(x,\overline{y})\mid x\in[x_1,x_0],\ \theta_i(x,y)\leq\overline{y}\leq g_1(x),\ (x,y)\in\overline{D}^{*}\right\},\\ \overline{E}_{2,i}=\left\{(x,\overline{y})\mid x\in[x_0,x_2],\ \theta_i(x,y)\leq\overline{y}\leq g_2(x),\ (x,y)\in\overline{D}_2\right\},\ i=\overline{1,n}.\end{gathered}$$

Нехай $\overline{E}_1 = \bigcup\limits_i \overline{E}_{1,i}$, $\overline{E}_2 = \bigcup\limits_i \overline{E}_{2,i}$, $\overline{E} = \overline{E}_1 \cup \overline{E}_2$ і

$$U(x,y)\mid_{\overline{E}} = \Omega(x,y),\ (x,y) \in \overline{E}, \tag{6}$$

$\Omega(x,y) := (\omega_i(x,y)) \in C^{(0,1)}(\overline{E})$ — задана вектор–функція.
Очевидно

$$\begin{gathered} \Omega(x,g_1(x)) = \Phi_1(x),\ \Omega_y(x,g_1(x)) = \Psi(x),\ x \in [x_1,x_0], \\ \Omega(x,g_2(x)) = \Phi_2(x),\ x \in [x_0,x_2]. \end{gathered} \tag{7}$$

Розіб'ємо область D^* характеристикою $y = y_1$ на дві області D_1 і D_3, $D^* = D_1 \cup D_3$, $D_1 = \{(x,y) \mid x \in [x_0,x_1],\ y \in (g_1(x),y_1)\}$, $D_3 = \{(x,y) \mid x \in [x_0,x_1],\ y \in (y_1,y_2)\}$. Тоді розв'язок задачі (1) — (7) $U(x,y) = U_s(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$, $U_s(x,y) := (u_{s,i}(x,y))$ — вектор–функції [2], де $U_1(x,y)$— розв'язок задачі Коші (1), (2), (6) при $(x,y) \in \overline{D}_1$, $U_2(x,y)$ — розв'язок задачі Дарбу (1), (3), (5), (6) при $(x,y) \in \overline{D}_2$ і $U_2(x_0,y) = U_1(x_0,y)$, $y \in [y_0,y_1]$, а $U_3(x,y)$— розв'язок задачі Гурса (1), (4), (5) при $(x,y) \in \overline{D}_3$ і $U_3(x,y_1) = U_1(x,y_1)$, $x \in [x_1,x_0]$.

Надалі вважатимемо, що $f[U(x,y)] \in C(\overline{B})$, $f : \overline{B} \to \mathbb{R}^n$, $\overline{B} \subset \mathbb{R}^{2(n+1)}$, $A_1(x,y) \in C^{(1.0)}(D)$, $A_2(x,y) \in C(D)$.

Тоді задачу (1) — (7) можна подати в еквівалентній інтегральній формі [**?**]:

$$U_s(x,y) = \begin{cases} \Omega(x,y),\ (x,y) \in \overline{E}_s,\ \overline{E}_3 := \overline{E}_1 \\ \Omega_s(x,y) + T_s F[U_s(\xi,\eta)],\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3, \end{cases} \tag{8}$$

де

$$\Omega_s(x,y) := (\omega_{s,i}(x,y))\text{— вектор–функції},$$

$$\omega_{1,i}(x,y) := \varphi_{1,i}(x) \exp\left(\int_y^{g_1(x)} a_{i,i}^{(1)}(x,\eta)d\eta\right) +$$

$$+ \int_{g_1(x)}^y \left[\psi_i(g_1^{-1}(\eta)) + a_{i,i}^{(1)}(g_1^{-1}(\eta),\eta)\varphi_{1,i}(g_1^{-1}(\eta))\right] k_{i,i}(x,y;g_1^{-1}(\eta),\eta)d\eta,\ (x,y) \in \overline{D}_1,$$

$$K(x,y;\xi,\eta) = (\delta_{i,j}k_{i,j}(x,y,\xi,\eta))\text{— матриця},$$

$$k_{i,i}(x,y;\xi,\eta) := \exp\left(\int_x^\xi a_{i,i}^{(2)}(\tau,\eta)d\tau + \int_y^\eta a_{i,i}^{(1)}(x,\tau)d\tau\right),$$

$$F[U_s(x,y)] := (F_i[U_s(x,y)]) := (f_i[U_s(x,y)] + (a_{i,i\,y}^{(2)}(x,y) +$$

$$+ a_{i,i}^{(1)}(x,y)a_{i,i}^{(2)}(x,y))u_{s,i}(x,y)),\ s = 1,2,3 \text{ — вектор–функція},$$

$$T_1F[U_1(\xi,\eta)] := \int_{g_1(x)}^y \int_{g_1^{-1}(\eta)}^x K(x,y;\xi,\eta)F[U_1(\xi,\eta)]d\xi d\eta,\ (x,y) \in \overline{D}_1,$$

$$\omega_{2,i}(x,y) := \varphi_{2,i}(x) \exp\left(\int_y^{g_2(x)} a_{i,i}^{(1)}(x,\eta)d\eta\right) +$$

$$+ \int_{g_2(x)}^y [\psi_i(g_1^{-1}(\eta)) + a_{i,i}^{(1)}(g_1^{-1}(\eta),\eta)\varphi_{1,i}(g_1^{-1}(\eta))]k_{i,i}(x,y;g_1^{-1}(\eta),\eta)d\eta +$$

$$+ T_{1,1}F_i[U_1(\xi,\eta)],\ i = \overline{1,n},\ (x,y) \in \overline{D}_2,$$

$$T_2F[U_2(\xi,\eta)] := \int_{g_2(x)}^{y}\int_{x_0}^{x} K(x,y;\xi,\eta)F[U_2(\xi,\eta)]d\xi d\eta,$$

$$T_{1,1}F_i[U_1(\xi,\eta)] := \int_{g_2(x)}^{y}\int_{g_1^{-1}(\eta)}^{x_0} k_{i,i}(x,y;\xi,\eta)F_i[U_1(\xi,\eta)]d\xi d\eta,$$

$$\omega_{3,i}(x,y) := \int_{y_1}^{y} \exp\left(\int_x^{x_1} a_{i,i}^{(2)}(\tau,\eta)d\tau + \int_y^{\eta} a_{i,i}^{(1)}(x,\tau)d\tau\right)\left[\varphi_i'(\eta) + a_{i,i}^{(1)}(x_1,\eta)\varphi_i(\eta)\right]d\eta +$$

$$+\omega_{1,i}(x,y_1)\exp(\int_y^{y_1} a_{i,i}^{(1)}(x,\eta)d\eta) + T_{1,2}F_i[U_1(\xi,\eta)],\ i=\overline{1,n},$$

$$T_{1,2}F_i[U_1(\xi,\eta)] := \int_{g_1(x)}^{y_1}\int_{g_1^{-1}(\eta)}^{x} k_{i,i}(x,y;\xi,\eta)F_i[U_1(\xi,\eta)]d\xi d\eta,$$

$$(x,y)\in\overline{D}_3,$$

$$T_3F[U_3(\xi,\eta)] := \int_{y_1}^{y}\int_{x_1}^{x} K(x,y;\xi,\eta)F[U_3(\xi,\eta)]d\xi d\eta.$$

Згідно постановки задачі $U_1(x_0,y) = U_2(x_0,y)$, $y\in[y_0,y_1]$ і $U_1(x,y_1) = U_3(x,y_1)$, $x\in[x_1,x_0]$, а отже $U_{1y}(x_0,y) = U_{2y}(x_0,y)$, $y\in[y_0,y_1]$ і $U_{1x}(x,y_1) = U_{3x}(x,y_1)$, $x\in[x_1,x_0]$.

Поскільки $(x,\theta_i(x,y_1))\in\overline{D}_1\cup\overline{E}_1$, тобто $U_3(x,\theta(x,y_1)) = U_1(x,\theta(x,y_1))$, то із (8) легко переконатись у справедливості рівностей

$$u_{3,i\,y}(x,y_1) - u_{1,i\,y}(x,y_1) = [\varphi_i'(y_1) + a_{i,i}^{(1)}(x_1,y_1)\varphi_i(y_1) - \psi_i(x_1) -$$

$$-a_{i,i}^{(1)}(x_1,y_1)\varphi_{1,i}(x_1)]\exp(\int_x^{x_1} a_{i,i}^{(2)}(\xi,y_1)d\xi) = 0,$$

$$\begin{gathered} u_{2,i\,x}(x_0,y) - u_{1,i\,x}(x_0,y) = \rho_i(x_0)\exp(\int_y^{y_0} a_{i,i}^{(1)}(x_0,\eta)d\eta),\ y\in[y_0,y_1], \\ \rho_i(x_0) := \varphi_{2,i}'(x_0) - \varphi_{1,i}'(x_0) + (g_1'(x_0) - g_2'(x_0))\psi_i(x_0). \end{gathered} \tag{9}$$

Таким чином справедлива [7] наступна

Лема 1. *Нехай $f[U(x,y)]\in C(\overline{B})$, а задача (1) — (7) має розв'язок в області $\overline{D}$.*

Якщо $\rho_i(x_0) = 0$ для всіх $i=\overline{1,n}$, то розв'язок задачі (1) — (7) $U(x,y)\in C^*(\overline{D})$ (буде регулярним), у супротивному випадку має місце рівність (9) і розв'язок $U(x,y)\in C^{(1.1)}(D\backslash I)\cap C^{(0.1)}(D)\cap C(\overline{D})$, $I = \{(x_0,y)\,|\,y\in[y_0,y_1]\}$ (розв'язок буде іррегулярним).

Означення 1. *Будемо говорити, що вектор–функція $F[U(x,y)]\in C_1(\overline{B})$, якщо вона задовольняє наступні умови [8, 9]:*

1) *$F[U(x,y)]\in C(\overline{B})$,*

2) *у просторі функцій $C(\overline{B}_1)$, $\overline{B}_1\subset\mathbb{R}^{2(2n+1)}$, $\Pi p_{xOy}\overline{B}_1 = \overline{D}$, існує така вектор–функція $H(x,y,U(x,y),U(x,\Theta(x,y));\,V(x,y),V(x,\Theta(x,y)) := H[U(x,y),V(x,y)]$, що*

   а) $H[U(x,y);\,U(x,y)]\equiv F[U(x,y)]$,

   б) для довільної з простору $C(\overline{D})$ пари вектор–функцій $U(x,y)$, $V(x,y)\in\overline{B}_1$, які задовольняють умову $U(x,y)\geq V(x,y)$, $(x,y)\in\overline{D}$, в області $\overline{B}_1$ виконується нерівність

$$H[U(x,y);V(x,y)] \leq H[V(x,y);U(x,y)], \tag{10}$$

3) вектор–функція $H[U(x,y);V(x,y)]$ в області $\overline{B}_1$ задовольняє умову Ліпшіца, тобто, для всяких з простору $C(\overline{D})$ вектор–функцій $U_r(x,y)$, $V_r(x,y) \in \overline{B}_1$, $r = 1,2$, виконується умова

$$|H[U_1(x,y);V_1(x,y)] - H[U_2(x,y);V_2(x,y)]| \leq \ L(|U_1(x,y) - U_2(x,y)| +$$

$$+ |V_1(x,y) - V_2(x,y)| + |U_1(x,\Theta(x,y)) - U_2(x,\Theta(x,y))| +$$

$$+ |V_1(x,\Theta(x,y)) - V_2(x,\Theta(x,y))|)$$

де $L = (\delta_{i,j} l_{i,j})$ — матриця Ліпшіца, $l_{i,j} \geq 0$, $i,j = \overline{1,n}$.

Очевидно, якщо вектор–функція $F[U(x,y)] \in C(\overline{B})$ і має обмежені частинні похідні першого порядку по всім своїм аргументам, розпочинаючи з третього, то $F[U(x,y)]$ завжди належить просторові $C_1(\overline{B})$. Обернене твердження несправедливе.

Встановимо достатні умови існування та єдиності регулярного (іррегулярного) розв'язку задачі (1) — (7) при $(x,y) \in \overline{D}$.

Нехай вектор–функції $Z_{s,p}(x,y) = (z_{s,i,p}(x,y))$, $V_{s,p}(x,y) = (v_{s,i,p}(x,y)) \in C(\overline{D})$ належать області $\overline{B}_1$, $s = 1,2,3$, $p \in \mathbb{N}$.

Введемо позначення:

$$W_{s,p}(x,y) := Z_{s,p}(x,y) - V_{s,p}(x,y),$$

$$f_s^p(x,y) := H[Z_{s,p}(x,y);V_{s,p}(x,y)],\ f_{s,p}(x,y) := H[V_{s,p}(x,y);Z_{s,p}(x,y)],$$

$$\alpha_{s,p}(x,y) := Z_{s,p}(x,y) - \Omega_s^p(x,y) - T_s f_s^p(\xi,\eta),$$

$$\beta_{s,p}(x,y) := V_{s,p}(x,y) - \Omega_{s,p}(x,y) - T_s f_{s,p}(\xi,\eta), \tag{11}$$

$$(x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3.$$

$$\Omega_1^p(x,y) = \Omega_{1,p}(x,y) = \Omega_1(x,y),\ \forall p \in \mathbb{N}\ \ (x,y) \in \overline{D}_1,$$

$$\Omega_s^p(x,y) := (\omega_{s,i}(x,y)\ |_{F_i[U_1(x,y)] = f^p_{s,i}(x,y)}),$$

$$\Omega_{s,p}(x,y) := (\omega_{s,i}(x,y)\ |_{F_i[U_1(x,y)] = f_{s,i,p}(x,y)}),\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 2,3.$$

Побудуємо послідовності вектор–функцій $\{Z_{s,p}(x,y)\}$ та $\{V_{s,p}(x,y)\}$ згідно формул [9, 10]

$$\begin{aligned} Z_{s,p+1}(x,y) &= \begin{cases} \Omega(x,y),\ (x,y) \in \overline{E}_s,\ \overline{E}_3 = \overline{E}_1 \\ \Omega_s^p(x,y) + T_s f_s^p(\xi,\eta),\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3, \end{cases} \\ V_{s,p+1}(x,y) &= \begin{cases} \Omega(x,y),\ (x,y) \in \overline{E}_s,\ \overline{E}_3 = \overline{E}_1, \\ \Omega_{s,p}(x,y) + T_s f_{s,p}(\xi,\eta),\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3, \end{cases} \end{aligned} \tag{12}$$

де за нульове наближення $Z_{s,0}(x,y),\ V_{s,0}(x,y)\in\overline{B}_1$ вибираємо довільні вектор–функції з простору $C(\overline{D}_s)$, які задовольняють умови

$$\begin{gathered} W_{s,0}(x,y)\geq 0,\ \ \alpha_{s,0}(x,y)\geq 0,\ \ \beta_{s,0}(x,y)\leq 0,\ (x,y)\in\overline{D}_s,\ s=1,2,3,\\ Z_{s,0}(x,y)\mid_{\overline{E}_s}=V_{s,0}(x,y)\mid_{\overline{E}_s}=\Phi(x,y),\ (x,y)\in\overline{E}_s. \end{gathered}\tag{13}$$

Надалі вектор–функції $Z_{s,0}(x,y),V_{s,0}(x,y)\in C(\overline{D}_s)$, $s=1,2,3$, які належать області $\overline{B}_1$ і задовольняють умови (13), будемо називатимемо функціями порівняння задачі (1) — (7).

Справедлива наступна

Лема 2. *Нехай $F[U(x,y)]\in C_1(\overline{B})$ і інтегральні рівняння (8) в просторі вектор–функцій $C(\overline{D}_s)$, $s=1,2,3$, мають розв'язки, які при $(x,y)\in\overline{D}_s$ задовольняють умови*

$$V_{s,0}(x,y)\leq U_s(x,y)\leq Z_{s,0}(x,y),\ (x,y)\in\overline{D}_s,\ s=1,2,3\tag{14}$$

де $Z_{s,0}(x,y),V_{s,0}(x,y)$ належать області $\overline{B}_1$ і задовольняють умови (2) — (6).
Тоді при $(x,y)\in\overline{D}_s$, $s=1,2,3$ справедливі нерівності (13).

Лема 3. *Якщо $F[U(x,y)]\in C_1(\overline{B})$, то множина вектор–функцій порівняння задачі (1) — (7) непорожня.*

Доведення. Нехай $\gamma(x,y)\in C(\overline{D})$ — довільна в області $\overline{B}$ вектор—функція, а

$$\lambda_s(x,y)=\begin{cases}\Omega(x,y),\ (x,y)\in\overline{E}_s,\ \overline{E}_3=\overline{E}_1,\\ \Omega_s(x,y)\mid_{U_s(x,y)=\gamma(x,y)}+T_sF[\gamma(\xi,\eta)],\ (x,y)\in\overline{D}_s,\ s=1,2,3.\end{cases}$$

Вважаючи, що визначені таким чином функції $\lambda_s(x,y)\in\overline{B}_1$, позначимо

$$\alpha_s(x,y)=\lambda_s(x,y)-\Omega_s(x,y)\mid_{U_s(x,y)=\lambda_s(x,y)}-T_sF[\lambda_s(\xi,\eta)],\ (x,y)\in\overline{D}_s,\ s=1,2,3,$$

$$\alpha_s(x,y)=0,\ (x,y)\in\overline{E}_s.$$

Тоді вектор–функції

$$Z_{s,0}(x,y)=\lambda_s(x,y)+\left|\alpha_s(x,y)\right|,$$

$$V_{s,0}(x,y)=\lambda_s(x,y)-\left|\alpha_s(x,y)\right|,\ (x,y)\in\overline{D}_s,\ s=1,2,3,$$

при умові, що $Z_{s,0}(x,y),V_{s,0}(x,y)\in\overline{B}_1$, є функціями порівняння задачі (1) — (7). Дійсно, приймаючи до уваги умову (10), маємо

$$W_{s,0}(x,y)=2\left|\alpha_s(x,y)\right|\geq 0,$$

$$\alpha_{s,0}(x,y)=\lambda_s(x,y)+\left|\alpha_s(x,y)\right|-\Omega_s^0(x,y)-T_sf_s^0(\xi,\eta)=$$

$$=\left|\alpha_s(x,y)\right|+\alpha_s(x,y)+\Omega_s(x,y)\mid_{U_s(x,y)=\lambda_s(x,y)}-$$

$$-\Omega_s^0(x,y)+T_s(H[\lambda_s(\xi,\eta);\lambda_s(\xi,\eta)]-H[Z_{s,0}(\xi,\eta);V_{s,0}(\xi,\eta)])\geq 0,$$

аналогічно $\beta_{s,0}(x,y)\leq 0$, $(x,y)\in\overline{D}_s$, $s=1,2,3$.

Із (11) та (12) одержуємо:

$$\begin{gathered} Z_{s,p}(x,y) - Z_{s,p+1}(x,y) = \alpha_{s,p}(x,y), \\ V_{s,p}(x,y) - V_{s,p+1}(x,y) = \beta_{s,p}(x,y), \end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered} \alpha_{s,p}(x,y) + \alpha_{s,p+1}(x,y) = Z_{s,p}(x,y) - Z_{s,p+2}(x,y), \\ \beta_{s,p}(x,y) + \beta_{s,p+1}(x,y) = V_{s,p}(x,y) - V_{s,p+2}(x,y),\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3. \end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered} W_{s,p+1}(x,y) = \Omega_s^p(x,y) - \Omega_{s,p}(x,y) + T_s(f_s^p(\xi,\eta) - f_{s,p}(\xi,\eta)), \\ W_{s,p+1}(x,y) \mid_{\overline{E}_s} = 0, \end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered} \alpha_{s,p+1}(x,y) = \Omega_s^p(x,y) - \Omega_s^{p+1}(x,y) + T_s(f_s^p(\xi,\eta) - f_s^{p+1}(\xi,\eta)), \\ \beta_{s,p+1}(x,y) = \Omega_{s,p}(x,y) - \Omega_{s,p+1}(x,y) + T_s(f_{s,p}(\xi,\eta) - f_{s,p+1}(\xi,\eta)). \end{gathered} \tag{18}$$

Враховуючи (10), (13) із (15) та (17) при $p = 0$ маємо

$$Z_{s,0}(x,y) \geq Z_{s,1}(x,y),\ V_{s,0}(x,y) \leq V_{s,1}(x,y),$$

$$W_{s,1}(x,y) \leq 0,\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3.$$

Нехай при $(x,y) \in \overline{D}_s$ виконуються умови

$$Z_{s,0}(x,y) \geq V_{s,1}(x,y),\ V_{s,0}(x,y) \leq Z_{s,1}(x,y),\ s = 1,2,3. \tag{19}$$

Тоді, враховуючи попередні нерівності, одержуємо

$$V_{s,0}(x,y) \leq Z_{s,1}(x,y) \leq V_{s,1}(x,y) \leq Z_{s,0}(x,y),\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3,$$

тобто, якщо функції порівняння задачі (1)—(7) $Z_{s,0}(x,y)$, $V_{s,0}(x,y) \in \overline{B}_1$, то і $Z_{s,1}(x,y)$, $V_{s,1}(x,y) \in \overline{B}_1$, $s = 1,2,3$.

Із (18), враховуючи одержані нерівності та (10), при $p = 0$ маємо $\alpha_{s,1}(x,y) \leq 0$, $\beta_{s,1}(x,y) \geq 0$ для $\forall (x,y) \in \overline{D}_s$, а отже із (15) та (17) при $p = 1$ і $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$, випливає

$$Z_{s,1}(x,y) \leq Z_{s,2}(x,y),\ V_{s,1}(x,y) \geq V_{s,2}(x,y),$$

$$W_{s,2}(x,y) \geq 0.$$

Поскільки в силу умов (10), (19) при $(x,y) \in \overline{D}_s$

$$\alpha_{s,0}(x,y) + \alpha_{s,1}(x,y) = Z_{s,0}(x,y) - V_{s,1}(x,y) + \Omega_{s,0}(x,y) -$$

$$-\Omega_s^1(x,y) + T_s(f_{s,0}(\xi,\eta) - f_s^1(\xi,\eta)) \geq 0,$$

$$\beta_{s,0}(x,y) + \beta_{s,1}(x,y) = V_{s,0}(x,y) - Z_{s,1}(x,y) + \Omega_s^0(x,y) -$$

$$-\Omega_{s,1}(x,y) + T_s(f_s^0(\xi,\eta) - f_{s,1}(\xi,\eta)) \leq 0,$$

то із (16) при $p = 0$ і $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$ маємо $Z_{s,0}(x,y) \geq Z_{s,2}(x,y)$, $V_{s,0}(x,y) \leq V_{s,2}(x,y)$. Але

$$\begin{gathered} Z_{s,p+1}(x,y) - V_{s,p+2}(x,y) = \\ = \Omega_s^p(x,y) - \Omega_{s,p+1}(x,y) + T_s(f_s^p(\xi,\eta) - f_{s,p+1}(\xi,\eta)), \\ V_{s,p+1}(x,y) - Z_{s,p+2}(x,y) = \\ = \Omega_{s,p}(x,y) - \Omega_s^{p+1}(x,y) + T_s(f_{s,p}(\xi,\eta) - f_s^{p+1}(\xi,\eta)), \end{gathered} \tag{20}$$

для $\forall p \in \mathbb{N}$, а отже, враховуючи попередні нерівності із (20) при $p = 0$ одержимо

$$Z_{s,1}(x,y) \leq V_{s,2}(x,y),\ V_{s,1}(x,y) \leq V_{s,2}(x,y),\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3,$$

тобто в області $\overline{B}_1$ виконуються умови

$$V_{s,0}(x,y) \leq Z_{s,1}(x,y) \leq V_{s,2}(x,y) \leq Z_{s,2}(x,y) \leq V_{s,1}(x,y) \leq Z_{s,0}(x,y),$$

$$(x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3,\ \text{а}\ \alpha_{s,2}(x,y) \geq 0,\ \beta_{s,2}(x,y) \leq 0.$$

Методом математичної індукції переконуємось, що при виконанні умов (19) справедливими будуть нерівності

$$\begin{gathered} \alpha_{s,2p}(x,y) \geq -\alpha_{s,2p+1}(x,y) \geq \alpha_{s,2p+2}(x,y) \geq -\alpha_{s,2p+3}(x,y), \\ \beta_{s,2p}(x,y) \leq -\beta_{s,2p+1}(x,y) \leq \beta_{s,2p+2}(x,y) \leq -\beta_{s,2p+3}(x,y), \\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3, \\ V_{s,2p}(x,y) \leq Z_{s,2p+1}(x,y) \leq V_{s,2p+2}(x,y) \leq Z_{s,2p+3}(x,y) \leq \\ \leq V_{s,2p+3}(x,y) \leq Z_{s,2p+2}(x,y) \leq V_{s,2p+1}(x,y) \leq Z_{s,2p}(x,y), \end{gathered} \tag{21}$$

для $\forall p = 0,1,2,...,$, а отже, для $\forall p$ $Z_{s,p}(x,y)$, $V_{s,p}(x,y) \in \overline{B}_1$. Таким чином справедлива наступна

Теорема 1. *Нехай $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{B})$, а вектор–функції $Z_{s,0}(x,y)$, $V_{s,0}(x,y) \in C(\overline{D}_s)$, $s = 1,2,3$ є функціями порівняння задачі (1) — (7).*

Тоді послідовності вектор–функцій $\{Z_{s,p}(x,y)\}$ та $\{V_{s,p}(x,y)\}$, побудовані згідно закону (12), при виконанні умов (19) в області $\overline{B}_1$ задовольняють нерівності (21) для $\forall p = 0,1,2,....$

Покажемо, що побудовані послідовності вектор–функцій $\{Z_{s,p}(x,y)\}$ та $\{V_{s,p}(x,y)\}$ в областях $\overline{D}_s$, $s = 1,2,3$, при $p \to \infty$ збігаються рівномірно до єдиного розв'язку (регулярного або іррегулярного) відповідного інтегрального рівняння із (8). В силу нерівностей (21) для цього достатньо показати, що

$$\lim_{p\to\infty} W_{s,p}(x,y) = 0.$$

Зауважимо, що $\Omega_1^p(x,y) - \Omega_{1,p}(x,y) = 0$, $\Omega_2^p(x,y) - \Omega_{2,p}(x,y) = T_{1,1}[f_1^p(\xi,\eta) - f_{1,p}(\xi,\eta)]$, $\Omega_3^p(x,y) - \Omega_{3,p}(x,y) = T_{1,2}[f_1^p(\xi,\eta) - f_{1,p}(\xi,\eta)]$.

Нехай

$$\|L\| = l,\ \max_{s,i} \sup_{\overline{D}_s} \{|W_{s,i,0}(x,y)|, |W_{s,i,0}(x,\theta_i(x,y))|\} = d,$$

$$\sup_{\overline{D}}(1, y - y_0 + x - x_1) = q,\ \max_i \sup_{\overline{D}\times\overline{D}} k_{i,i}(x,y;\xi,\eta) \leq 0,25\overline{K}.$$

Тоді із (17) методом математичної індукції переконуємось у справедливості в області $\overline{D}$ оцінок

$$\max_{s,i} \sup_{\overline{D}_s} |W_{s,i,p}(x,y)| := \|W_{s,p}(x,y)\| \leq \frac{1}{p!}[\overline{K}lqn(y - y_0 + x - x_1)]^p]d, \tag{22}$$

а отже,

$$\lim_{p\to\infty} Z_{s,p}(x,y) = \lim_{p\to\infty} V_{s,p}(x,y) = U_s(x,y),\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3.$$

Перейшовши у формулах (12) до границі, коли $p \to \infty$ переконуємось, що граничні вектор–функції $U_s(x,y)$ є розв'язками відповідних інтегральних рівнянь (8) при $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді послідовності вектор–функцій $\{Z_{s,p}(x,y)\}$ та $\{V_{s,p}(x,y)\}$, побудовані згідно формул (12), де за нульові наближення вибираємо вектор–функції порівняння задачі (1)—(7), при виконанні умов (19):*

а) збігаються рівномірно в області $\overline{D}_s$, $s = 1,2,3$ до єдиного в просторі $C^*(\overline{D}_s)$ розв'язку $U_s(x,y)$ відповідного інтегрального рівняння (8);

б) мають місце оцінки (22);

в) в області $\overline{B}_1$ виконуються нерівності

$$V_{s,2p}(x,y) \leq Z_{s,2p+1}(x,y) \leq V_{s,2p+2}(x,y) \leq Z_{s,2p+3}(x,y) \leq$$

$$\leq U_s(x,y) \leq V_{s,2p+3}(x,y) \leq Z_{s,2p+2}(x,y) \leq V_{s,2p+1}(x,y) \leq Z_{s,2p}(x,y), \tag{23}$$

$$(x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3,\ p = 0,1,2,...$$

Доведення. Єдиність розв'язку інтегральних рівнянь (8) при $(x,y) \in \overline{D}_s$, доводиться методом від супротивного.

Для доведення справедливості нерівностей (23) припустимо, що для деякого номера p в деякій точці $(x,y) \in \overline{D}_s$ $Z_{s,2p+1}(x,y) > U_s(x,y)$. Тоді на підставі нерівностей (21) в даній точці (x,y) $Z_{s,2(p+\nu)+1}(x,y) \geq Z_{s,2p+1}(x,y) > U_s(x,y)$ для $\forall \nu \in \mathbb{N}$, а отже послідовність вектор–функцій $\left\{Z_{s,2(p+\nu)+1}(x,y)\right\}$ при $\nu \to \infty$ в точці $(x,y) \in \overline{D}_s$ не збігається до розв'язку $U_s(x,y)$ відповідного інтегрального рівняння (8), що протирічить доведеному. Аналогічно доводяться всі інші нерівності у (23).

Зауважимо, оскільки розв'язок задачі (1) — (7) $U(x,y) \equiv U_s(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$, то при виконанні умов теореми 1 він існує і є єдиним, причому $U(x,y) \in C^*(\overline{D})$, якщо $\rho_i(x_0) = 0$, $i = \overline{1,n}$.

Наслідок 1. *Нехай крайові умови (2)—(4) є однорідними,* $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{B})$, *причому* $F[U(x,y)] \equiv H[U(x,y);0]$.

Тоді, якщо $F[0] \leq (\geq) 0$ *в області* $\overline{B}$, *то розв'язок задачі (1) — (7) при* $(x,y) \in \overline{D}$ *задовольняє нерівність* $U(x,y) \leq (\geq) 0$.

Відмітимо, якщо рівняння (1) є скалярним і лінійним, тобто $f[u(x,y)] = f_1(x,y) + a_3(x,y)u(x,y) + a_4(x,y)u(x,\theta(x,y))$, $a_3(x,y)$, $a_4(x,y)$, $f_1(x,y) \in C(\overline{D})$, то для виконання твердження наслідку 1 достатньо вважати, що $f_1(x,y) \leq (\geq) 0$, $a_4(x,y) \leq 0$, $a_1(x,y)a_2(x,y) + a_{1x}(x,y) + a_3(x,y) \leq 0$ при $(x,y) \in \overline{D}$.

Наслідок 2. *Якщо* $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{B})$ *і виконуються умови (19), то нерівності (13) є необхідними і достатніми умовами для виконання в області* $\overline{B}$ *нерівностей (14).*

Зауваження. Якщо $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{B})$ і $F[U(x,y)] \equiv H[U(x,y);0]$, то для побудови двосторонніх наближень до розв'язку задачі (1) — (7) достатньо будувати одну послідовність вектор–функцій $\{Z_{s,p}(x,y)\}$, що у двічі зменшує кількість операцій при реалізації двостороннього методу (12), (13).

Поряд із системою (1) розглянемо систему

$$L_2 Z(x,y) = f^{(1)}(x,y,Z(x,y),Z(x,\theta(x,y)) := f^{(1)}[Z(x,y)], \tag{24}$$

$$Z(x,y) = (z_i(x,y))\text{—вектор–функція},\ f^{(1)} : \overline{B} \to \mathbb{R}^n,\ \overline{B} \in \mathbb{R}^{2n+1}.$$

Вважаємо, що:

1) $f[U(x,y)],\ f^{(1)}[Z(x,y)] \in C_1(\overline{B})$,

2) вектор–функція $f[U(x,y)]$ має обмежені частинні похідні першого порядку по всім своїм аргументам, розпочинаючи з третього

$$\frac{\partial f_i[U(x,y)]}{\partial u_j(x,y)} := b_{i,j}(x,y,U(x,y),U(x,\Theta(x,y))) := b_{i,j}[U(x,y)] < \infty,$$

$$\frac{\partial f_i[U(x,y)]}{\partial u_j(x,\theta_j(x,y))} := c_{i,j}(x,y,U(x,y),U(x,\Theta(x,y))) := c_{i,j}[U(x,y)] < \infty$$

причому для $\forall (x,y,U(x,y),U(x,\Theta(x,y)) \in \overline{B}$ виконуються нерівності

$$\begin{gathered} b_{i,j}[U(x,y)] + \delta_{i,j}[a^{(1)}_{i,j}(x,y)a^{(2)}_{i,j}(x,y) + a^{(1)}_{i,j\,x}(x,y)] \leq 0, \\ c_{i,j}[U(x,y)] \leq 0,\ i,j = \overline{1,n}, \end{gathered} \tag{25}$$

3) для всякої вектор–функції $V(x,y) \in C(\overline{B})$

$$f[V(x,y)] \geq f^{(1)}[V(x,y)]. \tag{26}$$

Теорема 3. *Нехай вектор–функції* $f[U(x,y)]$, $f^{(1)}[Z(x,y)]$ *задовольняють умови 1)-3). Тоді для розв'язків задач (1) — (7) та (24), (2) — (7) виконується нерівність*

$$U(x,y) \geq Z(x,y), (x,y) \in \overline{D}.$$

Доведення. Згідно теореми 2 розв'язки задач (1) — (7), (24), (2) — (7) існують і вони єдині, отже, позначивши $W(x,y) := U(x,y) - Z(x,y)$ маємо

$$L_2 W(x,y) = A_3(x,y)W(x,y) + A_4(x,y)W(x,\Theta(x,y)) + A_5(x,y) \qquad (27)$$

де $A_3(x,y) = (\widetilde{b}_{i,j}(x,y))$, $A_4(x,y) = (\widetilde{c}_{i,j}(x,y))$ — матриці, $\widetilde{b}_{i,j}(x,y)$, $\widetilde{c}_{i,j}(x,y)$ відповідно похідні $b_{i,j}[U(x,y)]$, $c_{i,j}[U(x,y)]$ при деяких фіксованих значеннях $U(x,y)$, $U(x,\Theta(x,y)) \in \overline{B}$, а $A_5(x,y) := f[Z(x,y)] - f^{(1)}[Z(x,y)] \geq 0$ в силу (26).

Очевидно, вектор–функція $W(x,y)$ задовольняє однорідні умови (2) — (6). Тоді на підставі наслідку 1 розв'язок системи (27) з однорідними умовами (2) — (6) $W(x,y) \geq 0$, $(x,y) \in \overline{D}$, тобто $U(x,y) \geq Z(x,y), (x,y) \in \overline{D}$.

1. *Маринець В.В., Питьовка О.Ю.* Один підхід побудови двосторонніх наближень до розв'язку крайової задачі у випадку диференціально - функціонального рівняння гіперболічного типу // Наук. вісник Ужгород.ун–ту. Сер. матем і інформ. — 2011. — Вип.22, №2.— С.101—109.
2. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. — М.:Мир, 1969. - 448с.
3. *Маринець В.В.* Деякі підходи до побудови наближеного розв'язку задачі Гурса для систем визначених квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними з аргументом, що відхиляється // Укр.мат.журнал — 1995. —Т.47, №12. — С.1667—1675.
4. *Marynets V.V.,Dobryden A.V.* About one characteristic initial value problem. //Nonlinear oscillations.— 2001. — Volum 4,№4. — P.487—499.
5. *Перестюк М.О., Маринець В.В.* Теорія рівнянь математичної фізики.— К:Либідь, 2006. — 424 с.
6. *Маринець В.В.* Аналітичні методи в теорії ДРЧП гіперболічного типу. — Ужгород: УжНУ "Говерла", 2006. — 136 с.
7. *В.В.Маринець, А.В.Добридень* Про одну задачу Коші–Дарбу для квазілінійного рівняння гіперболічного типу // Наук. вісник Ужгород.ун–ту. Сер. матем і інформ. — 2008. — Вип.16.— С.101—109.
8. *В.В.Маринець, О.Ю.Питьовка* Про одну крайову задачу для систем квазілінійних рівнянь гіперболічного типу // Наук. вісник Ужгород.ун–ту. Сер. матем і інформ. — 2008. — Вип.19.— С.71—80.
9. *В.В.Маринець, О.Ю.Питьовка* Про крайову задачу для диференціально–функціональних рівнянь гіперболічного типу // Наук. вісник Ужгород.ун–ту. Сер. матем і інформ. — 2010. — Вип.20.— С.79—89.
10. *Курпель Н.С., Шувар Б.А.* Двусторонние операторные неравенства и их применение — К:Наукова думка, 1980. — 268 с.

Одержано 05.03.2012