УДК 519.21

**В. Й. Дзямко** (Ужгородський нац. ун-т)
**Ю. В. Козаченко** (Київський нац. ун-т імені Т. Шевченка)
**А. І. Моца** (Ужгородський нац. ун-т)

# ПРО ЗОБРАЖЕННЯ $\varphi$-СУБГАУССОВИХ ПЕРІОДИЧНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ У ВИГЛЯДІ РЯДІВ

The conditions fon existence of representation $\varphi$-subgaussian periodic random processes in the form of series are found. The approximation of such processes in space $L_2([0,\pi],\mu)$ in studied.

Отримані умови існування зображень $\varphi$-субгауссових періодичних випадкових процесів у вигляді рядів. Досліджена апроксимація таких процесів у просторі $L_2([0,\pi],\mu)$.

## Вступ

Розклади випадкових процесів у ряди використовуються для апроксимації цих процесів, збереження їх траєкторій, моделювання. Тому важливо досліджувати умови швидкості збіжності цих розкладів у різних функціональних просторах. В роботі вивчаються умови швидкості збіжності розкладів $\varphi$-субгауссових (зокрема, гауссових) періодичних випадкових процесів в просторі з мірою $L_2\left([0,\pi],\mu\right)$, де $\mu(\cdot)$ – деяка скінченна міра.

Робота складається з вступу та чотирьох розділів. В першому формулюються необхідні відомості з теорії просторів $\varphi$-субгауссових випадкових величин. В другому – доведена загальна теорема про швидкість збіжності розкладу періодичних $\varphi$-субгауссових процесів за повною системою ортонормованих тригонометричних поліномів. В третьому розділі вивчаються розклади процесів за системами косинусів, а в четвертому – за поліномами Лежандра.

## 1. Простори $\varphi$-субгауссових випадкових величин та $\varphi$-субгауссові випадкові процеси

В роботах [1–3] були введені поняття $\varphi$-субгауссових величин, в монографії [5] та в роботі [4] вивчалися властивості просторів $\varphi$-субгауссових величин та $\varphi$-субгауссових процесів.

Сформулюємо допоміжні визначення і факти.

**Означення 1.** [6, 7] Неперервна парна опукла функція $\varphi=\{\varphi(x),\ x\in\mathbb{R}\}$ називається $N$-функцією Орліча, якщо $\varphi(0)=0$ та $\varphi(x)>0$ при $x>0$ і виконуються співвідношення:

$$(A_0)\ \lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x}=0,\quad (A_\infty)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=\infty.$$

Прикладами $N$-функцій є такі функції:

$$\varphi(x)=c\cdot|x|^\alpha,\ \ c>0,\ \alpha>1;\quad \varphi(x)=\exp\{|x|\}-x-1;$$

$$\varphi(x)=\{a\cdot|x|^\alpha\}-1,\ \ a>0,\ \alpha>1.$$

**Лема 1.** [6]. *Кожну $N$-функцію $\varphi(x)$ можна зобразити у вигляді інтеграла $\varphi(x)=\int\limits_0^{|x|}f(x)dx$, де $f(x)$ – монотонно неспадна неперервна справа функція, така, що $f(0)=0$, $f(x)\to\infty$ при $x\to\infty$.*

Функцію $f(x)$ називатимемо щільністю $N$-функції $\varphi(x)$.

**Означення 2.** [6]. Нехай $\varphi = \{\varphi(x),\ x \in \mathbb{R}\}$ деяка $N$-функція. Функція $\varphi^*$ така, що $\varphi^*(x) = \sup\limits_{y\in\mathbb{R}} |xy - \varphi(y)|$, називається перетворенням Юнга-Фенхеля функції $\varphi$.

В [6] доведено, що $\varphi^*$ є також $N$-функцією.

**Умова Q.** [4]. Скажемо, що для $N$-функції виконується умова $Q$, якщо

$$\lim_{x\to 0}\inf \frac{\varphi(x)}{x} = C > 0,$$

де не виключається можливість для $C$ прийняти нескінченне значення.

Прикладом $N$-функцій, для яких виконується умова $Q$, є функції:

$$\varphi(x) = |x|^\alpha,\ 1 < \alpha \le 2;\ \varphi(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при} \quad |x| \le 1, \\ |x|^\alpha & \text{при} \quad |x| > 1; \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \exp\{|x|^\alpha\} - 1,\ 1 < \alpha \le 2.$$

**Означення 3.** [3, 4]. Нехай $\varphi$ – $N$-функція, для якої виконується умова $Q$. Скажемо, що випадкова величина $\xi$ належить простору $Sub_\varphi(\Omega)$, якщо $E\xi = 0$ та існує стала $a \ge 0$ така, що $E\exp\{\lambda\xi\} \le \exp\{\varphi(\lambda a)\}$ при всіх $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Теорема 1.** [3, 4]. *Простір $sub_\varphi(\Omega)$ є простором Банаха відносно норми*

$$\tau_\varphi(\xi) = \inf\{a \ge 0 : E\exp\{\lambda\xi\} \le \exp\{\varphi(\lambda a)\},\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

**Зауваження 1.** Коли $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, то простір $Sub_\varphi(\Omega)$ називається простором субгауссових випадкових величин. Гауссові центровані випадкові величини належать цьому простору та $\tau^2(\xi) = E\xi^2$.

**Означення 4.** [3, 4]. Випадковий процес $X = \{X(t),\ t \in T\}$ називається $\varphi$-субгауссовим, якщо при кожному $t \in T$ випадкова величина $X(t)$ є $\varphi$-субгауссовою.

Зауважимо, що центрований гауссів процес $X = \{X(t),\ t \in T\}$ є субгауссовим (тобто $\varphi$-субгауссовим з $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$).

**Означення 5.** [5]. Сім'я $\Delta$ випадкових величин з простору $Sub_\varphi(\Omega)$ називається строго $\varphi$-субгауссовою, якщо існує стала $C_\Delta$ така, що для будь-яких $\xi_i \in \Delta$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i \in I$, справджується нерівність:

$$\tau_\varphi\left(\sum_{i\in I} M\xi_i\right) \le C_\Delta \left(E\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

де $I$ – будь-яка скінченна множина цілих чисел.

Сталу $C_\Delta$ називатимемо *визначальною сталою сім'ї* $\Delta$.

**Означення 6.** [5]. Строго $\varphi$-субгауссовим називається такий $\varphi$-субгауссовий процес $X = \{X(t), t \in T\}$, для якого сім'я випадкових величин $\{X(t), t \in T\}$ є строго $\varphi$-субгауссовою.

Визначальну сталу цієї сім'ї $C_X$ будемо називати визначальною сталою строго $\varphi$-субгауссового випадкового процесу $X$.

Приклади строго $\varphi$-субгауссових випадкових процесів та їх властивості можна знайти в монографії [5].

Гауссові центровані випадкові процеси є строго субгауссовими з визначальною сталою $C_X = 1$.

**Лема 2.** *Нехай $X = \{X(\theta),\, \theta \in [0,\pi]\}$ – вимірний строго $\varphi$-субгауссовий випадковий процес з визначальною сталою $C_X$, $\mu(\cdot)$ – міра на $[0,\pi]$. Якщо виконується умова*

$$\int_0^\pi E\left|X(\theta)\right|^2 d\mu(\theta) < \infty, \tag{1}$$

*то при будь-якому $\varepsilon > c\left|f\left(\frac{c^{\frac{1}{2}}\cdot 2}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\right)\right|^2$ справджується нерівність*

$$P\left\{\left(\int_0^\pi \left|X(\theta)\right|^2 d\mu(\theta)\right)^{\frac{1}{2}} > \varepsilon\right\} \le 2\exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)\right\}, \tag{2}$$

*де*

$$c = \left(C_x^2 \cdot \int_0^\pi E\left|X(\theta|\right|^2 d\mu(\theta)\right)^{\frac{1}{2}},$$

*$\varphi^*(x)$ – перетворення Юнга-Фенхеля $N$-функції $\varphi$, $f(\cdot)$ - неспадна на $\mathbb{R}$ функція.*

Ця лема – частинний випадок теореми 2.1 з роботи [8].

**Наслідок 1.** *Нехай $X = \{X(\theta),\, \theta \in [0,\pi]\}$ – центрований гауссів випадковий процес, тоді справджується нерівність*

$$P\left\{\left(\int_0^\pi \left|X(\theta)\right|^2 d\mu(\theta)\right)^{\frac{1}{2}} > \varepsilon\right\} \le 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2\widehat{c}^{\,2}}\right\} \tag{3}$$

*при $\varepsilon > 2\widehat{c}$, де*

$$\widehat{c} = \left(\int_0^\pi E\left|X(\theta)\right|^2 d\mu(\theta)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

***Доведення.*** Оскільки центрований гаусів процес є строго субгауссовим ($\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, тобто $f(x) = x$), то (3) є частинним випадком (2).

## 2. Швидкість збіжності розкладів у ряд строго $\varphi$-субгауссових випадкових процесів у просторі $L_2\left([0,T],\mu\right)$

Нехай $X = \{X(\theta),\, \theta \in \mathbb{R}\}$ – строго $\varphi$-субгауссовий періодичний з періодом $2\pi$ випадковий процес, такий, що $X(t) = X(-t)$, причому

$$E\left|X(\theta)\right|^2 < \infty,\; EX(\theta) = 0,\; EX(\theta)X(\zeta) = R(\cos\theta, \cos\zeta).$$

Будемо вважати, що $X(\theta)$ – неперервний в середньому квадратичному випадковий процес, тобто $R(t,s)$ – неперервна функція. Оскільки для неперервних в середньому квадратичному процесів завжди існує вимірна модифікація, то вважатимемо, що процес $X$-вимірний. При виконанні всіх вище сформульованих умов, процес $X$ будемо називати стандартним процесом. Розглядатимемо стандартний процес $X$ на відрізку $[0;\pi]$.

Нехай $\mu(\cdot)$ деяка скінченна міра на $[0;\pi]$. Оскільки

$$E\left(\int\limits_0^\pi \left|X(\theta)\right|^2 d\mu(\theta)\right) = \int\limits_0^\pi E\left|X(\theta)\right|^2 d\mu(\theta) = \int\limits_0^\pi R(\cos\theta,\cos\zeta)d\mu(\theta) < \infty,$$

то з імовірністю одиниця існує інтеграл $\int\limits_0^\pi \left|X(\theta)\right|^2 d\mu(\theta)$.

Нехай $T_k(\theta)$ – повна ортонормована система дійсних тригонометричних поліномів степені $k$ на просторі $\{[0,T],\mu\}$. Тоді $X(\theta)$ можна зобразити у вигляді ряду

$$X(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k T_k(\theta), \tag{4}$$

де $\xi_k = \int\limits_0^T X(\theta)T_k(\theta)d\mu(\theta)$.

Ряд (4) збіжний в нормі простору $L_2\left\{[0,\pi],\mu\right\}$ з імовірністю одиниця.

Нехай $X_N(\theta) = \sum\limits_{k=0}^{N} \xi_k \cdot T_k(\theta)$, $\Delta_N(\theta) = X(\theta) - X_N(\theta) = \sum\limits_{l=N+1}^{\infty} \xi_k \cdot T_k(\theta)$ – похибка при апроксимації процесу $X(\theta)$ сумою $X_N(\theta)$. Тоді

$$\tau^2\left(\Delta_N(\theta)\right) \le C_X^2 \cdot E\left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \xi_k T_k(\theta)\right)^2 = C_X^2 \cdot \sum_{l=N+1}^{\infty}\sum_{k=N+1}^{\infty} E(\xi_k\cdot\xi_l)\cdot T_k(\theta)\cdot T_l(\theta).$$

Отже,

$$\int\limits_0^\pi \tau^2(\Delta_N(\theta)d\mu(\theta) \le C_X^2 \cdot \int\limits_0^\pi E\left|\Delta_N(\theta)\right|^2 d\mu(\theta) =$$

$$= C_X^2 \cdot \sum_{l=N+1}^{\infty}\sum_{k=N+1}^{\infty} E(\xi_k\cdot\xi_l)\cdot \int\limits_0^\pi T_k(\theta)T_l(\theta)d\mu(\theta) = C_X^2 \cdot \sum_{k=N+1}^{\infty} E\xi_k^2.$$

Введемо позначення $C_N = C_X^2 \cdot \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} E\xi_k^2$.

**Теорема 2.** *Нехай $X$ – стандартний процес. Якщо є збіжним ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} E\xi_k^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} R(\cos\theta, \cos\zeta) T_k(\theta) T_k(\zeta) d\mu(\theta) d\mu(\zeta),$$

*тоді при* $\varepsilon > C_N \cdot \left| f\left(\frac{C_N^{\frac{1}{2}} \cdot 2}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\right)\right|^2$ *справджується нерівність*

$$P\left\{\left(\int_0^{\pi} |\Delta_N(\theta)|^2 \, d\mu(\theta)\right)^{\frac{1}{2}} > \varepsilon\right\} \le 2\exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{\varepsilon}{C_N}\right)\right\}, \tag{5}$$

*де $\varphi^*(x)$ – перетворення Юнга-Фенхеля $N$-функції $\varphi$.*

***Доведення.*** За умовою теореми випадковий процес $\Delta_N(\theta)$ є строго $\varphi$-субгауссовим. Тому нерівність (5) випливає з нерівності (2).

**Зауваження.** Оскільки функція $f(u)$ неспадна, то при будь-якому $\varepsilon > 0$ знайдеться $N_\varepsilon$ таке, що для довільного $N > N_\varepsilon$ справджується нерівність (5).

**Наслідок 2.** *Якщо $X(\theta)$ – центрований гауссів процес, тоді нерівність*

$$P\left\{\left(\int_0^{\pi} |\Delta_n(\theta)|^2 \, d\mu(\theta)\right)^{\frac{1}{2}} > \varepsilon\right\} \le 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2\widehat{C}_N}\right\} \tag{6}$$

*справджується при будь-якому $\varepsilon > 2\widehat{C}_N$, де $\widehat{C}_N = \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} E\xi_k^2$.*

## 3. Розклад стандартного процесу за системою косинусів

Нехай $T_k(\theta) = c_k \cdot \cos k\theta$, де $k = 0, 1, 2, \ldots$, причому $c_0 = \frac{1}{\pi}$, $c_k = \frac{2}{\pi}$ при всіх $k \ge 1$. Ця система функцій є повною ортонормованою системою в просторі $\{[0,\pi], \mu\}$, де $\mu(\cdot)$ – міра Лебега. Тому

$$E\xi_k^2 = c_k^2 \cdot \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} R(\cos\theta, \cos\zeta) \cos k\theta \cdot \cos k\zeta d\theta d\zeta.$$

Позначимо $z_k = \int\limits_0^{\pi} R(\cos\theta, \cos\zeta) \cos k\theta d\theta$. Тоді, очевидно,

$$z_k = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} R(\cos\theta, \cos\zeta) \cos k\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} R\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{k}\right), \cos\zeta\right) \cdot \cos(k\theta + \pi) d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} R\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{k}\right), \cos\zeta\right) \cos k\theta d\theta.$$

Отже,

$$z_k = -\frac{1}{4}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[R\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{k}\right),\cos\zeta\right) - R(\cos\theta,\cos\zeta)\right]\cos k\theta d\theta.$$

Аналогічно отримаємо

$$\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi} R(\cos\theta,\cos\zeta)\cos k\theta\cdot\cos k\zeta d\theta d\zeta = \frac{1}{16}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[R\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{k}\right),\cos\left(\zeta+\frac{\pi}{k}\right)\right) - \right.$$

$$-R\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{k}\right),\cos\zeta\right) - R\left(\cos\theta,\cos\left(\zeta+\frac{\pi}{k}\right)\right) +$$

$$+R(\cos\theta,\cos\zeta)]\cos k\theta\cdot\cos k\zeta\, d\theta d\zeta. \tag{7}$$

**Теорема 3.** *Нехай $X(\theta)$ – стандартний процес, $T_k(\theta) = c_k\cos k\theta$, $c_k = \frac{2}{\pi}$, $k > 0$, $\mu(\cdot)$ – міра Лебега. Якщо виконується умова*

$$\sup_{-1\le t,s\le 1}|R(t+h,s+h_1) - R(t+h,s) - R(t,s+h_1) + R(t,s)| \le$$

$$\le C_R h^{\alpha}\cdot h_1^{\alpha}, C_R > 0, \alpha > \frac{1}{2}, \tag{8}$$

*тоді при $N > 0$*

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} E\xi_k^2 \le C_R\cdot 16\cdot 4^{2\alpha}\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{k^{2\alpha}} \underline{\underline{\mathrm{def}}}\, S_N(R) < +\infty, \tag{9}$$

*а при*

$$\varepsilon > \widehat{C}_N\cdot\left|f\left(\frac{(\widehat{C}_N)^{\frac{1}{2}}\cdot 2}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\right)\right|^2,\ \text{де } \widehat{C}_N = C_X^2\cdot S_N(R)$$

*має місце нерівність*

$$P\left\{\left(\int\limits_0^{\pi}(\Delta_N(\theta))^2\,d\theta\right)^{\frac{1}{2}} > \varepsilon\right\} \le 2\exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{\varepsilon}{\widehat{C}_N}\right)\right\}. \tag{10}$$

***Доведення.*** Оскільки при $k \ge 1$ маємо $c_k = \frac{2}{\pi}$, то з (7) отримуємо

$$E\xi_k^2 = \frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi} R(\cos\theta,\cos\zeta)\cdot\cos k\theta\cdot\cos k\zeta\, d\theta d\zeta \le$$

$$\le \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|R\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{k}\right),\cos\left(\zeta+\frac{\pi}{k}\right)\right) - R\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{k}\right),\cos\zeta\right) - \right.$$

$$\left. -R\left(\cos\theta,\cos\left(\zeta+\frac{\pi}{k}\right)\right) + R(\cos\theta,\cos\zeta)\right| d\theta d\zeta \le$$

$$\leq \frac{4}{\pi^2} c_R \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \cos\left(\zeta + \frac{\pi}{k}\right) - \cos\zeta \right|^{\alpha} \cdot \left| \cos\left(\theta + \frac{\pi}{k}\right) - \cos\theta \right|^{\alpha} d\theta d\zeta \leq$$

$$\leq C_R \cdot \frac{4}{\pi^2} \cdot (2\pi)^2 \cdot \left| 2 \sin\frac{\pi}{k} \right|^{2\alpha} \leq C_R \cdot 16 \cdot 4^{2\alpha} \cdot \frac{\pi^{2\alpha}}{k^{2\alpha}}.$$

Нерівність (9) доведена. Нерівність (10) випливає з (9) і (5).

**Наслідок 3.** *Якщо $X$ – гауссів процес, для якого справджується* (8), *то при $\varepsilon > 2\breve{C}_N$ має місце нерівність*

$$P\left\{ \left( \int_0^T |\Delta_N(\theta)|^2 \, d\theta \right)^{\frac{1}{2}} > \varepsilon \right\} \leq 2 \exp\left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2\widehat{C}_N} \right\}. \tag{11}$$

Наслідок 3 випливає з теореми 2 та наслідку 2.

**Приклад 1.** Нехай $\{\Omega, \eta, \nu\}$ – простір з мірою, $R(t,s) = \int\limits_{\Omega} f(t,\lambda)\overline{f(s,\lambda)} d\nu(\lambda)$, де $f(t,\cdot) \in L_2(\lambda),\ t \in [0,T]$. Тоді

$$\sup_{-1 \leq t,s \leq 1} |R(t+h, s+h_1) - R(t+h, s) - R(t, s+h_1) + R(t,s)| \leq$$

$$\leq \sup_{-1 \leq t,s \leq 1} \int_{\Omega} |f(t+h,\lambda) - f(t,\lambda)| \cdot |f(s+h_1,\lambda) - f(s,\lambda)| d\nu(\lambda).$$

Якщо

$$\sup_{-1 \leq t \leq 1} |f(t+h,\lambda) - f(t,\lambda)| \leq z(\lambda) \cdot |h|^{\alpha},$$

де $\alpha > \frac{1}{2}$, і $z(\lambda)$ – функція, така, що $\int\limits_{\Omega} |z(\lambda)|^2 d\nu(\lambda) < \infty$, тоді умова (8) виконується при $C_R = \int\limits_{\Omega} |z(\lambda)|^2 d\nu(\lambda)$.

Якщо є, наприклад,

$$R(t,s) = R(t-s) = \int_0^{+\infty} f(\lambda) \cos \lambda t d\lambda,$$

де $f(\lambda) \geq 0$ – парна функція та $\int\limits_0^{\infty} f(\lambda) d\lambda < \infty$, тоді

$$R(t,s) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t-s)} f(\lambda) \cdot d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{e^{i\lambda s}} f(\lambda) d\lambda.$$

Покладемо $f(t,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\lambda t}$, $d\nu(\lambda) = f(\lambda)d\lambda$. Тоді при достатньо малих $h$, $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ маємо

$$|f(t+h,\lambda) - f(t,\lambda)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| e^{i\lambda(t+h)} - e^{i\lambda t} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| e^{i\lambda h} - 1 \right| =$$

$$= \sqrt{2} \cdot |1 - \cos \lambda h|^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \left( 2 \sin^2 \frac{\lambda h}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \left| \sin \frac{\lambda h}{2} \right| \le 2 \left| \frac{\lambda h}{2} \right|^{\alpha} = 2^{1-\alpha} \cdot |\lambda h|$$

при $0 < \alpha \le 1$. Якщо взяти $\alpha > \frac{1}{2}$, тоді при умові, що інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2\alpha} f(\lambda) d\lambda$ збіжний, буде справджуватися умова (8), де $C_R = 2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2\alpha} \cdot f(\lambda) d\lambda$.

## 4. Розклад стандартного процесу за системою поліномів Лежандра

Нехай $T_k(\theta) = \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \cdot P_k(\cos\theta)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $0 \le \theta \le \pi$, де $P_k(t)$ – поліноми Лежандра ( [9], ст. 46). Система $T_k(\theta)$ повна та ортонормована в просторі $([0,\pi], \mu)$, де $\mu(A) = \int\limits_A \sin\theta d\theta$. Розглянемо

$$x(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \cdot T_k(\theta), \text{ де } \xi_k = \int_0^{\pi} x(\theta) T_k(\theta) \sin\theta d\theta.$$

$$E\xi_k^2 = \frac{2k+1}{2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} R(\cos\theta, \cos\zeta) P_k(\cos\theta) \cdot P_k(\cos\zeta) \sin\theta \sin\zeta d\theta d\zeta =$$

$$= \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} R(t,s) \cdot P_k(t) \cdot P_k(s) dt ds. \qquad (12)$$

Нехай існує неперервна похідна $\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial s \partial t}$, $-1 \le t, s \le 1$. Оскільки ( [9], ст. 50)

$$P_k(t) = \frac{1}{k+1} \left[ P'_{k+1}(t) - t \cdot P'_k(t) \right],$$

тоді

$$\int_{-1}^{1} R(t,s) P_k(t) dt = \frac{1}{k+1} \left[ \int_{-1}^{1} R(t,s) P'_{k+1}(t) dt - \int_{-1}^{1} R(t,s) \cdot t \cdot P'_k(t) dt \right]. \qquad (13)$$

Відомо ( [9], ст. 46), що $P_k(1) = 1$, $P_k(-1) = (-1)^k$ при всіх $k = 1, 2, 3, \ldots$. Крім того $R(t,s)$ – парна функція по обох змінних.

Обчислимо інтеграли в правій частині (13).

$$\int_{-1}^{1} R(t,s) \cdot t \cdot P'_k(t) dt = P_k(t) \cdot R(t,s) \cdot t \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_k(t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left[ R(t,s) \cdot t \right] dt =$$

$$= P_k(1) \cdot R(1,s) \cdot 1 - P_k(-1) \cdot R(-1,s) \cdot (-1) - \int_0^1 P_k(t) \left[ \frac{\partial R(t,s)}{\partial t} \cdot t + R(t,s) \right] dt =$$

$$= \left[P_k(1) + P_k(-1)\right] R(1,s) - \int\limits_0^1 P_k(t)\left[\frac{\partial R(t,s)}{\partial t}\cdot t + R(t,s)\right] dt =$$

$$= \left[1 + (-1)^k\right] R(1,s) - \int\limits_0^1 P_k(t)\left[\frac{\partial R(t,s)}{\partial t}\cdot t + R(t,s)\right] dt. \qquad (14)$$

$$\int\limits_{-1}^{1} R(t,s)P'_{k+1}(t)dt = P_{k+1}(t)\cdot R(t,s)\Big|_{-1}^{1} - \int\limits_{-1}^{1} P_{k+1}(t)\cdot\frac{\partial R(t,s)}{\partial t}\,dt =$$

$$= P_{k+1}(1)\cdot R(1,s) - P_{k+1}(-1)R(-1,s) - \int\limits_{-1}^{1} P_{k+1}(t)\cdot\frac{\partial R(t,s)}{\partial t}\,dt =$$

$$= \left[1 - (-1)^{k+1}\right] R(1,s) - \int\limits_{-1}^{1} P_{k+1}(t)\cdot\frac{\partial R(t,s)}{\partial t}\,dt. \qquad (15)$$

Із (13), (14), (15) випливає, що

$$\int\limits_{-1}^{1} R(t,s)P_k(t)dt = \frac{1}{k+1}\left\{\left([1 - (-1)^{k+1}]R(1,s) - \int\limits_{-1}^{1} P_{k+1}(t)\cdot\frac{\partial R(t,s)}{\partial t}\,dt\right) - \right.$$

$$\left. - \left([1 + (-1)^k]R(1,s) - \int\limits_0^1 P_k(t)\left[\frac{\partial R(t,s)}{\partial t}\cdot t + R(t,s)\right] dt\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{k+1}\left\{\left([1 + (-1)^k]\cdot R(1,s) - \int\limits_{-1}^{1} P_{k+1}(t)\frac{\partial R(t,s)}{\partial t}\,dt\right)\right\} -$$

$$- \left([1 + (-1)^k]\cdot R(1,s) - \int\limits_{-1}^{1} P_k(t)\left[\frac{\partial R(t,s)}{\partial t}\cdot t + R(t,s)\right] dt\right)\Bigg\} =$$

$$= \frac{1}{k+1}\left\{\int\limits_{-1}^{1} P_k(t)\left[\frac{\partial R(t,s)}{\partial t}\cdot t + R(t,s)\right] dt - \int\limits_{-1}^{1} P_{k+1}(t)\cdot\frac{\partial R(t,s)}{\partial t}dt\right\}. \qquad (16)$$

Перепишемо (16) у такому вигляді

$$\int\limits_{-1}^{1} R(t,s)P_k(s)ds = \frac{1}{k+1}\left\{\int\limits_{-1}^{1} P_k(s)\left[\frac{\partial R(t,s)}{\partial s}\cdot s + R(t,s)\right] ds - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{-1}^{1} P_{k+1}(s)\cdot\frac{\partial R(t,s)}{\partial s}ds\right\} \qquad (17)$$

Тоді, враховуючи (16), (17) отримаємо

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} R(t,s)P_k(s)P_k(t)dsdt = \int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1} R(t,s)P_k(s)ds\right]P_k(t)dt \underline{\underline{(17)}}$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{1}{k+1}\left\{\int_{-1}^{1} P_k(s)\left[\frac{\partial R(t,s)}{\partial s}\cdot s + R(t,s)\right]ds - \int_{-1}^{1} P_{k+1}(s)\frac{\partial R(t,s)}{\partial s}ds\right\}P_k(t)dt =$$

$$= \frac{1}{k+1}\left\{\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1}\frac{\partial R(t,s)}{\partial s}P_k(t)dt\right]s\cdot P_k(s)ds + \int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1} R(t,s)P_k(t)dt\right]P_k(s)ds -\right.$$

$$\left.-\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1}\frac{\partial R(t,s)}{\partial s}P_k(t)dt\right]P_{k+1}(s)ds\right\}\underline{\underline{(16)}}\,\frac{1}{k+1}\left(\int_{-1}^{1}\frac{1}{k+1}\left\{\int_{-1}^{1}P_k(t)\left[\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial s\partial t}\cdot t+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial R(t,s)}{\partial s}\right]dt - \int_{-1}^{1}P_{k+1}(t)\cdot\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial s\partial t}dt\right\}s\cdot P_k(s)ds + \int_{-1}^{1}\frac{1}{k+1}\left\{\int_{-1}^{1}P_k(t)\left[\frac{\partial R(t,s)}{\partial t}\cdot t+\right.\right.$$

$$\left.\left.+R(t,s)\right]dt - \int_{-1}^{1}P_{k+1}(t)\cdot\frac{\partial R(t,s)}{\partial t}dt\right\}P_k(s)ds - \int_{-1}^{1}\frac{1}{k+1}\left\{\int_{-1}^{1}P_k(t)\left[\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial s\partial t}\cdot t\;+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial R(t,s)}{\partial s}\right]dt - \int_{-1}^{1}P_{k+1}(t)\cdot\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial s\partial t}\cdot dt\right\}P_{k+1}(s)ds =$$

$$= \frac{1}{(k+1)^2}\left\{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial s\partial t}\cdot t\cdot s\cdot P_k(t)P_k(s)dtds + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\partial R(t,s)}{\partial s}\cdot s\cdot P_k(t)P_k(s)dtds -\right.$$

$$-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial s\partial t}\cdot s\cdot P_{k+1}(t)P_k(s)dtds + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\partial R(t,s)}{\partial t}\cdot t\cdot P_k(t)P_k(s)dtds +$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} R(t,s)P_k(t)P_k(s)dtds - \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\partial R(t,s)}{\partial t}P_{k+1}(t)P_k(s)dtds -$$

$$-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial s\partial t}\cdot t\cdot P_k(t)P_{k+1}(s)dtds - \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\partial R(t,s)}{\partial s}\cdot P_k(t)P_{k+1}(s)dtds +$$

$$\left.+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial s\partial t}\cdot P_{k+1}(t)P_{K+1}(s)dtds\right\} = \frac{1}{(k+1)^2}\left\{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial s\partial t}\cdot t\cdot s+\right.\right.$$

$$+\frac{\partial R(t,s)}{\partial s}\cdot s+\frac{\partial R(t,s)}{\partial t}\cdot t+R(t,s)\Bigg]P_k(t)P_k(s)dtds-$$

$$-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial s\partial t}\cdot s+\frac{\partial R(t,s)}{\partial t}\right]P_{k+1}(t)P_k(s)dtds-$$

$$-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial s\partial t}\cdot t+\frac{\partial R(t,s)}{\partial s}\right]P_k(t)P_{k+1}(s)dtds+$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial s\partial t}P_{k+1}(t)P_{k+1}(s)dtds. \tag{18}$$

Таким чином, повторюючи процедури, проведені при перетвореннях (14), (15), (16), приходимо до такої рівності:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}R(t,s)P_k(t)P_k(s)dtds=\frac{1}{(k+1)^2}\left\{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}z_{11}(t,s)P_k(t),P_k(s)dtds-\right.$$

$$-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}z_{21}(t,s)P_{k+1}(t)P_k(s)dtds-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}z_{12}(t,s)P_k(t)P_{k+1}(s)dtds+$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}z_{22}(t,s)P_{k+1}(t)P_k(s)dtds, \tag{19}$$

де

$$\begin{gathered}
z_{11}(t,s)=\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial s\partial t}t\cdot s+\frac{\partial R(t,s)}{\partial s}\cdot s+\frac{\partial R(t,s)}{\partial t}\cdot t+R(t,s);,\\
z_{21}=\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial s\partial t}\cdot s+\frac{\partial R(t,s)}{\partial t};\\
z_{12}=\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial s\partial t}\cdot t+\frac{\partial R(t,s)}{\partial s};\\
z_{22}=\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial s\partial t}.
\end{gathered} \tag{20}$$

Оскільки ( [9], ст. 50) $P_k(\cos\theta)\sqrt{\sin\theta}\leq\frac{2}{\sqrt{k\pi}}$, то

$$\left|\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}z_{lm}(t,s)P_i(t)P_j(s)dtds\right|=$$

$$=\left|\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi}z_{lm}(\cos\theta,\cos\zeta)P_i(\cos\theta)\cdot P_j(\zeta)\sin\theta\cdot\sin\zeta d\theta d\zeta\right|\leq$$

$$\leq \frac{4}{\pi\sqrt{ij}} \int_0^\pi \int_0^\pi |z_{lm}(\cos\theta, \cos\zeta)| \, d\theta d\zeta.$$

Отже,

$$E\xi_k^2 \leq \frac{2k+1}{2} \cdot \frac{4}{k\pi} \cdot \frac{1}{(k+1)^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \sum_{l,m=1}^{2} |z_{lm}(\cos\theta, \cos\zeta)| \, d\theta d\zeta.$$

Підсумовуючи, сформулюємо результат у вигляді такої теореми.

**Теорема 4.** *Нехай $X(\theta)$ – стандартний процес, $T_k(\theta) = \sqrt{\frac{2k+1}{2}} P_k(\cos\theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi$, де $P_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ – поліноми Лежандра, $\mu(A) = \int\limits_A \sin\theta d\theta$ – міра. Якщо існує неперервна похідна $\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial s \partial t}$, тоді при $N \geq 0$ справджується нерівність*

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} E\xi_k^2 \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{2k+1}{k\pi} \cdot 2 \cdot \frac{1}{(k+1)^2} \cdot d \underline{\underline{\mathrm{def}}} \widehat{S}_N(R),$$

*де*

$$d = \int_0^\pi \int_0^\pi \sum_{l,m=1}^{2} |z_{lm}(\cos\theta, \cos\zeta| \, d\theta d\zeta, \quad z_{l,m}(\cos\theta, \cos\zeta) -$$

*визначені у (20). Якщо*

$$\varepsilon > \widehat{C}_N \left| f\left( \frac{\left(\widehat{C}_N\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \right) \right|^2,$$

*де*

$$\widehat{C}_N = C_X^2 \cdot \widehat{S}_N(R), \tag{21}$$

*тоді має місце нерівність*

$$P\left\{ \left( \int_0^\pi |S_N(\theta)|^2 \sin\theta d\theta \right)^{\frac{1}{2}} > \varepsilon \right\} \leq 2\exp\left\{ -\varphi^* \left( \frac{\varepsilon}{\widehat{C}_N} \right) \right\}.$$

**Наслідок 4.** *Якщо $X$ – гауссів процес, для якого існує неперервна похідна $\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial s \partial t}$, то при $\varepsilon > 2\widehat{C}_N$, де $\widehat{C}_N$ задано в (21), має місце нерівність*

$$P\left\{ \left( \int_0^\pi |\Delta_N(\theta)|^2 \sin\theta d\theta \right)^{\frac{1}{2}} > \varepsilon \right\} < 2\exp\left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2\widehat{C}_N} \right\}.$$

**Приклад 2.** Нехай, як і в прикладі 1, $\{\Omega, \eta, \nu\}$ - простір з мірою,

$$R(t,s) = \int\limits_{\Omega} f(t,\lambda)\overline{f(s,\lambda)}d\nu(\lambda), \text{ де } f(t,\cdot) \in L_2(\lambda),\ t \in [0,T],\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Тоді умови теореми 4 виконуються, якщо функція $f(t,\lambda)$ така, що при всіх $\lambda \in \Omega$ існує неперервна похідна $\frac{\partial f(t,\lambda)}{\partial t}$ і при всіх $t, s$ є збіжним інтеграл

$$\int\limits_{\Omega} \left| \frac{\partial f(t,\lambda)}{\partial t} \cdot \frac{\partial f(s,\lambda)}{\partial s} \right| d\nu(\lambda),$$

що випливає з умови $\left|\frac{\partial f(t,\lambda)}{\partial t}\right| \leq a(\lambda)$ при всіх $t$ і збіжності інтеграла $\int\limits_{\Omega} [a(\lambda)]^2 d\nu(\lambda)$.

Якщо ж $R(t,s) = \int\limits_{0}^{+\infty} f(\lambda)\cos\lambda t d\lambda$, тоді умови теореми 4 будуть виконуватися, якщо є збіжним інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \cdot f(\lambda) \cdot d\lambda < \infty$.

## Висновки

В роботі досліджується швидкість збіжності розкладів $\varphi$-субгауссових процесів у вигляді рядів у просторі $L_2([0,\pi])$ за системами ортонормованих тригонометричних поліномів. В другій частині цієї роботи будуть викладені умови швидкості збіжності таких розкладів у просторі $C([0,\pi])$.


1. *Козаченко Ю. В.* Свойства случайных процессов типа субгауссовских // Доклады АН УССР. – 1984. – № 9. – С. 14–16.
2. *Островский Е. И.* Обобщение нормы Булдыгина-Козаченко и центральная предельная теорема в банаховых пространствах // Теория вероятностей и её применения. – 1982. – Т. 27, № 3. – С. 618.
3. *Козаченко Ю. В., Островский Е. И.* Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовых // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1985. – Т. 32. – С. 42–53.
4. *Giyliano Antonini R., Kozachenko Ju. and Nikitina T.* Space of $Sub_u(\Omega)$ random variables // "Academia Nazionale della Scienze detta dei XL", Memoria di Matematica e Applicazioni. – 2003. – Vol XXVII, № 121. – P. 95–124.
5. *Василик О. І.,Козаченко Ю. В., Ямненко Р. Є.* $\varphi$-субгауссові випадкові процеси. – К.: Київський ун-т, – 2008. – 231 с.
6. *Красносельський М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. – М.: Физматгиз, 1958. – 271 с.
7. *Buldygin V. V., Kozachenko Ju. V.* Metric characterization of Random variables and Random processes // American Mathematical Society, Providence Rhode Island, 2000. – 257 p.
8. *Козаченко Ю. В., Каменщикова О. Є.* Апроксимація $ssub_u(\Omega)$ випадкових процесів у просторі $L_p(T)$ // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2008. – Т. 79. – С. 73–78.
9. *Кампе де Ферье Ж., Кемпбелл Р., Петьо Г., Фогель Т.* Функции математической физики. – М.: Физматгиз, 1963. – 102 с.


Одержано 24.04.2012