УДК 519.7

М. О. Перестюк (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)
Ю. Ю. Король (Ужгород. нац. ун-т)

ІСНУВАННЯ ІНВАРІАНТНОГО ТОРА ВИРОДЖЕНОЇ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

In this article we find sufficient condition for existence an invariant torus of degenerate linear impulsive system that is define on product of a torus and Euclidean space. We also find conditions for preservation of an asymptotically stable invariant toroidal manifold of a degenerate impulsive linear extension of a dynamical system on a torus under small perturbations on a set of nonwandering points.

В даній роботі знайдено достатню умову існування інваріантного тору виродженої лінійної імпульсної системи визначеної на прямому добутку тора та Евклідового простору. Також знайдено умови збереження асимптотично стійкого інваріантного тороїдального многовиду для виродженої імпульсної системи при малих збуреннях на множині неблукаючих точок.

Розглянемо систему імпульсних диференціальних рівнянь в центральній канонічній формі вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \begin{bmatrix} E_{n-s} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} M(\varphi) & 0 \\ 0 & E_s \end{bmatrix} x + f(\varphi), \tag{1}$$

$$\Delta x_1|_{\varphi \in \Gamma} = B(\varphi)x_1 + I(\varphi), \tag{2}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $x = col(x_1, x_2)$, де $x_1(t,\varphi), x_2(t,\varphi)-$ відповідно $n-s$ та $s-$вимірні вектори, $\varphi \in \mathbf{T}^m, \mathbf{T}^m - m-$вимірний тор, $f(\varphi), I(\varphi)-$ неперервні (кусково-неперервні з розривами першого роду на множині Γ) функції, $2\pi-$періодичні по кожній компоненті $\varphi_v, v = 1, ..., m$, і обмежені при всіх $\varphi \in \mathbf{T}^m$, $f_2(\varphi) \in \mathbb{C}^{s-1}(\mathbf{T}^m)$ $M(\varphi), B(\varphi)$ - неперервні $2\pi-$періодичні по кожній компоненті φ_v квадратні матриці, функція $a(\varphi)$ обмежена і задовольняє умову Ліпшиця по $\varphi \in \mathbf{T}^m$, E_{n-s}, E_s- одиничні матриці $n-s$ та $s-$го порядку відповідно, $I-$ квазідіагональна матриця, $det(E_{n-s} + B(\varphi)) \neq 0$ для будь-якого $\varphi \in \mathbf{T}^m$. Відносно множини Γ припускаємо, що вона є підмножиною тора $\mathbf{T}^m$ і представляє собою многовид розмірності $m-1$, який можна визначити рівнянням $\Phi(\varphi) = 0$, де $\Phi(\varphi)-$ скалярна, неперервна і 2π-періодична по змінній φ функція.

Позначимо через $t_i(\varphi)$ розв'язки рівняння $\Phi(\varphi_t(\varphi)) = 0$, які є моментами імпульсних збурень для системи (1),(2). Припустимо також, що існує деяка стала $\theta > 0$ така, що

$$t_i(\varphi) - t_{i-1}(\varphi) \geq \theta, \tag{3}$$

для будь-яких $i \in \mathbb{Z}, \varphi \in \mathbf{T}^m$.

З'ясуємо питання існування інваріантного тору системи (1),(2). Ця система може бути розщеплена на дві незалежні системи

$$\begin{gathered} \tfrac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \tfrac{dx_1}{dt} = M(\varphi)x_1 + f_1(\varphi), \\ \Delta x_1|_{\varphi \in \Gamma} = B(\varphi)x_1 + I(\varphi). \end{gathered} \tag{4}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad I\frac{dx_2}{dt} = x_2 + f_2(\varphi), \tag{5}$$

Лема 1. *[2] Для будь-якого розв'язку $t = t_i(\varphi)$ системи $\Phi(\varphi_t(\varphi)) = 0$ рівність*

$$t_i(\varphi_{-t}(\varphi)) - t_i(\varphi) = t, \tag{6}$$

виконується для будь-яких $\varphi \in \mathbf{T}^m$ і $t \in \mathbb{R}$.

Нехай $C(\varphi)$ - неперервна по $\varphi \in \mathbf{T}^m$, 2π-періодична по $\varphi_v, v = 1, ..., m$ матрична функція, а $\Omega_s^t(\varphi)$ - фундаментальна матриця лінійної однорідної системи

$$\begin{gathered} \frac{dx_1}{dt} = M(\varphi_t(\varphi))x_1, \\ \Delta x_1|_{\varphi\in\Gamma} = B(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))x_1, \end{gathered} \tag{7}$$

залежної від $\varphi \in \mathbf{T}^m, \tau \in \mathbb{R}$ як від параметрів.

За аналогією з [4] визначимо функцію Гріна-Самойленко

$$G(t, s, \varphi) = \begin{cases} \Omega_s^t(\varphi)C(\varphi_s(\varphi)), & s \le t, \\ -\Omega_s^t(\varphi)\left[E_{n-s} - C(\varphi_s(\varphi))\right], & s > t, \end{cases} \tag{8}$$

системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx_1}{dt} = M(\varphi)x_1, \quad \Delta x_1|_{\varphi\in\Gamma} = B(\varphi)x_1, \tag{9}$$

якщо

$$\|G(t, s, \varphi)\| \le Ke^{-\gamma|t-s|}, \tag{10}$$

для будь-яких $K > 0$ і $\gamma > 0$. Функція $G(t, s, \varphi)$ задовольняє систему (7) при $t \ne s$, тобто

$$\frac{d}{dt}G(t, s, \varphi) = A(\varphi_t(\varphi))G(t, s, \varphi), \quad t \ne t_i(\varphi),$$

$$\Delta G(t, s, \varphi)\|_{t=t_i(\varphi)} = B(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))G(t, t_i(\varphi), \varphi),$$

і має розрив першого роду при $t = s$.

Неважко переконатися, що функція $G(t, s, \varphi)$ задовольняє рівності

$$\begin{gathered} G(t, s, \varphi + 2\pi) = G(t, s, \varphi), \\ G(t, t + s, \varphi) = G(0, s, \varphi_t(\varphi)). \end{gathered} \tag{11}$$

Нехай матриця $G(t, s, \varphi)$ і функції $t_i(\varphi)$ такі, що функції

$$\begin{gathered} x_{1,t}(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t, s, \varphi)f_1(\varphi_s(\varphi))ds+ \\ + \sum_{-\infty<t_i(\varphi)<+\infty} G(t, t_i(\varphi) + 0, \varphi)I(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi)). \end{gathered} \tag{12}$$

залежні від φ як від параметра, визначені при всіх $t \in \mathbb{R}$ і рівномірно обмежені. Дійсно, оскільки виконуються нерівності (3) і (10), маємо

$$\begin{gathered} \|x_{1,t}(\varphi)\| \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Ke^{-\gamma|t-s|}\left\|f_1(\varphi_s(\varphi))\right\|ds+ \\ + \sum_{-\infty<t_i(\varphi)<+\infty} Ke^{-\gamma|t-t_i(\varphi)|}\left\|I(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))\right\| \le \\ \le \frac{2K}{\gamma}\max_{\varphi\in\mathbf{T}^m}\|f_1(\varphi)\| + K\sup_{i\in\mathbb{Z}}\max_{\varphi\in\mathbf{T}^m}\left\|I(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))\right\|\sum_{-\infty<t_i(\varphi)<+\infty} e^{-\gamma|t-t_i(\varphi)|}. \end{gathered}$$

$$\sum_{-\infty<t_i(\varphi)<+\infty} e^{-\gamma|t-t_i(\varphi)|} = \sum_{t_i(\varphi)\le t} e^{-\gamma(t-t_i(\varphi))} + \sum_{t_i(\varphi)>t} e^{\gamma(t-t_i(\varphi))} \le$$
$$\le \sum_{t_i(\varphi)\le t} e^{-\gamma(t_j(\varphi)-t_i(\varphi))} + \sum_{t_i(\varphi)>t_j(\varphi)} e^{-\gamma(t_i(\varphi)-t_{j+1}(\varphi))} \le \tfrac{2}{1-e^{-\gamma\theta}}.$$

Таким чином, маємо оцінку

$$\|x_{1,t}(\varphi)\| \le C\left(\max_{\varphi\in\mathbf{T}^m}\|f_1(\varphi_t(\varphi))\| + \sup_{i\in\mathbb{Z}}\max_{\varphi\in\mathbf{T}^m}\left\|I(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))\right\|\right),$$

де

$$C = \max\left(\frac{2K}{\gamma}, \frac{2K}{1-e^{-\gamma\theta}}\right). \tag{13}$$

Розв'язок системи (5) можемо записати у вигляді

$$x_{2,t}(\varphi) = -\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{i_1+\ldots+i_m=k} I^k\frac{\partial^k f_2(\varphi_t(\varphi))}{\partial\varphi_1^{i_1}\ldots\partial\varphi_m^{i_m}}a_1^{i_1}(\varphi)\ldots a_m^{i_m}(\varphi). \tag{14}$$

і він буде обмеженим в силу умов накладених на $f_2(\varphi)$ та $a(\varphi)$. Об'єднаємо (12) та (14)

$$x_t(\varphi) = \begin{pmatrix} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,s,\varphi)f_1(\varphi_s(\varphi))ds+ \\ +\sum\limits_{-\infty<t_i(\varphi)<+\infty} G(t,t_i(\varphi)+0,\varphi)I(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi)) \\ -\sum\limits_{k=0}^{s-1}\sum\limits_{i_1+\ldots+i_m=k} I^k\frac{\partial^k f_2(\varphi_t(\varphi))}{\partial\varphi_1^{i_1}\ldots\partial\varphi_m^{i_m}}a_1^{i_1}(\varphi)\ldots a_m^{i_m}(\varphi) \end{pmatrix}, \tag{15}$$

і покладемо $x_t(\varphi) = u(\varphi_t(\varphi))$. Використовуючи рівності (6) та (11) і виконуючи заміну φ на $\varphi_{-t}(\varphi)$, отримаємо

$$u(\varphi) = \begin{pmatrix} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(0,s,\varphi)f_1(\varphi_s(\varphi))ds+ \\ +\sum\limits_{-\infty<t_i(\varphi)<+\infty} G(0,t_i(\varphi)+0,\varphi)I(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi)) \\ -\sum\limits_{k=0}^{s-1}\sum\limits_{i_1+\ldots+i_m=k} I^k\frac{\partial^k f_2(\varphi)}{\partial\varphi_1^{i_1}\ldots\partial\varphi_m^{i_m}}a_1^{i_1}(\varphi)\ldots a_m^{i_m}(\varphi) \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Якщо інтеграл і суми в (16) збігаються, тоді функція $u(\varphi)$ визначає інваріантну множину системи (1), (2):

$$x = u(\varphi), \quad u(\varphi+2\pi) = u(\varphi).$$

Відзначимо, що для збіжності інтегралу і суми в (16) достатньо, щоб функція $G(t,s,\varphi)$ задовольняла нерівності

$$\|G(t,s,\varphi)\| \le Ke^{-\gamma|t-s|},$$

і виконувалася умова (3) для будь-яких $i\in\mathbb{Z}$, $t,s\in\mathbb{R}$ і $\varphi\in\mathbf{T}^m$ та деяких $K>0$ і $\gamma>0$. Таким чином, ми довели наступну теорему.

Теорема 1. *Припустимо, що в системі* (1),(2), 2π*-періодичні функції* $f(\varphi)$, $I(\varphi)$ *і* 2π*-періодичні матриці* $M(\varphi), B(\varphi)$ *неперервні на торі* $\mathbf{T}^m$, *причому* $f_2(\varphi) \in C^{s-1}(\mathbf{T}^m)$. *Якщо функція* $G(t,s,\varphi)$ *задовольняє оцінку* (10), *а для функцій* $t_i(\varphi)$ *виконується нерівність* (3), *тоді система* (1),(2) *має інваріантний тороїдальний многовид.*

Розглянемо питання існування асимптотично стійкого інваріантного тору для системи (1), (2). Справедливими є наступні теореми.

Теорема 2. *Нехай рівномірно по* t *існує скінченна границя*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{i(t,t+T)}{T} = p, \tag{17}$$

де $i(t,t+T)-$ *кількість точок* $t_i(\varphi)$ *на проміжку* $[t,t+T]$, $f_2(\varphi) \in C^{s-1}(\mathbf{T}^m)$, *причому найбільше із власних значень матриці* $M^*(\varphi) = \frac{1}{2}(M(\varphi) + M^\top(\varphi))$ *задовольняє нерівність* $\Lambda(\varphi) \le \gamma$, *а найбільше із власних значень матриці* $((E_{n-s} + B^\top(\varphi))(E_{n-s} + B(\varphi)))$ *задовольняє нерівність*

$$\max_{i=1,\dots,n} \lambda_i((E_{n-s} + B^\top(\varphi))(E_{n-s} + B(\varphi))) \le \alpha^2.$$

Тоді, якщо

$$\gamma + p\ln\alpha < 0, \tag{18}$$

тоді система (1), (2) *має асимптотично стійкий інваріантний тор.*

Доведення. Оскільки система (1), (2) може бути розщеплена на дві незалежні системи (4), (5), то, скориставшись аналогом нерівності Важевського, неважко для будь-якого розв'язку $x_1(t)$ системи (9) отримати оцінку

$$\|x_1(t)\| \le \alpha^{i(s,t)} e^{\gamma(t-s)} \|x_1(s)\|. \tag{19}$$

В силу існування границі (2) з урахуванням (3) та (4) можна вказати такі $K \ge 1$ та $\mu > 0$ $(0 < \mu < |\gamma + p\ln\alpha|)$, що для всіх $t \ge s$ матрицант $\Omega_s^t(\varphi)$ системи (9) задовольняє оцінку

$$\|\Omega_s^t(\varphi)\| \le K e^{-\mu(t-s)}. \tag{20}$$

З (15) легко бачити, що розв'язок системи (1), (2) при $t \ge s$ можна записати у вигляді

$$x_t(\varphi) = \begin{pmatrix} \int\limits_{-\infty}^{t} G(t,s,\varphi) f_1(\varphi_s(\varphi)) ds + \\ + \sum\limits_{-\infty < t_i(\varphi) < t} G(t, t_i(\varphi)+0, \varphi) I(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi)) \\ - \sum\limits_{k=0}^{s-1} \sum\limits_{i_1+\dots+i_m=k} I^k \frac{\partial^k f_2(\varphi_t(\varphi))}{\partial\varphi_1^{i_1}\dots\partial\varphi_m^{i_m}} a_1^{i_1}(\varphi)\dots a_m^{i_m}(\varphi) \end{pmatrix}, \tag{21}$$

де

$$G(t,s,\varphi) = \begin{cases} \Omega_s^t(\varphi) C(\varphi_s(\varphi)), & s \le t, \\ 0, & s > t, \end{cases} \tag{22}$$

Використовуючи рівність (6) та властивості функції Гріна-Самойленка (11) і виконуючи заміну φ на $\varphi_{-t}(\varphi)$, отримаємо вираз

$$u(\varphi)=\left(\begin{array}{c}\int\limits_{-\infty}^{0} G(0,s,\varphi)f_1(\varphi_s(\varphi))ds+\\ +\sum\limits_{-\infty<t_i(\varphi)<0} G(0,t_i(\varphi)+0,\varphi)I(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))\\ -\sum\limits_{k=0}^{s-1}\sum\limits_{i_1+\ldots+i_m=k} I^k\frac{\partial^k f_2(\varphi)}{\partial\varphi_1^{i_1}\ldots\partial\varphi_m^{i_m}}a_1^{i_1}(\varphi)\ldots a_m^{i_m}(\varphi)\end{array}\right), \tag{23}$$

який визначає інваріантний тороїдальний многовид системи (1), (2), причому він буде асимптотично стійкий, оскільки виконується умова (5).

Припустимо, що в системі (1), (2) матриці M і B сталі, тобто розглянемо систему

$$\frac{d\varphi}{dt}=a(\varphi),\quad \begin{bmatrix} E_{n-s} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\frac{dx}{dt}=\begin{bmatrix} M & 0\\ 0 & E_s\end{bmatrix}x+f(\varphi), \tag{24}$$

$$\Delta x_1|_{\varphi\in\Gamma}=Bx_1+I(\varphi). \tag{25}$$

Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що матриця M взята в дійсній канонічній формі

Теорема 3. *Нехай* $\gamma=\max\limits_i Re\lambda_i(M)$*;* $\alpha^2=\max\limits_i \lambda((E_{n-s}+B^\top)\times\times(E_{n-s}+B))$, *а моменти* $\tau_i(\varphi)$ *задовольняють умові* (2)*. Тоді, якщо* $\gamma+p\ln\alpha<0$, *то система* (7),(8) *має асимптотично стійкий інваріантний тор.*

Доведення. Доведення даної теореми аналогічне доведенню попередньої теореми.

Розглянемо питання існування асимптотично стійкого інваріантного многовиду збуреної системи рівнянь

$$\begin{array}{c}\frac{d\varphi}{dt}=a(\varphi),\qquad \frac{dx_1}{dt}=M(\varphi)x_1+f_1(\varphi),\quad \Delta x_1|_{\varphi\in\Gamma}=B(\varphi)x_1+I(\varphi),\\ I\frac{dx_2}{dt}=x_2+f_2(\varphi),\end{array} \tag{26}$$

на множині неблукаючих точок.

Означення 1. *[6] Точку* φ *назвемо блукаючою, якщо існують її окіл* $U(\varphi)$ *і додатне число* T *такі, що*

$$U(\varphi)\cap\varphi_t(U(\varphi))=0\quad \text{для}\quad t\geq T. \tag{27}$$

Існування функції Гріна-Самойленко разом з умовою (3) гарантує існування інваріантної тороїдальної множини для системи (26).

Теорема 4. *Нехай в системі* (26) $M(\varphi)=M_0(\varphi)+\tilde M(\varphi)$, $B(\varphi)=B_0(\varphi)+\tilde B(\varphi)$*,а* $f_2(\varphi)\in C^{s-1}(\mathbf{T}^m)$*, причому* $\sup\limits_{\varphi\in\Omega}\|M_0(\varphi)\|=\alpha$, $\sup\limits_{\varphi\in\Omega}\|B_0(\varphi)\|=\beta$*, де* $\Omega-$ *множина неблукаючих точок динамічної системи* $\frac{d\varphi}{dt}=a(\varphi)$*, і для фундаментальної матриці* $\Omega_s^t(\varphi)$ *однорідної імпульсної системи*

$$\frac{dx_1}{dt}=\tilde M(\varphi_t(\varphi))x_1,\quad \Delta x_1|_{\varphi\in\Gamma}=\tilde B(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))x_1,$$

виконується оцінка

$$\left\|\Omega_s^t(\varphi)\right\|\leq Ke^{-\gamma(t-s)},\quad t\geq s. \tag{28}$$

Тоді, якщо виконується умова

$$K\alpha + \frac{1}{\theta} ln(1 + K\beta) < \gamma, \tag{29}$$

тоді система (26) *має асимптотично стійкий інваріантний тор.*

Доведення. Матрицант збуреної системи рівнянь може бути представлений у вигляді

$$X_0^t(\varphi) = \Omega_0^t(\varphi) + \int\limits_0^t \Omega_s^t(\varphi) M_0(\varphi_s(\varphi)) X_0^s(\varphi) ds +$$
$$+ \sum_{0 \le t_i(\varphi) < t} \Omega_{t_i(\varphi)}^t(\varphi) B_0(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi)) X_0^{t_i(\varphi)}(\varphi).$$

Оскільки виконується оцінка (28), то

$$\|X_0^t(\varphi)\| \le K e^{-\gamma t} + \int\limits_0^t K e^{-\gamma(t-s)} \|M_0(\varphi_s(\varphi))\| \|X_0^s(\varphi)\| ds +$$
$$+ \sum_{0 \le t_i(\varphi) < t} K e^{-\gamma(t - t_i(\varphi))} \left\|B_0(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))\right\| \left\|X_0^{t_i(\varphi)}(\varphi)\right\|.$$

$$\begin{gathered} e^{\gamma t} \|X_0^t(\varphi)\| \le K + \int\limits_0^t K e^{\gamma s} \|M_0(\varphi_s(\varphi))\| \|X_0^s(\varphi)\| ds + \\ + \sum_{0 \le t_i(\varphi) < t} K e^{\gamma t_i(\varphi)} \left\|B_0(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))\right\| \left\|X_0^{t_i(\varphi)}(\varphi)\right\|. \end{gathered} \tag{30}$$

Позначимо через $U_\varepsilon(\Omega)$ ε-окіл множини Ω і покажемо, що для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$ і довільного $\varphi \in \mathcal{T}_m$ існує скінчений момент часу $T > 0$, не залежний від φ, такий що, для моментів часу $t \ge T$ півтраєкторія $\varphi_t(\varphi) \in U_\varepsilon(\Omega)$.

Дійсно, оскільки $\mathcal{T}_m$– компактна, а $U_\varepsilon(\Omega)$– відкрита множини, то множина $\mathcal{T}_m \setminus U_\varepsilon(\Omega)$ компактна і складається з блукаючих точок. Тому для кожної точки $\varphi \in \mathcal{T}_m \setminus U_\varepsilon(\Omega)$ знайдеться окіл $U(\varphi)$, який задовольняє умову (27) Внаслідок компактності фазового простору виберемо з цих околів скінченну кількість $U_1, U_2, ..., U_N$ так, щоб

$$\sum_{k=1}^{N} U_k = \mathcal{T}_m \setminus U_\varepsilon(\Omega),$$

і позначимо відповідні числа $T(\varphi)$ через $T_1, T_2, ..., T_N$.

Нехай довільна точка $\varphi \in \mathcal{T}_m - U_\varepsilon(\Omega)$ входить в окіл U_{n_1}. Згідно з (27) за час, що не перевищує T_{n_1}, вона вийде з нього назавжди. Нехай вона потрапить в окіл U_{n_2}. Його вона покине за час, який не перевищує T_{n_2}, і т.д. Нарешті, за час, що не перевищує $\sum\limits_{k=1}^{N} T_k$, точка обов'язково потрапить в $U_\varepsilon(\Omega)$, оскільки повернутися в один з околів U_i, $i = 1, ..., N$, вона не може згідно (27).

Отже, час перебування точки φ в $\mathcal{T}_m \setminus U_\varepsilon(\Omega)$ не може перевищувати $T = \sum\limits_{k=1}^{N} T_k$. Оскільки матриці $M_0(\varphi), B_0(\varphi) \in \mathbb{C}(\mathcal{T}_m)$, то для довільних фіксованих $\eta > 0$ і $\delta > 0$ існує скінченний момент часу $T > 0$, не залежний від φ і такий, що $\|M_0(\varphi_t(\varphi))\| \le \alpha + \eta$, $\|B_0(\varphi_t(\varphi))\| \le \beta + \delta$ для будь-якого $t \ge T$. Тоді з (30) отримаємо

$$e^{\gamma t}\left\|X_0^t(\varphi)\right\| \le K+\int_0^T Ke^{\gamma s}\left\|M_0(\varphi_s(\varphi))\right\|\left\|X_0^s(\varphi)\right\|ds+$$
$$+\sum_{0\le t_i(\varphi)<T} Ke^{\gamma t_i(\varphi)}\left\|B_0(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))\right\|\left\|X_0^{t_i(\varphi)}(\varphi)\right\|+\int_T^t Ke^{\gamma s}(\alpha+\eta)\left\|X_0^s(\varphi)\right\|ds+$$
$$+\sum_{T\le t_i(\varphi)<t} Ke^{\gamma t_i(\varphi)}(\beta+\delta)\left\|X_0^{t_i(\varphi)}(\varphi)\right\|.$$

З оцінки

$$K+\int_0^T Ke^{\gamma s}\left\|M_0(\varphi_s(\varphi))\right\|\left\|X_0^s(\varphi)\right\|ds+$$
$$+\sum_{0\le t_i(\varphi)<T} Ke^{\gamma t_i(\varphi)}\left\|B_0(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))\right\|\left\|X_0^{t_i(\varphi)}(\varphi)\right\|\le \tilde{K},$$

отримуємо $e^{\gamma t}\left\|X_0^t(\varphi)\right\| \le \tilde{K}+\int_T^t Ke^{\gamma s}(\alpha+\eta)\left\|X_0^s(\varphi)\right\|ds+$

$$+\sum_{T\le t_i(\varphi)<t} Ke^{\gamma t_i(\varphi)}(\beta+\delta)\left\|X_0^{t_i(\varphi)}(\varphi)\right\| \le \tilde{K}+\int_0^t Ke^{\gamma s}(\alpha+\eta)\left\|X_0^s(\varphi)\right\|ds+$$
$$+\sum_{0\le t_i(\varphi)<t} Ke^{\gamma t_i(\varphi)}(\beta+\delta)\left\|X_0^{t_i(\varphi)}(\varphi)\right\|.$$

Використовуючи нерівність Гронуолла-Беллмана для кусково-неперервних функцій, отримаємо

$$e^{\gamma t}\left\|X_0^t(\varphi)\right\| \le \tilde{K}(1+K(\beta+\delta))^{i(0,t)}e^{K(\alpha+\eta)t},$$
$$\left\|X_0^t(\varphi)\right\| \le \tilde{K}e^{-(\gamma-K(\alpha+\eta)-\frac{1}{\theta}ln(1+K(\beta+\delta)))t}.$$

Отже, система (26) має асимптотично стійкий інваріантний тороїдальний многовид, який визначається співвідношенням

$$x=u(\varphi)=\left(\begin{array}{c}\int_{-\infty}^0 G(0,s,\varphi)f_1(\varphi_s(\varphi))ds+\\ +\sum_{-\infty<t_i(\varphi)<0} G(0,t_i(\varphi),\varphi)I(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))\\ -\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{i_1+\ldots+i_m=k} I^k\frac{\partial^k f_2(\varphi)}{\partial\varphi_1^{i_1}\ldots\partial\varphi_m^{i_m}}a_1^{i_1}(\varphi)\ldots a_m^{i_m}(\varphi)\end{array}\right).$$

Список використаної літератури

1. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями.- К.: Вища шк., 2000. - 294 с.
2. *Perestyuk M.O., Feketa P.V.* Invariant manifolds of one class of systems of impulsive differential equations. Nonlinear Oscillations, Vol. 13, No. 2, 2010. p.260-273.
3. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. -М.:Наука, 1987. - 304с.
4. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. - К.: Вища шк., 1987. - 228 с.
5. *Бояринцев Ю.Е., Данилов В.А., Логинов А.А., Чистяков В.Ф.* Численные методы решения сингулярных систем.- Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989. - 223с.
6. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. - М.: ОГИЗ, 1947. - 448с

Одержано 25.06.2016