УДК 519.21

В. Й. Дзямко (Ужгородський нац. ун-т)
Ю. В. Козаченко (Київський нац. ун-т імені Тараса Шевченка)
А. І. Моца (Ужгородський нац. ун-т)

УМОВИ РІВНОМІРНОЇ ЗБІЖНОСТІ ЗОБРАЖЕНЬ φ-СУБГАУССОВИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ У ВИГЛЯДІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РЯДІВ

In this article the conditions and rates uniforms convergence of representation φ-subgaussian periodic random processes in the form of trigonometric series ave considered.

В даній роботі розглядаються умови та швидкість рівномірної збіжності зображень φ-субгауссових періодичних випадкових процесів у вигляді тригонометричних рядів.

Вступ. Робота є продовженням статті [1], в якій сформульовані всі необхідні відомості з теорії просторів $sub_\varphi(\Omega)$ і введені відповідні позначення. В статті [1] розглядалися зображення періодичних строго φ-субгауссових випадкових процесів у вигляді рядів за ортонормованими тригонометричними поліномами і були знайдені умови та швидкість збіжності цих рядів у просторі $L_2\left([0,\pi],\mu\right)$.

В цій роботі вивчаються умови та швидкість збіжності за ймовірністю таких же рядів у просторі $C([0,\pi])$. Робота складається із вступу і трьох розділів. В першому розділі знайдено умови збіжності рядів у просторі $C([0,\pi])$, в другому – швидкість цієї збіжності, а в третьому розділі розглядаються приклади.

1. Умови збіжності зображень строго φ-субгауссових процесів у вигляді рядів за тригонометричними поліномами у просторі $C([0,\pi])$. Нехай $X=\{x(\theta),\theta\in\mathbb{R}\}$ – строго φ-субгауссовий з визначальною константою C_x періодичний з періодом 2π випадковий процес. Процес X-вимірний, $x(\theta)=x(-\theta)$, $Ex(\theta)=0$, $\sup\limits_{0\le\theta\le\pi} E\mid x(\theta)\mid^2<\infty$, $Ex(\theta)x(\xi)=R(\cos\theta,\cos\xi)$, $0\le\theta\le\pi$.

Покладемо, що процес X неперервний в середньому квадратичному, тобто функція $R(t,s)$, $-1\le t\le 1$, $-1\le s\le 1$, неперервна. Розглянемо цей процес на відрізку $[0,\pi]$. Як і в роботі [1] цей процес називатимемо стандартним φ-субгауссовим випадковим процесом.

Зауважимо, що центрований гауссів процес є строго φ-субгауссовим з визначальною константою $C_x=1$.

Нехай $T_k(\theta)$, $k=0,1,2,...,\ \theta\in[0,\pi]$ – повна ортонормована система дійсних тригонометричних поліномів степені k на просторі $\{[0,\pi],\mu\}$, μ – скінченна міра. Тоді [1] $X(\theta)$ можна зобразити у вигляді ряду

$$X(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k\cdot T_k(\theta), \tag{1}$$

де $\xi_k=\int_0^T X(\theta)T_k(\theta)d\mu(\theta)$ і ряд (1) збіжний з імовірністю одиниця в нормі простору $L_2([0,\pi],\mu)$. Введемо позначення:

$$X_N(\theta)=\sum_{k=0}^{N}\xi_k\cdot T_k(\theta),$$

$$\Delta_N(\theta) = X(\theta) - X_N(\theta) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \xi \cdot T_k(\theta) -$$

похибка при апроксимації процесу $X(\theta)$ сумою $X_N(\theta)$. У роботі [1] показано, що

$$\tau_\varphi^2(\Delta_N(\theta)) \le C_X^2 \cdot \sum_{l=N+1}^{\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} (E\xi_k\xi_l) \cdot T_k(\theta) \cdot T_l(\theta), \qquad (2)$$

де $\tau_\varphi(\cdot)$ – норма випадкових величин у просторі $sub_\varphi(\Omega)$.

Аналогічно встановлюється, що при $M < N$

$$\tau_\varphi^2(X_N(\theta) - X_M(\theta)) \le C_X^2 \cdot \sum_{l=M+1}^{N} \sum_{k=M+1}^{N} (E\xi_k\xi_l) \cdot T_k(\theta)T_l(\theta). \qquad (3)$$

Зауважимо, що

$$E\xi_k\xi_l = \int_0^T \int_0^T R(\cos\theta, \cos\zeta) T_k(\theta) T_l(\zeta) d\mu(\theta) d\mu(\zeta). \qquad (4)$$

З нерівності (3) випливає така лема.

Лема 1. *Якщо при кожному $\theta \in [0, \pi]$ збігається ряд*

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (E\xi_k\xi_l) \cdot T_k(\theta) \cdot T_l(\theta) < \infty, \qquad (5)$$

то в кожній точці θ ряд (1) є збіжним у середньому квадратичному, тобто $E(X(\theta) - X_N(\theta)^2 \longrightarrow 0$ при $N \longrightarrow \infty$.

Наслідок 1. *При виконанні умови* (5) справджується таке граничне співвідношення: $X_N(\theta) \longrightarrow X(\theta)$ при $N \longrightarrow \theta$, $\theta \in (0, \pi)$ за ймовірністю.

Сформулюємо твердження, які є необхідними для доведення основних теорем.

Наступна теорема є частинним випадком теореми 3.6 з роботи [2].

Теорема 1. *Нехай $Y_n = \{y_n(t), t \in [0, T]\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ – послідовність строго φ-субгауссових випадкових процесів, $y_n \in C([0, T])$, і виконується умова:*

$$\sup_{|t-s| \le h} (E|y_n(t) - y_n(s)|^2)^{\frac{1}{2}} \le \sigma(h), \qquad (6)$$

де $\sigma(h), h \le 0$, – строго монотонно зростаюча неперервна функція, така, що $\sigma(0) = 0$.

Якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\int_0^{\varepsilon} \psi(\ln\left(1 + \frac{1}{\sigma^{(-1)(u)}}\right) du < \infty, \qquad (7)$$

де $\psi(v) = \frac{v}{\varphi^{(-1)(v)}}$, а $\sigma^{(-1)}(v)$ – функція обернена до $\sigma(v)$, і для кожного $t \in T$ за ймовірністю $X_n(t) \longrightarrow X(t)$ при $n \longrightarrow \infty$, тоді $X_n(t)$ збігається за ймовірні-

стю в просторі $C(T)$ *до* $X(t)$, *тобто при* $\delta > 0$

$$P\left\{\sup_{t\in L[0,T]}|X_n(t)-X(t)|>\delta\right\}\longrightarrow 0$$

при $n\longrightarrow\infty$.

Лема 2. [3] (Нерівність Бернштейна). *Нехай* $T_k(x)$ *– тригонометричний поліном степені* k. *Тоді*

$$\sup_x|T_k'(x)|\le k\cdot\sup_x|T_k(x)|.$$

З леми 2 випливає такий наслідок.

Наслідок 2. *Нехай* $T_k(x)$ *– тригонометричний поліном степені* k, *то для будь-яких* $t,s\in[0,\pi]$ *справджується нерівність*

$$|T_k(t)-T_k(s)|\le k\cdot\sup_x|T_k(x)|\cdot|t-s|. \tag{8}$$

Наступна лема є модифікацією леми 4.2 з роботи [4].

Лема 3. *Нехай* $Z_n(u)$, $n=1,2,3,\ldots$, $u\in[0,\pi]$ *– послідовність функцій, така, що:*

1) $\sup\limits_{0\le u\le\pi}|Z_n(u)|\le B_n$;

2) *для всіх* $u,v\in[0,\pi]$ *має місце нерівність* $|Z_n(u)-Z_n(v)|\le C_n\cdot n\cdot|u-v|$;

3) $S(u), u>0$ *– монотонно зростаюча функція, така, що для деякої константи* $r\ge 0$ *функція* $\frac{u}{S(u)}$ *– монотонно зростає при* $u>r$. *Тоді для всіх* $n\ge 1$ *справджується нерівність*

$$|Z_n(u)-Z_n(v)|\le\max(C_n,2B_n)\cdot\frac{S(n+r)}{S\left(r+\frac{1}{|u-v|}\right)}. \tag{9}$$

З леми 3 та наслідку 2 випливає таке твердження.

Лема 4. *Нехай* $T_k(u)$, $k=1,2,3,\ldots$, *– тригонометричний поліном степені* k. *Тоді для всіх* $u,v\in[0,\pi]$ *та* $k=1,2,3,\ldots$ *має місце нерівність:*

$$|Z_k(u)-Z_k(v)|\le 2\cdot\sup_u|T_k(u)|\cdot\frac{S(k+r)}{S\left(r+\frac{1}{|u-v|}\right)}, \tag{10}$$

де функція $S(u)$ *визначена в лемі* 3.

Наступна теорема – перша з двох основних теорем.

Теорема 2. *Нехай* $X(\theta)$ *– стандартний процес з простору* $sub_\varphi(\Omega)$, $S(u)$ *– функція, для якої виконуються умови леми 3, причому для кожного* $\varepsilon<\frac{C}{S\left(r+\frac{1}{\pi}\right)}$ *є збіжним інтеграл* $\int\limits_0^\varepsilon\psi\left(\ln\left(S^{(-1)}\left(\frac{C}{u}\right)-r+1\right)\right)du$, ($C$ *– визначена в* (12), *а* ψ *визначена в теоремі* 1), *тоді, якщо збігається ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}|E\xi_k\xi_l|\cdot S(k+r)\cdot S(l+r)C_k\cdot C_l<\infty, \tag{11}$$

(тут $C_k = \sup\limits_u |T_k(u)|$), то $X_N(\theta)$ збіжний за ймовірністю в просторі $C([0,\pi])$ при $N \longrightarrow \infty$ до процесу $X(\theta)$, який є вибірково неперервний з імовірністю одиниця.

Доведення. Справедливість теореми 2 випливає з теореми 1. Дійсно, з (11) випливає, що є збіжним ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}|E\xi_k\xi_l|\cdot C_k\cdot C_l,$$

тобто при кожному $\theta\in[0,\pi]$ збігається ряд (5). Отже, з наслідку 1 випливає, що в кожній точці $\theta\in[0,\pi]$ часткова сума $X_N(\theta)$ прямує до $X(\theta)$ при $N\longrightarrow\infty$ за ймовірністю.

Знайдемо тепер функцію $\sigma(h)$ з (6). Оскільки

$$X_N(\theta)-X_N(\zeta)=\sum_{k=0}^{N}\xi_k(T_k(\theta)-T_k(\zeta)),$$

то з леми 4 та умови (11) маємо, що

$$E|X_N(\theta)-X_N(\zeta)|^2=\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}(E\xi_k\xi_l)(T_k(\theta)-T_k(\zeta))(T_l(\theta)-T_l(\zeta))\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}|E\xi_k\xi_l|\cdot|T_k(\theta)-T_k(\zeta)|\cdot|T_l(\theta)-T_l(\zeta)|\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}|E\xi_k\xi_l|\cdot 2C_k\cdot\frac{S(k+r)}{S\left(\frac{1}{|\theta-\zeta|}+r\right)}\cdot 2C_l\cdot\frac{S(l+r)}{S\left(\frac{1}{|\theta-\zeta|}+r\right)}=$$

$$=\frac{4}{S^2\left(\frac{1}{|\theta-\zeta|}+r\right)}\cdot\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}|E\xi_k\xi_l|\cdot C_k\cdot C_l\cdot S(k+r)\cdot S(l+r)\le\frac{1}{S^2\left(\frac{1}{|\theta-\zeta|}+r\right)}\cdot C^2,$$

де

$$C^2=4\sum_{k=0}^{T}\sum_{l=0}^{T}|E\xi_k\xi_l|\cdot C_k\cdot C_l\cdot S(k+r)\cdot S(l+r). \tag{12}$$

Звідси маємо, що

$$\sigma(h)=\frac{C}{S\left(\frac{1}{h}+r\right)}.$$

Отже,

$$\sigma^{(-1)}(h)=\left(S^{-1}\left(\frac{C}{h}\right)-r\right)^{-1},\ \text{де } 0<h<\frac{C}{S^{-1}\left(r+\frac{1}{\pi}\right)}.$$

Тобто, при $\varepsilon<\frac{C}{S^{-1}\left(r+\frac{1}{\pi}\right)}$ отримаємо:

$$\int\limits_0^{\varepsilon}\psi\left(\ln\left(\frac{1}{\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\right)du=\int\limits_0^{\varepsilon}\psi\left(\ln\left(S^{(-1)}\left(\frac{C}{u}\right)-r+1\right)\right)du<\infty.$$

Теорема доведена.

2. Швидкість збіжності зображень строго φ-субгауссового випадкового процесу у вигляді ряду за тригонометричними поліномами. Сформулюємо теорему, яка є окремим випадком наслідку 5.1 з роботи [2].

Теорема 3. *Нехай $y = \{y(t), t \in [0,T]\}$ – сепарабельний випадковий процес з простору $sub_\varphi(\Omega)$. Якщо виконується умова*

$$\sup_{|t-s|\le h} \tau_\varphi\left(X(t) - X(s)\right) \le \sigma(h),$$

де $\sigma(h)$ – строго монотонно зростаюча неперервна функція, $\sigma(0) = 0$ та для $\sigma(h)$ виконується умова (7), тоді для будь-якого $p \in (0,1)$ і $u > 2 \cdot I_\varphi\left(\frac{p\varepsilon_0}{p\cdot(1-p)}\right)$ справджується нерівність

$$P\{\sup_{t\in[0,T]} |X(t)| > u\} \le 2A(u,p), \tag{13}$$

де

$$\varepsilon_0 = C_x \cdot \sup_{0\le t\le T}\left(E|X(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad I_\varphi(\delta) = \int\limits_0^\delta \psi\left(\ln\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right)\right) du,$$

$$A(u,p) = \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\left[u(1-p) - \frac{2}{p} I_\varphi(\theta\varepsilon_0)\right]\right)\right\},$$

$\varphi^*(u)$ – перетворення Юнга-Фенхеля функції $\varphi(u)$.

Другою основною теоремою роботи є така.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми 2. Тоді при будь-яких*

$$0 < p < 1,\ u > 2I_\varphi(p\cdot\varepsilon_N)\cdot\frac{1}{p\cdot(1-p)}$$

має місце нерівність:

$$P\{\sup_{0\le\theta\le\pi} |\Delta_N(\theta)| > u\} \le 2A_N(u,p), \tag{14}$$

де

$$A_N(u,p) = \exp\left\{-\varphi * \left[\frac{1}{\varepsilon_N}\left(u(1-p) - \frac{2}{p}\cdot\hat{I}_\varphi(p\cdot\varepsilon_N)\right)\right]\right\},$$

$$\hat{I}_\varphi(\delta) = \int\limits_0^\delta \psi\left(\ln\left[\frac{\pi}{2}\left(S^{(-1)}\left(\frac{C_N}{u}\right) - r\right) + 1\right]\right) du,$$

$$C_N = 2C_x \cdot \left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty} |E\xi_k\xi_l| C_k \cdot C_l \cdot S(k+r)S(l+r)\right),$$

$$\varepsilon_N = C_x \sup_{0\le\theta\le\pi}\sum_{l=N+1}^{\infty}\sum_{k=N+1}^{\infty} (E\xi_k\xi_l)\cdot T_k(\theta)\cdot T_l(\theta)$$

$$\Delta_N(\theta) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \xi_k \cdot T_k(\theta).$$

Зауваження 1. *Справедлива нерівність*

$$\varepsilon_N \le \hat{\varepsilon}_N = C_x \cdot \sum_{l=N+1}^{\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} |E\xi_k \xi_l| \cdot C_l \cdot C_k.$$

В оцінці (14) можна замінити ε_N на $\hat{\varepsilon}_N$.

Доведення теореми. Як і при доведенні теореми 2 маємо

$$E|\Delta_N(\theta) - \Delta_N(\zeta)|^2 \le$$

$$\le \frac{1}{S^2\left(\frac{1}{|\theta-\zeta|} + r\right)} \cdot \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=N+1}^{\infty} |E\xi_k \xi_l| \cdot C_k \cdot C_l \cdot S(k+r) \cdot S(l+r).$$

Тобто, в позначеннях теореми 3 отримаємо

$$C(h) = C_N \cdot \frac{1}{S\left(\frac{1}{h} + r\right)}, \;\; \sigma^{(-1)}(h) = \left(S^{(-1)}\left(\frac{C_N}{h}\right) - r\right)^{-1},$$

$$\varepsilon_0 = C_x \cdot \sup_{0 \le \theta \le \pi} \left(E\Delta_N^2(\theta)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

В роботі [1] показано, що

$$E\left(\Delta_N^2(\theta)\right) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=N+1}^{\infty} (E\xi_k \xi_l) \cdot T_k(\theta) \cdot T_l(\theta).$$

Звідси маємо

$$\sup_{0 \le \theta \le \pi} \tau\left(\Delta_N(\theta)\right) \le \varepsilon_N \le \hat{\varepsilon}_N.$$

Таким чином, із теореми 3 випливає справедливість теореми 4. Теорема доведена.

3. Приклади

Приклад 1. *Нехай* $X(\theta)$ *– стандартний процес з простору* $sub_\varphi(\Omega)$. *Покладемо:*

$$S(v) = S_\psi(v) = \left(\psi\left[\ln\left(\frac{\pi}{2}v + 1\right)\right]\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

де γ *є будь-яким числом, що приймає значення з інтервалу* $(0;1)$. *Тоді*

$$S_\psi^{(-1)}(t) = \left[\exp\left\{\psi^{(-1)}(t^\gamma)\right\} - 1\right] \cdot \frac{2}{\pi}.$$

Позначимо символом r_ψ *таке невід'ємне число, що при* $v > r_\psi$ *функція* $\frac{v}{S_\psi(v)}$ *монотонно зростає. Тоді*

$$\int_0^\delta \psi\left(\ln\left[\tfrac{\pi}{2}\left(S_\psi^{-1}\left(\tfrac{C_N}{u}\right) - r_\psi\right) + 1\right]\right) du =$$

$$= \int_0^\delta \psi\left(\ln\left[\exp\left\{\psi^{(-1)}\left(\left(\tfrac{C_N}{u}\right)^\gamma\right) - r_\psi\right\}\right]\right) du \le$$

$$\le \int_0^\delta \psi\left(\ln\left[\exp\left\{\psi^{(-1)}\left(\left(\tfrac{C_N}{u}\right)^\gamma\right)\right\}\right]\right) du \le \int_0^\delta \left(\tfrac{C_N}{u}\right)^\gamma du = C_N^\gamma \cdot \delta^{1-\gamma} \cdot \tfrac{1}{1-\gamma} < \infty.$$

Отже, якщо існує $r_\xi \geq 0$, для якого функція $\frac{v}{S_\psi(v)}$ монотонно зростає при $v > r_\xi$, тоді функція $S_\psi(v)$ задовольняє умови теореми 2.

Отже, має місце наступна теорема.

Теорема 5. *Нехай $X(\theta)$ – стандартний випадковий процес з простору $sub_\varphi(\Omega)$, існує $r_\xi \leq 0$ таке, що при $v > r_\xi$ функція $\frac{v}{S_\psi(v)}$ строго монотонно зростає. Якщо є збіжним ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} |E\xi_k\xi_l| \cdot S_\psi(k + r_\psi) \cdot S_\psi(l + r_\psi) \cdot C_k \cdot C_l,$$

тоді $X_N(\theta)$ збігається за імовірністю у просторі $C([0,\pi])$ при $N \to \infty$. Процес $X(\theta)$ вибірково неперервний з імовірністю одиниця та якщо для деяких $0 < p < 1$, $0 < \gamma < 1$

$$u > 2C_N^\gamma \cdot (p\varepsilon_N)^{1-\gamma} \cdot \frac{1}{1-\gamma} \cdot \frac{1}{p\cdot(1-p)},$$

то справджується нерівність

$$P\{\sup_{0\leq\theta\leq\pi} |\Delta_N(\theta)| > u\} \leq 2\hat{A}_N(u,p), \tag{15}$$

де

$$\hat{A}_N(u,p) = \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{1}{\varepsilon_N}\left[u(1-p) - \frac{2}{p}\cdot C_N^\delta \cdot (p\cdot\varepsilon_N)^{1-\gamma}\cdot\frac{1}{1-\gamma}\right]\right)\right\}.$$

Розглянемо простори $sub_\varphi(\Omega)$, де $\varphi(x) = \frac{|x|^\alpha}{\alpha}$, причому $\alpha \in (1,2]$. Тоді

$$\psi(x) = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}\cdot x^{1-\frac{1}{\alpha}} \text{ і } S_\psi(v) = \left[\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\ln\left(\frac{\pi}{2}v+1\right)\right)^{1-\frac{1}{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\gamma}},$$

де γ – будь-яке число, що $0 < \gamma < 1$. Звідси бачимо, що для цих просторів теорема 5 буде справедливою, якщо для деякого $\gamma \in (0,1)$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} |E\xi_k\xi_l| \cdot C_k \cdot C_l \cdot (\ln k)^{\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\frac{1}{\gamma}} \cdot (\ln l)^{\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\frac{1}{\gamma}} \tag{16}$$

є збіжним. Причому, якщо

$$u > 2C_N^\gamma \cdot (p\varepsilon_N)^{1-\gamma} \cdot \frac{1}{1-\gamma} \cdot \frac{1}{p(1-p)},$$

тоді справджується нерівність

$$P\{\sup_{0\leq\theta\leq\pi} |\Delta_N(\theta)| > u\} \leq 2\tilde{A}_N(u,p), \tag{17}$$

де

$$\tilde{A}_N(u,p) = \exp\left\{-\frac{1}{\beta}\left[\frac{1}{\varepsilon_N}\left(u(1-p) - \frac{2}{p}\cdot C_N^\gamma \cdot (p\cdot C_N)^{1-\gamma}\cdot\frac{1}{1-\gamma}\right)\right]^\beta\right\},$$

і число β визначається з умови $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = 1$.

Якщо процес гауссів, то умову (16) можемо визначити таким чином: для деякого $\gamma \in (0,1)$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} |E\xi_k \xi_l| \cdot C_k \cdot C_l (\ln k)^{\frac{1}{2\gamma}} \cdot (\ln l)^{\frac{1}{2\gamma}} < \infty \tag{18}$$

збіжний. При умові (18), якщо

$$u > 2C_N^{\gamma} \cdot (p\varepsilon_N)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{p \cdot (1-p)},$$

тоді справджується наступна нерівність:

$$P\{\sup_{0 \le \theta \le \pi} |\Delta_N(\theta)| > u\} \le$$
$$\le \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\varepsilon_N} \left(u(1-p) - \frac{2}{p} \cdot C_N^{\gamma} \cdot (p \cdot C_N)^{1-\gamma} \cdot \frac{1}{1-\gamma} \right) \right]^2 \right\}, \tag{19}$$

де

$$C_N = 2 \left[\sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=N+1}^{\infty} |E\xi_k \xi_l| \cdot C_k C_l \cdot \hat{S}(k+r) \cdot \hat{S}(l+r) \right],$$

$$\hat{S}(v) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln \left(\frac{\pi}{2} v + 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{\gamma}}, \qquad r \text{ визначається за лемою 3,}$$

$$\varepsilon_N = \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=N+1}^{\infty} |E\xi_k \xi_l| \cdot C_k \cdot C_l.$$

Приклад 2. *Розклад стандартних процесів за системою косинусів. Нехай процес гауссів*

$$T_k(\theta) = b_k \cos k\theta, \ \ k = 0, 1, 2, ..., \ \ b_0 = \frac{1}{\pi}, \ \ b_k = \frac{2}{\pi}, \ \ k = 1, 2, \ldots .$$

Ця система є повною ортонормованою системою в просторі $C([0,\pi],\mu)$*, де* μ *– міра Лебега. Отже,*

$$E\xi_k \xi_l = b_k \cdot b_l \cdot \int_o^{\pi} \int_0^{\pi} R(\cos\theta, \cos\zeta) \cos k\theta \cdot \cos k\zeta d\theta d\zeta.$$

Якщо збіжний ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} |E\xi_k \xi_l| \cdot (\ln k \cdot \ln l)^{\chi}, \tag{20}$$

$k, l \ge 1$, $\chi > \frac{1}{2\gamma}$, *де* $0 < \gamma < 1$, *тоді умова* (18) виконується. Очевидно, умова (18) виконується при $\chi > \frac{1}{2}$.

Знайдемо умови, які треба накласти на коваріаційну функцію процесу X, щоб виконувалася умова (20). Безпосередньою перевіркою встановлюється, що при $k, l \geq 1$

$$E\xi_k\xi_l = \frac{4}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} R(\cos\theta, \cos\zeta)\cos k\theta \cdot \cos l\zeta d\theta d\zeta =$$

$$= \frac{4}{\pi^2 kl}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 R(\cos\theta, \cos\zeta)}{\partial\theta\partial\zeta}\sin k\theta \cdot \sin l\zeta d\theta d\zeta.$$

Далі, як і в роботі [1] переконуємося, що

$$E\xi_k\xi_l = \frac{4}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\partial^2 R\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{k}\right), \cos\left(\zeta+\frac{\pi}{k}\right)\right)}{\partial\theta\partial\zeta} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial^2 R\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{k}\right), \cos\zeta\right)}{\partial\theta\partial\zeta} - \frac{\partial^2 R\left(\cos\theta, \cos\left(\zeta+\frac{\pi}{l}\right)\right)}{\partial\theta\partial l} + \frac{\partial^2 R(\cos\theta, \cos\zeta)}{\partial\theta\partial\zeta}\right]\sin k\theta \cdot \sin l\zeta d\theta d\zeta. \quad (21)$$

З умови (21) випливає, що умова (20) і, отже, умова (18), справджується, якщо існує похідна $\frac{\partial^2 R(\cos\theta, \cos\zeta)}{\partial\theta\partial\zeta}$ і для неї виконується умова

$$\sup_{0\leq\theta,\zeta\leq\pi}\left|\frac{\partial^2 R(\cos(\theta+h), \cos(\zeta+h_1))}{\partial\theta\cdot\partial\zeta} - \frac{\partial^2 R(\cos(\theta+h), \cos\zeta)}{\partial\theta\partial\zeta} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial^2 R(\cos\theta, \cos(\zeta+h_1))}{\partial\theta\partial\zeta} + \frac{\partial^2 R(\cos\theta, \cos\zeta)}{\partial\theta\cdot\partial\zeta}\right| \leq$$
$$\leq C\cdot\left(\frac{1}{|\ln|h_1||}\cdot\frac{1}{|\ln|h_1||}\right)^s \text{ для } s > \frac{3}{2}.$$

Висновки. В роботі досліджені умови та швидкість збіжності зображень строго φ-субгауссових випадкових процесів у вигляді рядів за ортонормованими системами тригонометричних поліномів у просторі $C\left([0, \pi]\right)$.

1. *Дзямко В. Й., Козаченко Ю. В., Моца А. І.* Про зображення φ-субгауссових періодичних випадкових процесів у вигляді рядів // Наук. вісник Ужгород. нац. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2012. – Вип. 23, № 1. – С. 42–54.
2. *Козаченко Ю. В., Сливка Г. І.* Обгрунтування методі Фур'є для гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2004. – Т. 69. – С. 63–78.
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. – М.: Мир, – 1965.
4. *Козаченко Ю. В., Вереш К. Й.* Рівняння теплопровідності з випадковими початковими умовами з просторів Орліча // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2002. – Т. 80. – С. 63–75.

Одержано 24.09.2012