УДК 510

І. А. Мич, В. В. Ніколенко (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ДОСКОНАЛІ ДИЗ'ЮНКТИВНІ НОРМАЛЬНІ ФОРМИ В ОДНОМУ КЛАСІ АЛГЕБР

The methods of constructing normal forms in the class of algebras are considered. Formulas of algebra describe Boolean images.

У роботі досліджуються методи побудови нормальних форм в класі алгебр, формули яких описують булеві зображення.

1. Вступ. У роботі [1] введено у розгляд універсальні алгебри P, які задані над квадратними бінарними матрицями порядку n і сигнатурою, що складається з двох бінарних операцій min, max і множини унарних операцій T_i, $i \in \mathbb{Z}_8$, ($\mathbb{Z}_k = 0, 1, \ldots, k-1$), які задають поворот елементів матриці, кратний 90° відносно осей або центра симетрії. Для операцій T_i, $i \in \mathbb{Z}_8$, введено поняття повних та замкнених власних підсистем, описано повні та замкнені системи тотожностей алгебри P, на їх основі побудовані канонічні форми. Відомо, що досконалі нормальні форми є зручним способом представлення формул алгебри логіки і мають широке практичне застосування [2]. У даній роботі для формул, які описують булеві зображення, введено поняття досконалої диз'юнктивної нормальної форми алгебри P і запропоновано метод її побудови.

2. Замкнені класи формул алгебри P. З визначення операцій T_i, $i \in \mathbb{Z}_8$, випливає, що на матриці 4×4 пікселі утворюють три замкнені класи $\eta_1 = \{1, 4, 13, 16\}$, $\eta_2 = \{2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15\}$, $\eta_3 = \{6, 7, 10, 11\}$ відносно цих операцій [1].

Задавши для кожного класу відповідно зображення

$A_1 =$ 

, $A_2 =$ 

, $A_3 =$ 

.

за допомогою операцій T_i, $i \in \mathbb{Z}_8$, піксель із значенням 1 (чорний) може бути переміщений в довільну клітину, що належить відповідному замкненому класу. Наприклад, перемістимо чорні пікселі зображень A_1, A_2, A_3 на всі можливі місця квадрата (табл. 1).

Таблиця 1

A_1	A_2	$A_2^{T_6}$	$A_1^{T_2}$
$A_2^{T_1}$	A_3	$A_3^{T_2}$	$A_2^{T_2}$
$A_2^{T_3}$	$A_3^{T_3}$	$A_3^{T_4}$	$A_2^{T_4}$
$A_1^{T_5}$	$A_2^{T_5}$	$A_2^{T_7}$	$A_1^{T_4}$

З таблиці 1 випливає, що будь-яке зображення A на рецепторному полі 4×4 реалізується формулою алгебри P без використання операцій кон'юнкції

$$A = A_1^{T_{i_1}} \vee A_1^{T_{i_2}} \vee \ldots \vee A_1^{T_{i_k}} \vee A_2^{T_{j_1}} \vee \ldots \vee A_2^{T_{j_l}} \vee A_3^{T_{t_1}} \vee \ldots \vee A_3^{T_{t_q}}, \qquad (1)$$

де $i_k,\ t_q,\ j_l \in \mathbb{Z}_7$.

Наприклад, зображення A, наведене на рис. 1, може бути представлене формулою $A = A_1^{T_5} \vee A_2^{T_0} \vee A_2^{T_4} \vee A_2^{T_5} \vee A_3^{T_0} \vee A_3^{T_2}$.

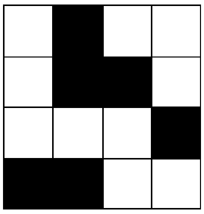
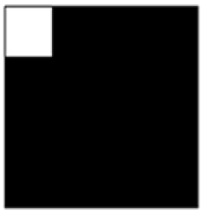
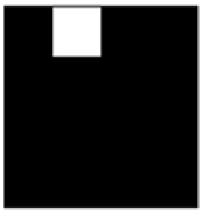
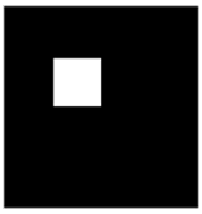
$A =$ 

Рис. 1

Аналогічно, використовуючи зображення

$B_1 =$ , $B_2 =$ , $B_3 =$ .

довільне зображення A може бути представлене формулою:

$$A = B_1^{T_{i_1}} \wedge B_1^{T_{i_2}} \wedge \ldots \wedge B_1^{T_{i_k}} \wedge B_2^{T_{j_1}} \wedge \ldots \wedge B_2^{T_{j_l}} \wedge B_3^{T_{t_1}} \wedge \ldots \wedge B_3^{T_{t_q}}, \qquad (2)$$

де $i_k,\ t_q,\ j_l \in \mathbb{Z}_7$.

Наприклад, зображення A (рис. 1) визначається формулою
$A = B_1^{T_0} \wedge B_1^{T_2} \wedge B_1^{T_4} \wedge B_2^{T_6} \wedge B_2^{T_2} \wedge B_2^{T_7} \wedge B_2^{T_3} \wedge B_2^{T_1} \wedge B_3^{T_4} \wedge B_3^{T_3}$.

Для квадрата 5×5 (рис. 3) його клітини відносно операцій повороту T_i, $i \in \mathbb{Z}_8$, утворюють шість замкнених класів: $\eta_1 = \{1,\ 5,\ 21,\ 25\}$, $\eta_2 = \{2,\ 4,\ 6,\ 10,\ 16,\ 20, 22,\ 24\}$, $\eta_3 = \{3,\ 11,\ 15,\ 23\}$, $\eta_4 = \{7,\ 9,\ 17,\ 19\}$, $\eta_5 = \{8,\ 12,\ 14,\ 18\}$, $\eta_6 = \{13\}$.

Довільне зображення на полі 5×5 може бути представлене формулою типу (1) або (2), використавши шість зображень, $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_6$ або $B_1,\ B_2, \ldots,\ B_6$, вибраних аналогічно до наведених вище $A_1,\ A_2,\ A_3$ або $B_1,\ B_2,\ B_3$.

Розташування пікселів замкнених класів відносно операцій T_i, $i \in \mathbb{Z}_8$, для полів різної розмірності показано на рис. 3. Кількість замкнених класів відносно операцій T_i, $i \in \mathbb{Z}_8$, наведено у таблиці 2.

Таблиця 2

1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8
1	1	$1+2$	$1+2$	$1+2+3$	$1+2+3$	$1+2+3+4$	$1+2+3+4$

Розглянемо два квадрати розмірністю $2n \times 2n$ і $2n + 2 \times 2n + 2$. Другий квадрат можна отримати з першого, додавши по контуру по одному рядку і стовпчику з відповідною кількістю клітин (рис. 2).

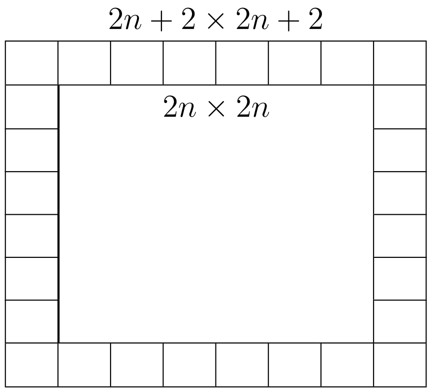


Рис. 2

Із таблиці 2 випливає, що на полі $2n \times 2n$, $n \in \mathbb{N}$, кількість замкнених класів не зміниться в порівнянні з полем $2n - 1 \times 2n - 1$, а на полі $2n + 1 \times 2n + 1$ з'являться $n + 1$ нових класів на доданих рядках і стовпчиках у порівняні з полем $2n \times 2n$. Звідси випливає теорема.

Теорема 1. *На полях $2n \times 2n$ і $2n - 1 \times 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, існує $\frac{n^2+n}{2}$ замкнених класів відносно операцій T_i, $i \in \mathbb{Z}_8$.*

3. Досконалі канонічні форми формул P−алгебри.

Означення 1. *Диз'юнктивна нормальна форма формули $\varphi = p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$ P− алгебри називається досконалою, якщо вона лексикографічно впорядкована відносно індексів змінних x_i, $i = 1, \ldots, k$, та індексів поворотів T_j, $j = 1, \ldots, l$, в елементарних перетинах p_i для всіх $i = 1, 2, \ldots n$.*

Розглянемо алгебру $U_4 = \langle A_4, \Omega \rangle$, де $A_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \right\}$ – множина бінарних матриць (бінарних зображень).

Для елементів a_{12}; a_{13}; a_{24}; a_{34}; a_{43}; a_{42}; a_{31}; a_{21} другого замкненого класу, відносно операцій T_i, $i \in \mathbb{Z}_8$, справедливі рівності: .

$$a_{12}^{T_0} = a_{12};\ a_{13}^{T_6} = a_{12}; a_{24}^{T_3} = a_{12};\ a_{34}^{T_4} = a_{12};$$

$$a_{43}^{T_7} = a_{12};\ a_{42}^{T_5} = a_{12}; a_{31}^{T_2} = a_{12};\ a_{21}^{T_1} = a_{12}. \tag{3}$$

З цих рівностей випливає, що:

1) для довільної операції T_k, $k \in \mathbb{Z}_8$, у другому класі існує елемент a_{ij} такий, що $a_{ij}^{T_k} = a_{12}$;

2) для довільного елемента a_{ij} з другого класу існує операція T_k, $k \in \mathbb{Z}_8$, така, що $a_{ij}^{T_k} = a_{12}$.

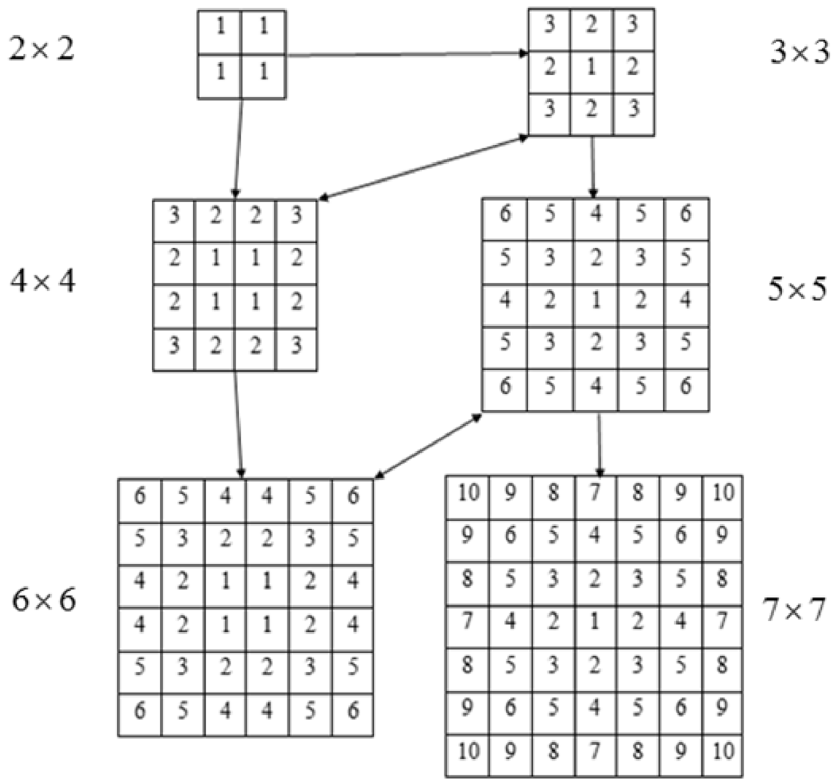


Рис. 3

Рівності (3) зручно задати у вигляді таблиці 3.

Таблиця 3

	T_0	T_6	
T_1			T_3
T_2			T_4
	T_5	T_7	

Користуючись цією таблицею для довільного перетину $r(x_t) = x_t^{T_{k_1}} x_t^{T_{k_2}} \dots x_t^{T_{k_s}}$, $t \in \mathbb{N}$, $k_1, k_2, \dots, k_s \in \mathbb{Z}_8$ побудуємо зображення

$$A_t^*(a_{ij}) = \begin{cases} a_{12} = 1, \text{ якщо, } x_t^{T_0} \in r(x_t), & a_{12} = 0, \text{ в іншому випадку,} \\ a_{13} = 1, \text{ якщо, } x_t^{T_6} \in r(x_t), & a_{13} = 0, \text{ в іншому випадку,} \\ a_{24} = 1, \text{ якщо, } x_t^{T_3} \in r(x_t), & a_{24} = 0, \text{ в іншому випадку,} \\ a_{34} = 1, \text{ якщо, } x_t^{T_4} \in r(x_t), & a_{34} = 0, \text{ в іншому випадку,} \\ a_{43} = 1, \text{ якщо, } x_t^{T_7} \in r(x_t), & a_{43} = 0, \text{ в іншому випадку,} \\ a_{42} = 1, \text{ якщо, } x_t^{T_5} \in r(x_t), & a_{42} = 0, \text{ в іншому випадку,} \\ a_{31} = 1, \text{ якщо, } x_t^{T_2} \in r(x_t), & a_{31} = 0, \text{ в іншому випадку,} \\ a_{21} = 1, \text{ якщо, } x_t^{T_1} \in r(x_t), & a_{21} = 0, \text{ в іншому випадку,} \end{cases}$$

а всі інші елементи матриці $A_t^*(a_{ij})$ дорівнюють нулеві.
З проведених міркувань випливає, що:

1) в матриці $r_t\left(A_t^*\right)$ елемент a_{12} дорівнює одиниці;

2) у всіх інших перетинах, які не є власною частиною $r(x_t)$, елемент a_{12} дорівнює нулеві.

Якщо елементарна кон'юнкція p_d має в своєму складі змінні $x_{d_1}, x_{d_2}, \ldots, x_{d_l}$, $d_1, d_2, \ldots, d_l \in \mathbb{N}$, то її можна представити у вигляді

$$p_d = r\left(x_{d_1}\right) r\left(x_{d_2}\right) \ldots r\left(x_{d_l}\right). \tag{4}$$

Для кожного перетину $r\left(x_{d_t}\right)$ будується аналогічно до $A_t^*\left(a_{ij}\right)$ зображення $A_{d_t}^*\left(a_{ij}\right)$. Легко переконатись, що в зображенні $p_d\left(A_{d_1}^*, A_{d_2}^*, \ldots, A_{d_t}^*\right)$ елемент a_{12} дорівнює одиниці, а у всіх інших елементарних кон'юнкціях цей елемент дорівнює нулеві.

Проведені міркування справедливі для довільної алгебри $U_k = \langle A_k, \Omega\rangle \in P$, $k \geq 4$ [1], оскільки кожна з них має в своєму складі елементи другого замкненого класу, якщо $k = 2n$, $n = 2, 3, \ldots$. В алгебрах $U_k = \langle A_k, \Omega\rangle \in P$, при $k = 2n+1$ роль елементів другого класу відіграють елементи п'ятого класу.

Нехай $\varphi_1 = p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_m$, $\varphi_2 = q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_t$ диз'юнктивні нормальні форми формул φ_1 і φ_2 алгебр $U_k = \langle A_k, \Omega\rangle \in P$, $k \geq 4$.

Теорема 2. *$\varphi_1 = \varphi_2$ тотожність, якщо $\forall p_d \in \varphi_1$, $\exists q_j \in \varphi_2$ таке, що $p_d \doteq q_j$ (p_d лексикографічно співпадає з q_j).*

Доведення. Нехай p_d має вигляд (4). Будуємо зображення $p_d\left(A_{d_1}^*, \ldots, A_{d_t}^*\right)$, в якому $a_{12} = 1$. Всім іншим змінним, які не входять в p_d, присвоїмо нульове значення. Якщо $\varphi_1 = \varphi_2$ тотожність, то $\exists q_j \in \varphi_2$ таке, що на заданому наборі зображень $A_{d_1}^*, A_{d_2}^*, \ldots, A_{d_t}^*$, приймає такі самі значення, що й φ_1 в тому числі в точці $a_{12} = 1$. А це можливо тільки тоді коли q_j підформула p_d ($q_j \subset p_d$).

Проводячи аналогічні міркування для формули φ_2 і будуючи відповідний набір зображення для q_j, на якому $a_{12} = 1$, отримуємо, що тотожність $\varphi_1 = \varphi_2$ буде мати місце, якщо $\forall q_j$ $\exists p_s$ таке, що $p_s \subset q_j$. Тоді з включень $q_j \subset p_d$ і $p_s \subset q_j$ випливає, що $p_s \subset p_d$, а це неможливо, оскільки в побудованих диз'юнктивних нормальних формах ні одна елементарна кон'юнкція не є підформулою іншої елементарної кон'юнкції. Теорему доведено.

4. Досконала диз'юнктивна нормальна форма алгебри $U_3 = \langle A_3, \Omega\rangle$. З означення операцій T_i, $i \in \mathbb{Z}_8$, випливає, що в алгебрі U_3 є три замкнені класи елементів: $\{a_{11}, a_{13}, a_{31}, a_{33}\}$, $\{a_{12}, a_{23}, a_{32}, a_{21}\}$, $\{a_{22}\}$. Для елементів першого і

T_1

1	4	7
2	5	8
3	6	9

T_2

7	4	1
8	5	2
9	6	3

T_3

3	6	9
2	5	8
1	4	7

T_4

9	6	3
8	5	2
7	4	1

T_0

1	2	3
4	5	6
7	8	9

T_5

7	8	9
4	5	6
1	2	3

T_6

3	2	1
6	5	4
9	8	7

T_7

3	2	1
6	5	4
9	8	7

Рис. 4

другого класу справедливі співвідношення:

$$\begin{array}{l} a_{11}^{T_1} = a_{11};\ \ a_{13}^{T_6} = a_{11};\ \ a_{33}^{T_4} = a_{11};\ \ a_{31}^{T_5} = a_{11}; \\ a_{12}^{T_0} = a_{12};\ \ a_{23}^{T_3} = a_{12};\ \ a_{32}^{T_7} = a_{12};\ \ a_{21}^{T_2} = a_{12}. \end{array} \tag{5}$$

Співвідношення (5) зручно представити у вигляді таблиці 4.

Таблиця 4

T_1	T_0	T_6
T_2		T_3
T_5	T_7	T_4

Користуючись цією таблицею для довільного перетину $r(x_t) = x_t^{T_{k_1}} x_t^{T_{k_2}} \ldots x_t^{T_{k_s}}$ побудуємо зображення

$$A_t^*(a_{ij}) = \begin{cases} a_{11} = 1, \text{ якщо } x_t^{T_1} \in r_t, \ a_{11} = 0, \text{ якщо } x_t^{T_1} \notin r_t, \\ a_{12} = 1, \text{ якщо } x_t^{T_0} \in r_t; \ a_{12} = 0, \text{ якщо } x_t^{T_0} \notin r_t, \\ a_{13} = 1, \text{ якщо } x_t^{T_6} \in r_t; \ a_{13} = 0, \text{ якщо } x_t^{T_6} \notin r_t, \\ a_{21} = 1, \text{ якщо } x_t^{T_2} \in r_t; \ a_{21} = 0, \text{ якщо } x_t^{T_2} \notin r_t, \\ a_{23} = 1, \text{ якщо } x_t^{T_3} \in r_t; \ a_{23} = 0, \text{ якщо } x_t^{T_3} \notin r_t, \\ a_{31} = 1, \text{ якщо } x_t^{T_5} \in r_t; \ a_{31} = 0, \text{ якщо } x_t^{T_5} \notin r_t, \\ a_{32} = 1, \text{ якщо } x_t^{T_7} \in r_t; \ a_{32} = 0, \text{ якщо } x_t^{T_2} \notin r_t, \\ a_{33} = 1, \text{ якщо } x_t^{T_3} \in r_t; \ a_{33} = 0, \text{ якщо } x_t^{T_4} \notin r_t, \\ a_{22} = 0. \end{cases}$$

У зображенні $r_t(A_t^*(a_{ij}))$:

1) елементи a_{11} та a_{12} дорівнюють одиниці;

2) на всіх інших перетинах, які не є власною частиною $r(x_t)$, хоча б один із елементів a_{11}, a_{12} дорівнює нулеві.

Далі проводячи міркування, аналогічні доведенню попередньої теореми отримуємо, що результати цієї теореми поширюються і для алгебри U_3.

У даній роботі показано: 1. ДНФ формул алгебр класу P для $n > 2$ співпадають з побудованими в роботі [1] ДНФ. 2. Всі алгебри U_n, $n > 2$ є еквaціонально еквівалентними, тобто множини всіх тотожностей в цих алгебрах співпадають.

Список використаної літератури

1. *Мич І. А., Ніколенко В. В.* Повні системи тотожностей в одному класі алгебр // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – Ужгород, – 2017. – Вип. 1 (30). – С. 79–86.
2. *Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печурін М.К.* Основи дискретної математики. – К.: Наукова думка, 2002. – 579 с.

Одержано 04.07.2017