УДК 519.852:519.876

В. І. Кудін (Київський нац. ун-т)

РЕЛАКСАЦІЙНА СХЕМА МЕТОДУ ПСЕВДОБАЗИСНИХ МАТРИЦЬ АНАЛІЗУ ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ МАТРИЧНОЇ ГРИ У ЗМІШАНИХ СТРАТЕГІЯХ

Constructed relaxation algorithm analysis and finding optimal strategies of players in the matrix game with mixed strategies. Adapted method psevdobazysis atrices (MPBM) - method with sets simplex-methods to find optimal solutions (strategies players) problem. A iteration method in finite steps finds solution to problem sets properties of the model.

Побудовано релаксаційний алгоритм аналізу та знаходження оптимальних стратегій гравців у матричній грі зі змішаними стратегіями. Адаптовано метод псевдобазисних матриць (МП-БМ) - метод із сімейства симплекс-методів до знаходження оптимальних розв'язків (стратегій гравців) задачі. Розроблено ітераційний метод, який за скінчену кількість кроків знаходить розв'язок задачі, встановлює властивості досліджуваної моделі.

Вступ. Деякі практичні задачі, що формалізуються в класі моделей лінійного програмування можуть бути поставлені як великорозмірні. Зокрема, до таких можуть бути "віднесені" і матричні ігри у змішаних стратегіях [1-4]. В роботах ряду авторів [1-4] досліджено зв'язки задачі лінійного програмування та теорії матричних ігор у змішаних стратегіях. Дослідження таких задач потребує особливого підходу до аналізу та оптимізації таких моделей, зокрема, використання релаксування [5,6]− послаблення умов моделі тимчасовим відкиданням деяких обмежень. Однією із схем методу базисних матриць [6], що є зручною для застосування релаксування, є схема методу псевдобазисних матриць.Згідноо цієї схеми, розв'язок задачі знаходиться після знаходження розв'язків послідовності взаємозв'язаних підзадач меншої розмірності. Розв'язок останньої підзадачі є розв'язком вихідної задачі. Особливості схеми розв'язку методом псевдобазисних матриць полягає в наступному: на основі ідеї псевдобазисної матриці (підматриці платіжної матриці) та розв'язку при переході до наступного недопустимого опорного розв'язку вводяться в псевдобазисну матрицю (і виводяться) на ітераціях вектори-рядки платіжної матриці; збіжність до оптимального розв'язку "іде зверху"за недопустимими вершинами (передбачається обмеженість задачі за цільовою функцією), що називатимуться псевдовершинами, причому від ітерації до ітерації значення цільової функції строго зменшуватиметься (для невиродженої задачі на максимум); застосування процедур релаксації дає змогу, при невеликих затратах на їх реалізацію, значно скоротити розмірність базової задачі при розрахунках.

Постановка задачі. Введемо в розгляд двоїсту пару задач лінійного програмування [3].

Пряма задача:

$$\max Cx, \tag{1}$$

за умов:

$$Ax \leq B^T, \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n} \tag{3}$$

де

$$C = (c_1, c_2, \ ..., c_n), x = (x_1, x_2, \ ..., x_n)^T, B = (b_1, b_2, \ ..., b_m).$$

Вважаємо, що модель вигляду (1) – (3) має матрицю обмежень A (платіжну матрицю), в якій кількість стовпців більша, ніж рядків (“довга”). Двоїста задача:

$$\min Bu, \tag{4}$$

за умов:

$$A^T u \geq C^T \tag{5}$$

$$u_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m} \tag{6}$$

Варіант запису задачі на "max", "$\leq$"

$$\max \ (-Bu),$$

$$-A^T u \leq -C^T$$

$$u_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Неважко переконатись, що двоїста до даної може бути приведена до вигляду (1)-(3). Матрична гра у змішаних стратегіях подається як двоїста пара задач лінійного програмування. Пряма задача вигляду (1)-(3), де

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, \ n}, \quad c_j = 1, \quad j = \overline{1, n}, \quad b_i = 1, \ i = \overline{1, m}.$$

Двоїста задача вигляду (4)-(6), де

$$u_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad c_j = 1, \ j = \overline{1, n}, \ b_i = 1, \ i = \overline{1, m}.$$

Задача (1)-(3) має $n >> m$, платіжна матриця A (обмежень) витягнута горизонтально, ранг системи рівний m. При застосуванні методу базисних матриць [7], будемо вважати без обмеженя загальності, що задача (4)-(6) має n обмежень та m змінних, матриця A^T обмежень витягнута вертикально та подається у вигляді

$$\max \ Bu, \tag{7}$$

за умов:

$$A^T u \leq C^T \ , \tag{8}$$

$$u_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}. \tag{9}$$

Для подальшого викладу матеріалу приведемо розширену схему, аналізу (7)-(9), що базується на тимчасовому відкиданні частини обмежень (8), залишимо лише m із них, які утворять квадратну невироджену матрицю A_b.

Мета роботи. Побудувати релаксаційний алгоритм аналізу та знаходження оптимальних стратегій гравців у матричній грі у змішаних стратегіях. Адаптувати метод псевдобазисних матриць (МПБМ) - метод із сімейства симплекс-методів до знаходження оптимальних розв’язків. Розробити ітераційний алгоритм, який за кінцеву кількість кроків (постадійно) знаходить розв’язок задачі, виявляє властивості досліджуваної ігрової моделі [5].

Релаксаційна схема методу псевдобазисних матриць. Введемо в розгляд релаксовану (послаблену відкиданням деяких обмежень [5]) модель лінійного програмування вигляду (7)

$$\max_u \left\{ Bu/A_b u \leq c^0 \right\}$$

або в розгорнутому вигляді

$$\max_u \left\{ Bu/a_i u \leq c_i, \ i \in J_b \right\},$$

де $c^0 = (c_1, c_2, ...c_m)$ – підвектор C, який утворений компонентами обмежень, які входять у A_b, J_b - індекси обмежень, нормалі яких утворюють матрицю A_b. Допустимо, що матриця A_b невироджена, а задача має обмежений розв'язок u_0. Розв'язок u_0 може бути недопустимим для релаксованих (відкинутих) обмежень, причому $U \subseteq U_R$, де U_R релаксована (розширена) множина обмежень (8), утворена відкиданням деяких обмежень. В [6] встановлено, що можна побудувати послідовність взаємозв'язаних задач меншої розмірності.

Нехай $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{im}$ - вектори нормалей обмежень,

$$a_j u \leq c_j, \ j \in J_b,$$

де $J_b = \{i_1, i_2, ..., i_m\}$ - індекси обмежень, що утворюють псевдобазисну матрицю A_b, l - вектор нормалі обмеження $a_l u \leq c_l$, $\alpha_l = (\alpha_{l1}, \alpha_{l2}, ..., \alpha_{lm})$- коефіцієнти розвинення вектору a_l за рядками псевдобазисної матриці A_b, тобто

$$a_l = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{lj} a_{ij} = \alpha_l \cdot A_b{}^{-1}$$

є представленням нормалі обмеження.

Означення 1. *Підматрицю A_b матриці A^T, складену із m лінійно незалежних нормалей $J_b = (i_1, \, i_2, \, ..., i_m)$ обмежень (5), будемо називати псевдо базисною, а розв'язок $u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0m})$ відповідної їм системи рівнянь*

$$A_b u_0 = C^0,$$

де $C^0 = (c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m})$ – підвектор C — псевдо базисним при виконанні умови $\alpha_{0i} \geq 0, i = \overline{1, m}$.

Нехай: $\beta_{ij}, \ i, j \in I = \{1, 2, ..., m\}$ - елементи A_b; e_{ij} та $\left(A_b^{-1}\right)_i$ - елементи та i-й стовпець A_b^{-1} -оберненої до A_b; $\alpha_r(\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, ..., \alpha_{rm})$- вектор розкладу нормалі $a_r u_1 \leq c_r$ за рядками A_b, $\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, ..., \alpha_{0m})$ - вектор розкладу нормалі цільової функції (4) за рядками A_b, $\Delta_r = a_r u_0 - c_r$ - нев'язка r-го обмеження (5), а $\Delta_0 = Bu_0$ - значення цільової функції в вершині u_0, які утворюють вектор $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \, ..., \Delta_n)$; J_b, J_H - множини індексів, відповідно базисних і небазисних обмежень (5). Всі означені елементи при переході до суміжної $\overline{A}_b$, яка утворюється із A_b заміною її рядка a_k на a_l, що не входить в A_b будемо позначати рискою зверху, тобто $\overline{\beta}_j$, $\overline{\alpha}_r$, $\overline{L}_i$, $\overline{\Delta}_k$, $\overline{e}_{ri}$, $(\overline{A}_b^{-1})_i$ $\overline{\alpha}_0$.

Теорема 1. *[7] Між коефіцієнтами розвинення нормалей обмежень(5) та цільової функції (4) за рядками базисної матриці, елементами обернених матриць, базисними розв'язками, нев'язками обмежень (5) та значеннями цільової функції в двох суміжних базисних розв'язках мають місце такі співвідношення*

$$\overline{\alpha}_{rk} = \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}, \overline{\alpha}_{ri} = \alpha_{ri} - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},\ r = \overline{0,n};\ i = \overline{1,m};\ r \neq k; \tag{10}$$

$$\overline{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}, \overline{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li}, r = \overline{1,m},\ i = \overline{1,m},\ r \neq k; \tag{11}$$

$$\overline{u}_{0j} = u_{0j} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}}\Delta_l,\ j = \overline{1,m},$$

$$\overline{\Delta}_k = -\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}}, \overline{\Delta}_r = \Delta_r - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\Delta_l,\ r = \overline{1,n};\ r \neq k$$

$$B\overline{u}_0 = Bu_0 - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}}\Delta_l,$$

причому умовою: опорності псевдобазисності матриці при вводі вектора нормалі a_l обмеження $\alpha_l u^T \leq c_l$ на к-ту позицію базисної матриці A_b є $\alpha_{lk} \neq 0$; псевдобазисності опорних розв'язків, тобто $\alpha_{0i} \geq 0$, $i = \overline{1,n}$ є $\alpha_{lk} > 0$ - спадання цільової функції у новій псевдобазисній матриці при задачі на максимум є $\Delta_l > 0$, зростання цільової функції $\Delta_l < 0$, сталості $\Delta_l = 0$.

Встановлено [8], що якщо існує базисна матриця A_b така, що $\alpha_{0k} \geq 0$, $k = \overline{1,m}$, то базисна матриця та відповідний їй розв'язок u_0 оптимальні, причому при $\alpha_{ok} > 0$, $\quad k = \overline{1,m}$, розв'язок єдиний, при $\exists k_0, \alpha_{0k_0} = 0$, розв'язок неєдиний. Для матричної гри у змішаних стратегіях ці положення набудуть наступного вигляду.

Твердження 1. *Компоненти вектора розкладу цільової функції задачі лінійного програмування (двоїстої задачі матричної гри) в ході ітерацій методу базисних матриць обчислюються за формулами $\alpha_{0i} = \sum\limits_{j=1}^{m} e_{ji}$, $i = \overline{1,m}$ (суми елементів стовпців оберненої матриці), причому співпадають з невід'ємними компонентами вектора опорного розв'язку двоїстої задачі.*

Твердження 2. *Компоненти вектора розв'язків задачі лінійного програмування (двоїстої задачі матричної гри) в ході ітерацій методу базисних матриць обчислюються за формулами $u_{0i} = \sum\limits_{j=1}^{m} e_{ij}$, $i = \overline{1,m}$ (суми елементів рядків оберненої матриці).*

Твердження 3. *Для суми елементів стовпців оберненої матриці в двох суміжних базисних матрицях виконуються такі рекурентні співвідношення*

$$\sum_{j=1}^{m} \overline{e}_{jk} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} e_{jk}}{\alpha_{lk}}, \quad r = k,$$

,

$$\sum_{j=1}^{m} \overline{e}_{jr} = \sum_{j=1}^{m} e_{jr} - \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} e_{jk}}{\alpha_{lk}} \alpha_{li}$$

,

$$r = \overline{1,m};\ i = \overline{1,m};\quad r \neq k.$$

Твердження 4. *Для суми елементів рядків оберненої матриці в двох суміжних базисних матрицях виконуються такі рекурентні співвідношення*

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{e_{ri}} = \sum_{i=1}^{m} e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}} (\sum_{i=1}^{m} \alpha_{li} - 1),\ r = \overline{1,m;}$$

Наслідок 1. *Якщо* $S_1^r, S_2^r, \dots, S_m^r$ *- суми елементів стовпців оберненої матриці* $A_b^{-1(r)}$ *на* r*-ій ітерації, то* $S_1^{r+1}, S_2^{r+1}, \dots, S_m^{r+1}$ *на* $r+1$*-ій ітерації обчислюються за формулою*

$$S_p^{r+1} = S_p^r + \alpha_{lp} \times S_k^r,\ p \neq k,\ p \in I$$

$$S_k^{r+1} = S_k^r / \alpha_{lk},\ p = k.$$

Наслідок 2. *Якщо* $S_1^r, S_2^r, \dots, S_m^r$ *- суми елементів стовпців оберненої матриці* $A_b^{-1(r)}$ *на* r *-ій ітерації набувають невід'ємних значень (*$S_1^r \geq 0,\ S_2^r \geq 0,\ \dots, S_m^r \geq 0$*), то дана обернена базисна матриця є оптимальною, а відповідний базисний розв'язок є оптимальним, причому його компоненти знаходяться за співідношенням* $u_{0i} = \sum\limits_{j=1}^{m} e_{ij},\ i = \overline{1,m}$ *(суми елементів рядків оберненої матриці).*

Наслідок 3. *Якщо* $S_1^c, S_2^c, \dots, S_m^c$*- суми елементів рядків оберненої матриці* $A_b^{-1(r)}$ *на* r*-ій ітерації, то* $S_1^{c+1}, S_2^{c+1}, \dots, S_m^{c+1}$ *на* $r+1$*-ій ітерації обчислюються за формулою*

$$S_p^{c+1} = S_p^c + \frac{e_{pk}}{\alpha_{lk}} (\sum_{i=1} \alpha_{li} - 1),\quad p \in I$$

Твердження 5. *Для оптимальності двоїстої задачі лінійного програмування (матричної гри) необхідно та достатньо, щоб суми елементів стовпців оберненої матриці були невід'ємними* $\alpha_{0i} = \sum\limits_{j=1}^{m} e_{ji} \geq 0,\ i = \overline{1,m}.$

Наслідок 4. *Сума елементів рядків оберненої матриці співпадають із значенням відповідної конпоненти вектору проміжного розв'язку на ітераціях методу базисних матриць.*

Доведення. Справедливість тверджень є наслідком властивостей розкладу елементів методу базисних матриць за рядками базисної матриці. Неважко переконатись, що при $B = \underbrace{1, 1, ..., 1}_{m}$; $C = (\underbrace{1, 1, ..., 1}_{n})^T$ та відомими A_b, A_b^{-1} $\alpha_0 = B \times A_b^{-1},\ u_0 = A_b^{-1} \times C_b$ для формул зв'язку елементів методу базисних матриць будуть справедливі наступні співвідношення $\alpha_{0i} = \sum\limits_{j=1}^{m} e_{ji},\ i = \overline{1,m}$, $u_{0i} = \sum\limits_{j=1}^{m} e_{ij},\ i = \overline{1,m}.$

При розв'язанні двоїстої пари задач лінійного програмування (матричної гри у змішаних стратегіях) на основі методу базисних матриць можна встановити ряд властивостей.

Твердження 6. *Для единості оптимального розв'язку прямої задачі лінійного програмування (матричної гри) необхідно та достатньо, щоб суми елементів стовпців оберненої матриці були строго додатними:* $\alpha_{0i} = \sum\limits_{j=1}^{m} e_{ji} > 0$, $i = \overline{1,m}$, *тобто* $S_1^c > 0,\ S_2^c > 0,\ \dots, S_m^c > 0$ *при* $\exists\, k_0,\ \alpha_{k_0} = 0,\ (S_{k_0}^c = 0)$, *розв'язок неєдиний.*

Схема методу псевдо базисних матриць для матричної гри у змішаних стратегіях.

1. Якщо існує псевдобазисна матриця A_b, що розклад за її рядками вектору цільової функції має $\alpha_{0k} = S_k^c = \sum\limits_{j=1}^{m} e_{jk} \geq 0$, $k = \overline{1,m}$, $\Delta_r \leq 0$, $r \in J$, то дана псевдобазисна матриця є оптимальною, а відповідній їй псевдобазисний розв'язок оптимальним, причому при $\alpha_{0k} = S_k^c = \sum\limits_{j=1}^{m} e_{jk} > 0$, $k = \overline{1,m}$ розв'язок єдиний, а при $\exists r$ такого, що $\alpha_{0k} = S_k^c = \sum\limits_{j=1}^{m} e_{jk} = 0$, то розв'язок неєдиний.

2. Якщо існує псевдобазисна матриця A_b та індекс l такий, що $\Delta_l > 0$, для якого $a_{li} > 0$, а також індекс k такий, що

$$-\frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}} = \min_{\substack{i,\\ \alpha_{li}>0}} \frac{\alpha_{0i}}{\alpha_{li}},$$

то при заміні рядка k на l нова матриця $\overline{A}_b$ буде псевдобазисною. При цьому можна перейти до нового псевдобазисного розв'язку, в якому значення цільової функції зменшиться на $-\frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}}\Delta_l$.

3. Якщо існує A_b, в якому $a_{0k} \geq 0,$, $k = \overline{1,m},$, $a_r u_0 \leq c_r$, де u_0 - псевдовершина, що відповідає A_b, то обмеження $a_r u \leq c_r$ пасивне і може бути виключене із обчислень.

4. Існування для псевдобазисної матриці A_b обмеження $a_l u \leq c_l, l \in J$, з властивостями: $\Delta_l > 0,$, $\alpha_{li} \leq 0,$, $i = \overline{1,m}$ є умовою нерозв'язності за несумісністю (5).

Розглянемо модель лінійного програмування типу (7)-(9). Загальна схема релаксаційного методу оптимізаційного аналізу лінійної системи, особливо великої розмірності, може бути подана наступним алгоритмом.

АЛГОРИТМ 1.

Крок 1. Припустимо, що відомий псевдобазисний розв'язок u_0 та псевдобазисна матриця A_b, яка визначається множиною нормалей обмежень J_b, $J_H \subset J$ - множина небазисних обмежень, причому $J = J_b \cup J_H$.

Крок 2. На основі псевдобазисного розв'язку u_0 утворимо множину J_R, що складається із підмножини індексів обмежень, а саме $J_R = J_b \cup J_H^+$, де $J_H^+ = \{j \ / \ j \in J,\ \Delta_j > 0\}$, (схема допускає введення допоміжного обмеження на потужність елементів множини ${J_H}^+$, тобто можна регулювати потужність множини) .

Крок 3. Формуємо підзадачу виду

$$maxB\mathrm{u},$$

$$a_j u \leq c_j,\ j \in J_R.$$

Крок 4. Знаходимо оптимальний розв'язок $\bar{u}_0$ та $_b$ задачі (15), (16) МПБМ.

Крок 5. Якщо множина J_H^+ не є порожньою відносно $\bar{u}_0$, то $u_{\bar{0}} = \bar{u}_0$, $A_b = \bar{A}_b$ переходимо на крок 2 , в протилежному − на крок 6.

Крок 6. Якщо J_H^+ порожня множина, то це означає оптимальність $\bar{u}_0$ для (5).

Крок 7. Завершення роботи алгоритму.За розв'язками задачі лінійного програмування [5,6] формуються оптимальні стратегії гравців.

Висновки. За побудовою, релаксаційна схема коректно вписується в МПБМ, що дає змогу замінити дослідження початкової задачі послідовністю взаємозв'язаних задач меншої розмірності. В ході ітераційного процесу можуть ідентифіковуватися пасивні обмеження системи (несуттєві чисті стратегії). Обчислення елементів методу (при розв'язанні матричної гри) суттєво спрощуються (вектор розкладу цільової функції та компоненти проміжного розв'язку). На основі тверджень, що обгрунтовують МПБМ, можуть бути запропоновані різноманітні алгоритмічні схеми проведення аналізу та оптимізації лінійної системи. Слід зазначити, що структурні особливості задачі (4)-(6) такі як наявність $0 \notin E^m$ та відповідної псевдобазисної матриці, сприятливі для застосування МПБМ до цієї задачі (початкова псевдобазисна матриця формується на основі нормалей обмежень, що формують півпростори додатнього ортанту).

1. *Гольштейн Е. Г.* Новые направления в линейном программировании. – М.: Советское радио., 1969. – 524 с.
2. *Данциг Г. Б.* Линейное программирование его обобщение и применение. – М.: Прогресс., 1966. – 524 с.
3. *Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б.* Линейное программирование. Теория и конечные методи. – М.: Наука., 1963. – 776 с.
4. *Dantzig G. B., Thapa M. N.* Linear Programming 1: introduction. – Springer, 1997. – 435 с.
5. *Лэсдон Л. С.* Оптимизация больших систем. – М.: Наука., 1975. – 430 с.
6. *Roos Cornelis.* The umbrella approach to linear programming // Seminarber. Humboldt. Univ. Berlin.Sect. – 1984. – **64**, – P. 67–79.
7. *Кудин В. И., Ляшко С. И., Яценко Ю. П., Хритоненко Н. В.* Анализ свойств линейной системы методом искусственных базисных матриц// Кибернетика и системный анализ . – 2007.- №4. – С. 119–127.
8. *Кудін В. І.* Аналіз оптимальних роз'язків задачі лінійного програмування// Вісн. Київськ. ун-ту. Сер.фіз.-мат. науки. – 2002.- Вип. 1. – С. 249–254.

Одержано 03.02.2013