УДК 519.21

В. К. Ясинский, И. В. Юрченко (Черновицкий нац. ун-т им. Ю. Федьковича)

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО НЕАВТОНОМНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С МАРКОВСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

It is proved the existence of the second moment of the strong solution of the stochastic Cauchy problem for the non-autonomous stochastic partial differential equation with continuous Markov process as a parameter. It is obtained the sufficient conditions of the asymptotic stability in the mean square with the help of Lyapunov function.

Для стохастичної задачі Коші неавтономного стохастичного рівняння в частинних похідних з неперервним марковським процесом в якості параметра доведено існування другого моменту сильного розв'язку, отримано достатні умови асимптотичної стійкості в середньому квадратичному за допомогою стохастичної функції Ляпунова.

Введение. Доказательству существования и асимптотического поведения решений детерминированных уравнений в частных производных посвящено достаточное число работ, ссылки на которые можно найти в монографиях [1], [2], [3]. После введения понятий стохастического дифференциала и интеграла, замены переменных Ито для стохастического дифференциала, стохастического дифференциального уравнения (СДУ) как интегрального уравнения с интегралом Ито-Скорохода такими известными учеными как Гихман И.И., Скороход А.В., Хасьминский Р.З., Колмановский В,Б., Царьков Е.Ф. (см. [4]– [9]) стало возможным изучение асимптотического поведения сильного решения СДУ в частных производных (СДУвЧП) [10]– [14] и др.

Дальнейшее изучение СДУвЧП шло по пути рассмотрения в этих уравнениях случайных параметров, которые представляли бы более точную математическую модель реальных сложных систем [4], [5], [14] и др.

Данная работа посвящена исследованию асимптотического поведения сильного решения линейного СДУвЧП с учетом непрерывного марковского процесса [14], [15].

1. Постановка задачи. На вероятностном базовом пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} \equiv \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ [3] рассмотрим задачу Коши для линейного стохастического дифференциального уравнения в частных производных (ЛСДУвЧП) [14]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[Q\left(A(t,\xi(t)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x,\omega)\right] = Q\left(B(t,\xi(t)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x,\omega) +$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\left[Q\left(C(t,\xi(t)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x,\omega)\right]\frac{dw(t,\omega)}{dt}, \quad (1)$$

с начальными условиями

$$Q\left(A(t,\xi(t)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x,\omega)\bigg|_{t=0} = [Qu]_0, \quad (2)$$

Здесь
$$Q(A(\cdot),q,p) \equiv \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{kj}(t,\xi(t))q^k p^j,$$
$$Q(B(\cdot),q,p) \equiv \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_{kj}(t,\xi(t))q^k p^j,$$
$$Q(C(\cdot),q,p) \equiv \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{kj}(t,\xi(t))q^k p^j,$$
где $A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot)$ — матрицы размерности $n\times m$, содержащие соответствующие бэровские функции, которые зависят от t и $\xi(t) \equiv \xi(t,\omega) \in \mathbb{Y}$ для произвольного $t \geq t_0$, $\omega \in \Omega$ — стохастически непрерывный феллеровский марковский процесс с непрерывными справа реализациями на компактном фазовом пространстве $\mathbb{Y}$ [15], [16].

Обозначим через $w(t) \equiv w(t,\omega) : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^1$ — стандартный винеровский процесс, $T > 0$ [8], а через $\dfrac{dw(t,\omega)}{dt}$ обозначим "белый шум"(производная от $w(t,\omega)$ с вероятностью единица не существует [16], [17]).

Обозначим далее через $\mathfrak{M}_T$ пространство функций $u(t,x,\omega) : [0,T]\times\mathbb{R}^1\times\Omega \to \mathbb{R}^1$, измеримых по t и x с вероятностью единица относительно σ-алгебры борелевских множеств фазового пространства $\mathcal{B}([0,T],\mathbb{R}^1)$ и для которых существует несобственный интеграл
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}\{|u(t,x,\omega)|^2\}dx < \infty \tag{3}$$
при любом $t \in [0,T]$, $\mathbb{E}\{\cdot\}$ — знак математического ожидания.

Для дальнейших исследований введем нормы, свойства которых легко проверить [18]
$$\|u(t,x,\omega)\|^2_{L_{2R}} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t,x,\omega)|^2 dx, \tag{4}$$
$$\|u(t,x,\omega)\|^2_{2T} \equiv \int_{0}^{T} |u(t,x,\omega)|^2 dt, \tag{5}$$
и
$$\mathbb{E}_u(t) \equiv \mathbb{E}\{\|u(t,x,u)\|^2_{L_{2R}}\}. \tag{6}$$

Далее под L_{2R}, L_{2T} будем понимать пространства функций $u(t,x,\omega)$, имеющие соответствующие нормы (4), (5).

В пространстве $\mathfrak{M}_T$, наконец, введем норму согласно (6), а именно
$$\|u(t,x,\omega)\|^2 \equiv \int_0^T \mathbb{E}_u(t)dt = \int_0^T \mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t,x,\omega)|^2 dx\right]^2 dt. \tag{7}$$

Под решением задачи Коши для ЛСДУвЧП (1), (2) будем понимать случайную функцию $u(t,x) \equiv u(t,x,\omega) : [0,T] \times \mathbb{R}^1 \times \Omega \to \mathbb{R}^1$, которая согласованна с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ [19] и такую, что с вероятностью единица при каждом (t,x) удовлетворяет уравнению

$$Q\left(A(t,\xi(t)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x) = [Qu]_0 + \int\limits_0^t Q\left(B(s,\xi(s)), \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(s,x)ds +$$

$$+ \int\limits_0^t Q\left(C(s,\xi(s)), \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(s,x)dw(s). \tag{8}$$

Отметим, что случайная функция $u(t,x)$ с вероятностью 1 непрерывна по $t \in [0,T]$ в силу конструкции $Q(\cdot, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x})$ и непрерывности по t интеграла Ито и интеграла Римана, как функций верхнего предела.

2. Существование решения стохастической задачи Коши для ЛСДУвЧП (1), (2). Будем рассматривать задачу о существовании решения стохастической задачи Коши (1), (2) в среднем квадратичном в пространстве $\mathfrak{M}_T^1 \subset \subset \mathfrak{M}_T$, для элементов которого для произвольной матрицы $A(t,y)$, $y \in \mathbb{Y}$, имеет место включение

$$Q\left(A(t,y), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x) \in \mathfrak{M}_T.$$

Лемма 1. *Преобразование Фурье по* x *для случайной функции* $u(t,x) \equiv \equiv u(t,x,\omega)$*, а именно*

$$v(t,\sigma) \equiv v(t,\sigma,\omega) \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x}u(t,x,\omega)dx, \tag{9}$$

не выводит ее из пространства $\mathfrak{M}_T$ *для произвольного конечного* $0 < T < \infty$ *с вероятностью единица.*

Доказательство. Существование с вероятностью единица преобразования Фурье [20], [21] следует из принадлежности $u(t,x)$ пространству L_{2R} для произвольного $t \in [0,T]$, поскольку верно неравенство Чебышева [16]

$$\mathbb{P}\left\{\omega : \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |u(t,x,\omega)|dx > N\right\} \leq \frac{\mathbb{E}_u(t)}{N} \to 0$$

при $N \to +\infty$. По теореме Планшереля [18] имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |v(t,\sigma,\omega)|^2 d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |u(t,x,\omega)|^2 dx,$$

т.е. $\|v(t,\sigma)\|_{L_{2R}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|u(t,x)\|_{L_{2R}}$.

Значит, $\|v(t,\sigma)\|_{\mathfrak{M}_T} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|u(t,x)\|_{\mathfrak{M}_T}$, что и доказывает лемму 1.

Теорема 1. *Пусть:*

1) *выполнены требования постановки задачи пункта 1 и условия Липшица на коэффициенты уравнения* (1);

2) *бэровские функции* $a_{kj}(t,y)$, $b_{kj}(t,y)$, $c_{kj}(t,y)$, $k=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,m}$ *удовлетворяют глобальному условию ограниченности модулей* $|a_{kj}(t,y)|^2+|b_{kj}(t,y)|^2+|c_{kj}(t,y)|^2\leq L\ \forall\ y\in\mathbb{Y}$;

3) $\mathbb{E}\{\|[Qy]_0\|^l_{\mathfrak{M}_T}\}\leq K$; $l>1$.

Тогда с вероятностью единица существует непрерывное решение стохастической задачи Коши $u(t,x)\equiv u(t,x,\omega)$, *причем существует второй момент* $\mathbb{E}\{\|u(t,x)\|^2_{\mathfrak{M}_T}\}\leq K_1$, *а для случайной функции* $v(t,\sigma)\equiv v(t,\sigma,\omega)$ (*см.* (9)) *существует* l*-й момент* ($l>1$) *как решение задачи СДУ* (10), (11) (*см. ниже*).

Доказательство. Применив преобразование Фурье [20] по переменной $x\in\mathbb{R}^1$ к левой и правой части ЛСДУвЧП (1), (2), получим "формальное"линейное стохастическое дифференциальное уравнение, уже не содержащее частных производных, для случайной функции $v(t,\sigma)\equiv v(t,\sigma,\omega)$

$$\frac{d}{dt}\left[Q(A(t,\xi(t)),\frac{d}{dt},i\sigma)v(t,\sigma)\right]=Q(B(t,\xi(t)),\frac{d}{dt},i\sigma)v(t,\sigma)+$$

$$+Q(C(t,\xi(t)),\frac{d}{dt},i\sigma)v(t,\sigma)\frac{dw(t)}{dt},\tag{10}$$

$$Q(A(t,\xi(t)),\frac{d}{dt},i\sigma)v(t,\sigma)v(t,\sigma)\Bigg|_{t=0}=[Qv]_0.\tag{11}$$

Полученную задачу Коши для ЛСДУ (10), (11) следует понимать как стохастическое интегральное уравнение [6], [19]

$$v(t,\sigma)=v_0(t,\sigma)+\int\limits_0^t Q(B(s,\xi(s)),\cdot,i\sigma)v(s,\sigma)ds+$$

$$+\int\limits_0^t Q(C(s,\xi(s)),\cdot,i\sigma)v(s,\sigma)dw(s)\tag{12}$$

с начальным условием(11).

В условиях теоремы 1 существует с вероятностью единица сильное непрерывное решение $v(t,\sigma)\equiv v(t,\sigma,\omega)$ при $\sigma\neq 0$ ЛСДУ (10), (11) с $\mathbb{E}\{\|v(t,\sigma)\|^l_{\mathfrak{M}_T}\}<$ $<\infty$, $l>1$, [6], [9], а в силу леммы 1 существует с вероятностью единица сильное непрерывное решение $u(t,x)\equiv u(t,x,\omega)$ ЛСДУвЧП (1), (2) с $\mathbb{E}\{\|u(t,\sigma)\|^2_{\mathfrak{M}_T}\}<$ $<\infty$. ■

3. Асимптотическое поведение тривиального решения рассматриваемых стохастических дифференциальных уравнений. Вначале обсудим асимптотику поведения ЛСДУ (12) тривиального решения $v(t,\sigma)\equiv 0$ при $\sigma\neq 0$ с начальным условием (11). Отметим, что при постановке задачи пункта 1 применяется метод стохастической функции Ляпунова [4] для исследования асимптотической устойчивости в среднем квадратичном, l-устойчивости ($l > 1$), экспоненциальной l-устойчивости, глобальной экспоненциальной l-устойчивости, глобальной экспоненциальной l-устойчивости в целом [16] (раздел 8, с.543—558).

Дадим соответствующие определения устойчивости тривиального решения $v(t,\sigma) \equiv 0$, $\sigma \neq 0$ СДУ (10), (11) со следующими ограничениями на коэффициенты

$$Q(B(t,y), \cdot i\sigma)v(t,\sigma) \equiv 0 \quad \forall\, y \in \mathbb{Y}, t \in [-,\infty),$$

$$Q(C(t,y), \cdot i\sigma)v(t,\sigma) \equiv 0 \quad \forall\, y \in \mathbb{Y}, t \in [0,\infty). \tag{13}$$

Определение 1. *Тривиальное решение* $v(t,\sigma) \equiv 0$, $\sigma \neq 0$ *задачи* (10), (11) *назовем:*

— стохастически устойчивым, если $\forall\, \varepsilon_1 > 0\ \forall\, \varepsilon_2 > 0\ \exists\, \delta > 0$, *что из неравенства* $|Qv|_0 < \delta$ *для* $t_0 > 0$, $y \in \mathbb{Y}$ *следует неравенство*

$$\mathbb{P}\{\omega : \sup_{t \geq 0} |Q(D(t,y), \cdot, i\sigma)v(t,\sigma)| \geq \varepsilon_1\} < \varepsilon_2 \tag{14}$$

где D *имеет конструкцию* $D(\xi(t)) \equiv \{d_{kj}(\xi(t))\}_{k,j=1}^{n,m}$, $d_{kj}(\cdot)$ *— бэровские функции.*

— асимптотически стохастически устойчивым, если выполнено условие (14) *и существует такое* $\delta_1 > 0$, *что для* $t_0 \geq 0$, $y \in \mathbb{Y}$ *и* $|Qv|_0 < \delta_1$ *имеет место соотношение*

$$\mathbb{P}\{\omega : \lim_{t \to \infty} |Q(D(t,y), \cdot, i\sigma)v(t,\sigma)| = 0\} = 1. \tag{15}$$

Определение 2. *Тривиальное решение* $v(t,\sigma) \equiv 0$, $\sigma \neq 0$ *задачи* (10), (11) *назовем:*

— l*-устойчивым, если*

$$\lim_{|Qv|_0 \to 0} \sup_{t \geq t_0 \geq 0} \mathbb{E}\{|Q(D(t,y), \cdot, i\sigma)v(t,\sigma)|^l\} = 0, \tag{16}$$

— асимптотически l*-устойчивым, если решение* l*-устойчиво и существует такое* $v > 0$, *что*

$$\lim_{t \to \infty} |\mathbb{E}\{|Q(D(y,t), \cdot, i\sigma)v(t,\sigma)|^l\}| = 0 \tag{17}$$

$\forall\, t_0 > 0$, $y \in \mathbb{Y}$ *и* $|[Qv]_{t_0}| < \delta$.

Определение 3. *Тривиальное решение* $v(t,\sigma) \equiv 0$, $\sigma \neq 0$ *задачи* (10), (11) *назовем:*

— экспоненциально l*-устойчивым, если существуют такие* $\delta > 0$, $M > 0$ *и* $\gamma > 0$, *что для произвольных* $t \geq t_0 \geq 0$, $y \in \mathbb{Y}$ *и* $|[Qv]_{t_0}| < \delta$ *имеет место неравенство*

$$\mathbb{E}\{|Q(D(t,y), \cdot, i\sigma)v(t,\sigma)|^l\} \leq Me^{-\gamma(t-t_0)|[Qv]_0|^l}, \tag{18}$$

— глобально экспоненциально l*-устойчивым, если условие* (18) *выполняется для всех* $t \geq t_0 \geq 0$, $y \in \mathbb{Y}$ *и* $[Qv]_0 \in \mathbb{R}^1$.

Далее рассмотрим скалярную непрерывную функцию Ляпунова [7], [16] по всем переменным

$$\mathbb{V} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}^1, \tag{19}$$

для которой выполнено глобальное условие Липшица

$$|\mathbb{V}(t, v_1, y) - \mathbb{V}(t, v_2, y)| \leq L|v_1 - v_2| \tag{20}$$

для всех $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^1$ и условие глобальной ограниченности $\forall\, y \in \mathbb{Y}$

$$\sup_{t \geq 0} |\mathbb{V}(t, v_1, y) - \mathbb{V}(t, v_2, y)| = \alpha(y) < \infty. \tag{21}$$

Определение 4. *Оператор $(\mathfrak{L}\mathbb{V})(s, v, y)$ назовем производной Ляпунова на решениях СДУ (10), (11), если функция $\mathbb{V} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Y}$ непрерывна по s, v, y, ограничена на каждом множестве $[t_1, t_2] \times U_\delta(0) \times \mathbb{Y}$, $U_\delta(0) \equiv |v(t, \sigma)| < \delta;\ \sigma \neq 0$ и выполняется условие: $\forall\, s \geq 0$, $y \in \mathbb{Y}$ и $v \in \mathbb{R}^1$ найдется такое $\Delta > 0$, что выполняется неравенство*

$$\sup_{0 \leq t \leq \Delta} \frac{1}{t} |\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+t, v(s+t, \sigma), \xi(t)) - \mathbb{V}(s, v(s, \sigma), \xi(t))\}| \leq K < \infty$$

равномерно по аргументу v, а также существует предел

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+t, v(s+t, y), \xi(s)) - \mathbb{V}(s, v, y)\}] \equiv (\mathfrak{L}\mathbb{V})(s, v, y). \tag{22}$$

Для использования определения 4 введем обозначение $\mathbb{V} \in \mathcal{D}(\mathfrak{L}_1)$. Если непрерывный функционал $\mathbb{V} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}^1$ удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу v и условию равномерной ограниченности по первому аргументу t, то оператор $\mathfrak{L}$ полностью определяется правой частью СДУ (10) и слабым инфинитезимальным оператором марковского процесса $\xi(t)$ [15], [16] $\mathfrak{L}\mathbb{V} = \tilde{\mathfrak{L}}_1\mathbb{V} + \tilde{\mathfrak{L}}_2\mathbb{V}$, где

$$(\tilde{\mathfrak{L}}_2\mathbb{V})(s, v, y) = (\nabla\mathbb{V})(s, v, y) Q(B(y), \frac{d}{dt}, i\sigma) +$$
$$+ \frac{1}{2} (\nabla^2\mathbb{V})(s, v, y) Q^2(C(y), \frac{d}{dt}, ß\sigma). \tag{23}$$

Здесь $\nabla\mathbb{V}$ — первая производная ∇_v; $\nabla^2\mathbb{V}$ — вторая производная $\mathbb{V}_{v^2}$ [16].

Определение 5. *Оператор $\mathfrak{L}(\mathbb{V})(s, v, y)$ назовем производной Ляпунова на решениях СДУ* (10), (11), *а значит, в силу леммы 1 и на решениях СДУ* (1), (2), *если функция Ляпунова $\mathbb{V}(s, v, y) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Y}$ непрерывна по всем трем аргументам, ограничена на каждом множестве $[t_1, t_2] \times \mathbb{U}_r(0) \times \mathbb{Y}$ и выполняются условия определения 4, где $\mathbb{U}_r(0) \equiv \{v \in \mathbb{R}^1 : \|v\| < r\}$, $r > 0$. Обозначим это, как и ранее, $\mathbb{V} \in \mathcal{D}(\mathfrak{L})$.*

Определение 6. *В условиях определения 5 верхней производной Ляпунова* [7] *назовем соотношение*

$$\lim_{t \downarrow 0} \sup_{0 < t \leq \Delta} \frac{1}{t} [\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+t, v(s+t, u(s), y), \xi(s))\} - \mathbb{V}(s, v(s), y)] \equiv (\mathfrak{L}\mathbb{V})(s, v, y), \tag{24}$$

если для всех достаточно малых $\Delta > 0$ в каждой окрестности $\mathbb{U}_r(0) \times \mathbb{Y}$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\Delta}|\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+\Delta, v(s+\Delta), \xi(\Delta))\} - \mathbb{V}(s,v,y)| < g_r(s,v,y), \tag{25}$$

где $g_r(s,v,y)$ является непрерывной функцией своих аргументов и ограничена по второму аргументу v в каждой окрестности $\mathbb{U}_r(0)$.

Отметим, что при наложенных ограничениях на функцию Ляпунова $\mathbb{V}$ выполняется неравенство Дынкина [15].

Лемма 2 ([15]). *Если непрерывная по всем аргументам функция Ляпунова $\mathbb{V}(s,v,y)$ удовлетворяет условиям (20), (21), то выполняется неравенство Дынкина*

$$\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+\tau_r(t), v(s+\tau_r(t), v(s,u(s),\xi(\tau_r(t)))), \xi(\tau_r(t)))\} \leq$$

$$\leq \mathbb{V}(s,v,y) + \mathbb{E}\left\{\int\limits_0^{\tau_r(t)} (\mathcal{L}\mathbb{V})(s+z, v(s+z,u(s),y), \xi(z))dz\right\}. \tag{26}$$

Доказательство можно найти в [16] (с.550—551).

Исходя из вышеупомянутых жестких условий на функцию Ляпунова $\mathbb{V}$, можно установить [16] следующие вспомогательные неравенства для решения $v(t,\sigma,\omega)$ задачи Коши для СДУ (10), (11), а значит и для решения $u(t,x,\omega)$ задачи Коши (1), (2) для ЛСДУвЧП (1), (2) согласно лемме 1. Следует воспользоваться этими условиями и неравенством Гронуолла.

Лемма 3 ([16]). *Пусть выполняются локальные условия Липшица для коэффициентов искомого решения $u(t,x,\omega)$ уравнения* (1), (2), *а значит и для коэффициентов искомого решения $v(t,\sigma,\omega)$ уравнения* (10), (11). *Тогда решение задачи* (10), (11) ((1), (2)) *допускает оценку $\forall\, T \geq 0$, $s \geq 0$, $y \in \mathbb{Y}$ и $v_0 \in \mathbb{R}^1$ ($u_0 \in \mathbb{R}^1$)*

$$\sup_{0\leq t\leq T} |v(t+s,s,v_0,y)| = (\|v_0\| + \alpha KT)e^{KT}, \tag{27}$$

$$\sup_{t_1,t_2\in[s,s+T]} |v(t_2,s,v_0,y) - v(t_1,s,v_0,y)| \leq$$

$$\leq K[(|v_0| + \alpha KT)e^{KT} + \alpha]|t_2 - t_1|, \tag{28}$$

где в леммах 2, 3 *$v(t,s,v_0,y)$ обозначено решение задачи* (10), (11) *в момент времени $t \in [0,T]$, считая начальным момент s и в этот момент значение решения v_0 и значение марковского процесса $y \in \mathbb{Y}$.*

Исходя из связи u задачи (1), (2) и v задачи (10), (11), для решения u задачи (1), (2) будут выполняться неравенства типа (27), (28).

Теорема 2. *Пусть:*

1) *выполняются локальные условия Липшица для коэффициентов уравнения* (10), (11)*;*

2) *выполняется условие ограниченности для коэффициентов т.н. "подлинейного"роста;*

3) *существует функция Ляпунова* $\mathbb{V}(s, v, y)$ *с оценкой снизу и сверху*

$$c_1|v|^{l_1} \leq \mathbb{V}(s, v, y) \leq c_2|v|^{l_2} \tag{29}$$

для всех $c_1, c_2 > 0$, $l_2 \geq l_1 > 0$, *всех* $s \subset \mathbb{R}_+$, $y \in \mathbb{V}$, $v \in \mathbb{R}^1$;

4) *для функции Ляпунова* $\mathbb{V}(s, v, y)$ *в силу СДУ* (10), (11) *выполняется неравенство*

$$(\mathfrak{L}\mathbb{V})(s, v, y) \leq -c_3|v|^l \tag{30}$$

для всех $s \geq 0$, $y \in \mathbb{Y}$ *и* $v \in \mathbb{R}^1$.

Тогда тривиальное решение задачи Коши для СДУ (10), (11) *асимптотически* l*-устойчиво* ($l > 1$), *а тривиальное решение задачи* (1), (2) *для ЛСДУвЧП асимптотически устойчиво в* $l.i.m.$

Доказательство. Заметим, что в силу линейности СДУ (10) выполняется условие тождественного равенства нулю коэффициентов этого уравнения при $v \equiv 0$. Поэтому в теореме 2 и в ниже приведенных утверждениях исследоваться на устойчивость будет тривиальное решение $v \equiv 0$.

Поскольку $\mathbb{P}\{\omega : \lim\limits_{r\to 0} \tau_r(t) = t\} = 1$ для всех $t > 0$, в (26) вместо $\tau_r(t)$ можно использовать t.

Значит, вместе с неравенством Дынкина (26) и неравенством (27) для $t \geq \tau$ можно записать неравенство

$$c_1\mathbb{E}\{|v(t+s, s, v_0, y)|^{l_1}\} \leq \mathbb{E}\{|\mathbb{V}(s+t, v(s+t, v_0, y), \xi(s))|\} \leq$$

$$\leq c_2\mathbb{E}\{|v(s+\tau, v_0, y)|^{l_2}\} - c_3\int\limits_{\tau}^{t} \mathbb{E}\{|v(s+z, s, v_0, y)|^{l}\}dz \leq$$

$$\leq c_2|v_0|^{l_2}\exp\{l_2KT\} - c_3\int\limits_{\tau}^{t} \mathbb{E}\{|v(s+z, s, v_0, y)|^{l}\}dz.$$

Отсюда, согласно определения 3, следует l-устойчивость тривиального решения $v(t, \sigma, \omega) \equiv 0$ задачи (10), (11) для $l \leq l_1$ и сходимости интеграла

$$\int\limits_{\tau}^{\infty} \mathbb{E}\{|v(s+z, s, v_0, y)|^{l}\}dz < \infty. \tag{31}$$

Таким образом, из сходимости интеграла (31) следует асимптотическая l-сходимость тривиального решения задачи (10), (11) ($l > 1$).

Далее, согласно лемме 1, существует связь (9) между $v(t, \sigma)$ и $u(t, x, \omega)$, а значит, согласно теореме Планшереля [18], [20] при $l = 2$ асимптотическая 2-устойчивость тривиального решения задачи Коши (1), (2) $\forall\, t_0, y \in \mathbb{Y}$ и $v \in \mathbb{U}_\delta(0)$. ■

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *с* $l_2 = l_1 = l > 0$. *Тогда тривиальное решение* $v(t, \sigma, \omega) \equiv 0$ *задачи* (10), (11), *а также тривиальное решение* $u(t, x, \omega) \equiv 0$ *задачи Коши* (1), (2) *глобально экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. На решениях СДУ (10), (11) и с переходной вероятностью $p(t, y, dz)$ марковского процесса $\xi(t) \in \mathbb{R}^1$ определим при условии непрерывности по всем переменным $\mathbb{V}$ линейный оператор [15]

$$(T(t)\mathbb{V})(s, v, y) \equiv \int\limits_{\mathbb{Y}} \mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+t, v(s+t, v_0, y), z)\}\mathbb{P}(t, y, dz) \tag{32}$$

со свойствами [15], [16]:

I) Результат действия оператора $T(t)$ на $\mathbb{V}(t, v, \xi)$ является непрерывной функцией по аргументам, т.е. $C(\tilde{\mathbb{Y}}) \to C(\tilde{\mathbb{Y}})$, где $\tilde{\mathbb{Y}} \equiv [0, \infty) \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Y}$.

II) Оператор $T(t)$, $t \geq 0$, образует полугруппу

$$T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2) \quad \forall\, t_1, t_2 \geq 0.$$

III) Семья линейных операторов на фазовом пространстве $\tilde{\mathbb{Y}}$ определяет стохастически непрерывный марковский процесс C непрерывными справа реализациями.

Обозначив $z(t) \equiv (C(t)\mathbb{V}(s, v, y))$, перепишем неравенство Дынкина (26) в виде

$$z(t_2) \leq z(t_1) - \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathbb{E}\{(\mathcal{L}\mathbb{V}(s+t, v(s+t, v_0, y), \xi(t)))\}dt. \tag{33}$$

Если $\mathbb{V}$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то из неравенства (33) и очевидных соотношений

$$(\mathcal{L}\mathbb{V})(s, v, y) \leq -c_3|v(0)|^l \leq -\frac{c_3}{c_1}\mathbb{V}(s, v, y)$$

получим неравенство

$$z(t_2) - z(t_1) \leq -\frac{c_3}{c_1}\int\limits_{t_1}^{t_2} z(t)dt.$$

Таким образом, учитывая доказанное выше неравенство, получим цепочку тривиальных неравенств

$$\mathbb{E}\{|v(s+t, s, v_0, y)|^l\} \leq \frac{1}{c_1}\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+t, v(s+t, v_0, y), \xi(t))\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{c_1}\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+\tau, v(s+\tau, v_0, y), \xi(t))\} \exp\{\frac{c_3}{c_1}(t-\tau)\} \leq$$

$$\leq \frac{c_2}{c_1}\exp\{\frac{c_3}{c_1}(t-\tau)\}\exp\{p_2 Kh|v_0|^l\} \tag{34}$$

для всех $v_0 \in \mathbb{R}^1$, $s \geq 0$, $y \in \mathbb{Y}$ и $t \geq \tau$.

Очевидно, что согласно лемме 1, имеем при $l = 2$ экспоненциальную устойчивость в l.i.m. тривиального решения задачи Коши СДУвЧП (1), (2). ■

Теорема 4. *Пусть:*

1) *выполнены локальные условия Липшица для коэффициентов ЛСДУвЧП (1);*

2) *существует функция Ляпунова, удовлетворяющая условиям* 3), 4) *теоремы* 2.

Тогда:

a) *нулевое решение* $v(t,\cdot,\omega) \equiv 0$ *задачи Коши для ЛСДУвЧП* (1), (2) *асимптотически стохастически устойчиво.*

Доказательство. а) Пусть τ_r — момент первого выхода решения $v(t,x,\omega)$ ЛСДУ (10) из сферы $\mathbb{U}_r(0)$. Тогда для $\forall\, t \geq 0$ и $\forall\, r > 0$ по формуле Дынкина [15] и определению функции Ляпунова, очевидно, выполняется неравенство

$$c_1\mathbb{E}\{|v(s+\tau_r(t),s,v_0,y)|^l\} \leq \mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+\tau_r(t),v(s+\tau_r(t),s,v_0),\xi(\tau_r(t)))\} \leq$$
$$\leq \mathbb{V}(s,v_0,y) \leq c_1|v_0|^l. \tag{35}$$

Поскольку $\lim\limits_{t\to 0}\tau_r(t) = t$, то существует

$$\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+t,v(s+t,s,v_0,\xi(t)))\} < \infty$$

для всех $t \geq 0$, $v_0 \in \mathbb{R}^1$, $s \geq 0$ и $y \in \mathbb{Y}$.

Пусть $\mathcal{F}_t$ — минимальная σ-алгебра, относительно которой измеримы все $\xi(s)$ для $s \in [0,t]$.

Тогда $\mathbb{V}(s+t,v(s+t,s,v_0,y),\xi(t))$ тоже $\mathcal{F}_t$-измеримо, а марковское свойство для произвольного $z \in [0,t]$ обеспечивает выполнение основного равенства в определении марковского процесса

$$\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+t,v(s+t,s,v_0,y),\xi(t))|_{\mathcal{F}_z}\} =$$
$$= \mathbb{E}\{\mathbb{V}(s_1+(t-z),v(s_1+(t-z),s,v_1,h),\xi(t-z))\},$$

где правая часть должна быть вычислена при $s_1 = s+z$, $h = \xi(z)$, $v_1 = v(s+ + z,s,v_0,y)$.

Далее, из неравенства (30) можно получить неравенство

$$\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+t,v(s+t,s,v_0,y),\xi(t))|_{\mathcal{F}_z}\} \leq \mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+z,v(s+z,s,v_0,y),\xi(t))\}.$$

А это по определению супермартингала [16] означает, что $\mathbb{V}(s+t,v(s+ +t,s,v_0,\xi(t)))$ является неотрицательным супермартингалом для $t \geq 0$. Значит, существует предел

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{V}(s+t,v(s+t,s,v_0,y),\xi(t)) = \eta(\omega) \geq 0$$

с вероятностью единица.

Далее, из неравенств (29), (30) теоремы 2 можно получить неравенства

$$\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+t,v(s+t,s,v_0,y),\xi(t))\} \leq$$
$$\leq c_2|v_0|^l - c_3\int\limits_0^t \mathbb{E}\{|v(s+s_1,s,v_0,y)|^l\}ds_1 \leq$$
$$\leq c_2|v_0|^l - \frac{c_3}{c_1}\int\limits_0^t \mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+s_1,v(s+s_1,s,v_0,y),\xi(t_1))|\}ds_1.$$

А это обозначает, что

$$\mathbb{E}\{\eta(\omega)\} = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+t, v(s+t,s,v_0,y),\xi(t))\} \leq$$

$$\leq c_2|v_0|^l \lim_{tto\infty} e^{-\frac{c_3}{c_1}t} = 0.$$

Откуда сразу следует $\mathbb{P}\{\omega : \eta\omega) = 0\} = 1$.

Для завершения доказательства следует учесть основное неравенство для супермартингалов [16], [20], на основании которого при $\forall\, \varepsilon > 0$ имеем:

$$\mathbb{P}\{\omega : \sup_{t\geq T} |v(s+t,s,v_0,y)| \geq \varepsilon\} \leq$$

$$\leq \mathbb{P}\{\omega : \sup_{t\geq T} \frac{1}{T}\mathbb{V}(s+t, v(s+t,s,v_0,y),\xi(t)) \geq \varepsilon^l\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{c_1\varepsilon^l}\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+T, v(s+T,s,v_0,y),\xi(T))\} \leq \frac{c_2|\varphi|^l}{c_1\varepsilon^l}\exp\{-\frac{c_3}{c_1}T\}$$

для всех $T > 0$, $\varepsilon > 0$, $v_0 \in \mathbb{R}^1$, $s > 0$, $y \in \mathbb{Y}$.

Осталось рассмотреть предел при $T \to \infty$ и пункт а) теоремы 4 доказан.

Для доказательства пункта б) следует учесть лемму 1. ■

4. Устойчивость ЛСДУвЧП с дискретными марковскими параметрами. Дискретный марковский параметр в ЛСДУвЧП (1), (2) может выступать в следующих структурных характеристиках.

4.1. Рассмотрим скалярный процесс $\xi(t) \in \mathbb{Y}$, который является однородной цепью Маркова с конечным числом состояний $\mathbb{Y} \equiv \{y_1, y_2, ..., y_k\}$, причем известны параметры q_{ij} с условиями

$$q_i = \sum_{j\neq i} q_{ij}, \tag{36}$$

$$\mathbb{P}\{\omega : \xi(t+\Delta t) = y_i|\xi(t) = y_i\} = q_{ij}\Delta t + o(\Delta t), \tag{37}$$

$$\mathbb{P}\{\omega : \xi(\tau) = y_i, t \leq \tau \leq t+\Delta t|\xi(t) = y_i\} = 1 - q_i\Delta t + o(\Delta t). \tag{38}$$

Пусть эта цепь Маркова $\xi(t) \in \mathbb{Y}$ является параметром задачи Коши для ЛСДУвЧП (1), (2).

Допустим, что в момент $\tau > 0$ скачкообразной смены структуры фазовый вектор $u(\tau) \in \mathbb{R}^1$ однозначно определяется состоянием, в котором находилась динамическая система непосредственно перед сменой структуры, вызываемой переходом из состояния $\xi(\tau - 0) = y_i$ в состояние $\xi(\tau) = y_j \neq y_i$. Это означает выполнение равенства

$$u(\tau) = \varphi_{ij}(u(\tau-0)), \quad i \neq j, \tag{39}$$

где $\varphi_{ij}(u) \in \mathbb{R}^1$, причем $\varphi_{ij}(0) = 0$.

С учетом формулы (23) в случае цепи Маркова слабый инфинитезимальный оператор на решениях ЛСДУвЧП (10), (11) имеет вид [15], [18]

$$(\mathfrak{L}\mathbb{V})(s,v,y) = \frac{\partial\mathbb{V}(s,v,y)}{\partial s} + (\nabla\mathbb{V})(s,v,y)Q(B(s,y),\frac{d}{ds},i\sigma) +$$

$$+\frac{1}{2}(\nabla^2\mathbb{V})(s,v,y)Q^2(C(s,y),\frac{d}{ds},i\sigma)+$$
$$+\sum_{j\neq i}^{k}[\mathbb{V}(s,\varphi_{ij}(v),y_j)-\mathbb{V}(s,v,y_j)]q_{ij}. \tag{40}$$

В этом случае верны теоремы 2, 3 и 4 об устойчивости тривиального решения задачи Коши ЛСДУ (10), (11), а, значит, в силу леммы 1 и устойчивости тривиального решения задачи Коши ЛСДУвЧП (1), (2).

4.2. Пусть $\xi(t)\in\mathbb{Y}$ — чисто разрывный скалярный марковский процесс $\forall\, t\in[t_1,t_2]$ такой, что допускает разложение

$$\mathbb{P}\{\omega:\xi(t+\Delta t)\in(\beta,\beta+\Delta\beta)|\xi(t)=\alpha\neq\beta\}=p(t,\alpha,\beta)\Delta t+o(\Delta t), \tag{41}$$

$$\mathbb{P}\{\omega:\xi(\tau)\equiv\alpha,\tau\in(t,t+\Delta)|\xi(t)=\alpha\}=1-p(t,\alpha)\Delta t+o(\Delta t). \tag{42}$$

Тогда слабый инфинитезимальный оператор примет вид [15], [18] на решениях ЛСДУвЧП (10), (11)

$$(\mathcal{L}\mathbb{V})(s,v,\xi(s))=\frac{\partial\mathbb{V}(s,v,\xi(s))}{\partial s}+(\nabla\mathbb{V}(s,v,\xi(\omega))Q(B(s,y),\frac{d}{ds},i\sigma))+$$
$$+\frac{1}{2}(\nabla^2\mathbb{V})(s,v,y)Q^2(C(s,y),\frac{d}{ds},i\sigma)+$$
$$+\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}[\mathbb{V}(s,v,\beta)-\mathbb{V}(s,v,\alpha)]p(t,\alpha,\beta)d\beta. \tag{43}$$

Заметим, что и в этом случае теоремы 2, 3, 4 об устойчивости тривиального решения $v(t,\sigma,\omega)\equiv 0$ ЛСДУ (10), (11) имеют место, а, следовательно, в силу леммы 1 имеют место те же утверждения и для тривиального решения $u(t,x,\omega)\equiv 0$ ЛСДУвЧП (1), (2).

1. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1997. – 495 с.
2. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 521 с.
3. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 445 с.
4. *Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е.* Управление системами с последействием. – М.: Наука, 1992. – 333 с.
5. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Управляемые случайные процессы. – К.: Наук. думка, 1977. – 251 с.
6. *Гихман И.И.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложение. – К.: Наук. думка, 1982. – 612 с.
7. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 367 с.
8. *Царьков Е.Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.
9. *Царьков Е.Ф., Ясинский В.К.* Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. – Рига: Ориентир, 1992. – 301 с.
10. *Гихман И.И.* О смешанной задаче для стохастического дифференциального уравнения параболического типа // Укр. мат. журн. – 1980. – 32, № 3. – С.367–377.
11. *Гихман И.И.* Граничная задача для стохастического уравнения параболического типа // Укр. мат. журн. – 1979. – 31, № 5. – С.31–38.
12. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными. Сб. научн. тр. – К.: Ин-т математики АН УССР. – 1981. – С.25–59.

13. *Дороговцев А.Я., Ивасишен С.Д., Кукуш А.Г.* Асимптотическое поведение решений уравнения теплопроводности с белым шумом в правой части // Укр. мат. журн. – 1985. – 37, №1. – С.13–20.
14. *Перун Г.М., Ясинский В.К.* Исследование задачи Коши для стохастических уравнений в частных производных // Укр. мат. журн. – 1993. – 45, №9. – С.1773–1781.
15. *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы. – М.: Физматгиз., 1969. – 859 с.
16. *Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К.* Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. В 3-х томах. Т.3: Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. – Чернівці: Вид-во "Золоті литаври", 2009. – 798 с.
17. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.
18. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 541 с.
19. *Булинский А.В., Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов. – М.: Физматлит, 2005. – 408 с.
20. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с.
21. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Иностранная литература, 1962. – 463 с.
22. *Царьков Е.Ф.* Асимптотическая устойчивость в среднем квадратичном тривиального решения стохастических функционально-дифференциальных уравнений // Теория вероятностей и ее применение. – 1976. – Вып.4. – С.871–875.
23. *Ясинская Л.И., Ясинский В.К.* Асимптотическая устойчивость в среднем квадратическом тривиального решения стохастического дифференциально-функционального уравнения // Укр. мат. журн. – 1980. – 32, №1. – С.78–98.

Получено 14.04.2014