УДК 517.946

В. В. Маринець (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»),
О. Ю. Питьовка (Мукачівський держ. ун-т)

ДОСЛІДЖЕННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ З РОЗРИВНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

We established the sufficient conditions of existence and uniqueness of regular or irregular solution of boundary–value problem for non–linear wave equation with discontinuous right part in domain with complicated structure.

Встановлюються достатні умови існування та єдиності регулярного або іррегулярного розв'язку крайової задачі для нелінійного хвильового рівняння з розривною правою частиною в області зі складною структурою краю.

Дана робота є продовженням досліджень, приведених в статтях [1, 2].

Розглянемо в $\mathbb{R}^2$ область $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, де

$$D_1 = \{(x,y)|x \in (x_0, x_1], y \in (y_0, y_1]\}\,,\ x_0 < x_1 < x_2,$$

$$D_2 = \{(x,y)|x \in [x_0, x_1], y \in (y_1, g_1(x))\}\,,\ y_0 < y_1 < y_2,$$
$$D_3 = \{(x,y)|x \in (x_1, x_2], y \in (g_2(x), y_1]\}\,,$$

а $y = g_r(x) \ \Leftrightarrow\ x = k_r(y)$, $r = 1,\ 2$ — "вільні" криві, причому $g'_r(x) > 0$, $g_1(x_{r-1}) = y_r$, $g_2(x_r) = y_{r-1}$.

Позначимо через $D^* := D \setminus E_1 \cup E_2$, $E_1 = \{(x,y)|\ x \in [x_0, x_1],\ y = y_1\}$, $E_2 = \{(x,y)|\ y \in [y_0, y_1],\ x = x_1\}$

Дослідимо задачу: в просторі функцій $C^*(\overline{D}) := C^{(1.1)}(D^*) \cap C(\overline{D})$ знайти розв'язок рівняння

$$\begin{gathered} L_{(1.1)}u(x,y) = f(x,y,u(x,y)) := f[u(x,y)], \\ L_{(1.1)}u(x,y) := u_{xy}(x,y) + a_1(x,y)u_x(x,y) + a_2(x,y)u_y(x,y), \end{gathered} \tag{1}$$

який задовольняє умови

$$u(x_0, y) = \psi(y), y \in [y_0, y_1],\ \ u(x, y_0) = \varphi(x), x \in [x_0, x_1], \tag{2}$$

$$u(x, g_1(x)) = \omega_1(x), x \in [x_0, x_1], \tag{3}$$

$$u(x, g_2(x)) = \omega_2(x), x \in [x_1, x_2], \tag{4}$$

$$\psi(y_0) = \varphi(x_0),\ \psi(y_1) = \omega_1(x_0),\ \varphi(x_1) = \omega_2(x_1), \tag{5}$$

а права частина рівняння (1) $f[u(x,y)] = f_s[u_s(x,y)]$, $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1, 2, 3$, де $f_s[u_s(x,y)] \in C(\overline{B}_s)$, $f_s : \overline{B}_s \to \mathbb{R}$, $\overline{B}_s \subset \mathbb{R}^3$, $\Pi p_{xOy}\overline{B}_s = \overline{D}_s$, $s = 1, 2, 3$, причому

$$u_2(x, y_1) = u_1(x, y_1),\ x \in [x_0, x_1], \tag{6}$$

$$u_3(x_1, y) = u_1(x_1, y),\ y \in [y_0, y_1]. \tag{7}$$

Зауважимо, що умови (5) є умовами узгодженості крайових умов (2)—(4), а (6), (7) — умови неперервності розв'язку задачі (1)—(5), якщо він існує. Права частина рівняння (1) $f[u(x,y)]$ всюди неперервна функція в області $\overline{B}$, $\overline{B} := \overline{B}_1 \cup \overline{B}_2 \cup \overline{B}_3$, за виключенням характеристик рівняння (1) $y = y_1$, $x = x_1$, вздовж яких вона може мати скінчені розриви. Очевидно, якщо існує розв'язок задачі (1)—(7) $u(x,y)$, то $u(x,y) = u_s(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$, де $u_1(x,y)$ є розв'язком задачі Гурса (1), (2), (5) при $(x,y) \in \overline{D}_1$, $u_2(x,y)$ — задачі Дарбу (1), (3), (5), (6), $(x,y) \in \overline{D}_2$, а $u_3(x,y)$ — задачі Дарбу (1), (4), (5), (7), при $(x,y) \in \overline{D}_3$.

Надалі вважатимемо, що $a_1(x,y) \in C^{(1.0)}(D)$, $a_2(x,y) \in C^{(0.1)}(D)$, $\psi(y) \in C^1[y_0, y_1]$, $\varphi(x) \in C^1[x_0, x_1]$, $\omega_r(x,y) \in C^1[x_{r-1}, x_r]$, $r = 1,2$, причому

$$a_{1x}(x,y) = a_{2y}(x,y). \tag{8}$$

Справедлива наступна

Лема 1. *Якщо $f_s[u_s(x,y)] \in C(\overline{B}_s)$ і виконується умова (8), то крайова задача (1)—(7) еквівалентна системі інтегральних рівнянь вигляду*

$$u_s(x,y) = \gamma_s(x,y) + \epsilon_s T_{1,s} F_1[u_1(\xi,\eta)] + T_s F_s[u_s(\xi,\eta)],\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3, \tag{9}$$

де $\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$, а

$$F_s[u_s(x,y)] := f_s[u_s(x,y)] + [a_{2y}(x,y) + a_1(x,y)a_2(x,y)]\, u_s(x,y),$$

$$T_1 F_1[u_1(\xi,\eta)] := \int\limits_{x_0}^{x} \int\limits_{y_0}^{y} K(x,y;\xi,\eta) F_1[u_1(\xi,\eta)] d\eta d\xi, (x,y) \in \overline{D}_1,$$

$$\gamma_1(x,y) := \psi(y) \exp\left(\int\limits_{x}^{x_0} a_2(\xi,y) d\xi\right) + \int\limits_{x_0}^{x} K(x,y;\xi,y_0)\left[\varphi'(\xi) + a_2(\xi,y_0)\varphi(\xi)\right] d\xi,$$

$$T_2 F_2[u_2(\xi,\eta)] := \int\limits_{k_1(y)}^{x} \int\limits_{y_1}^{y} K(x,y;\xi,\eta) F_2[u_2(\xi,\eta)] d\eta d\xi, (x,y) \in \overline{D}_2,$$

$$\gamma_2(x,y) := \omega_1(k_1(y)) \exp\left(\int\limits_{x}^{k_1(y)} a_2(\xi,y) d\xi\right) + $$
$$+ \int\limits_{k_1(y)}^{x} K(x,y;\xi,y_0)\left[\varphi'(\xi) + a_2(\xi,y_0)\varphi(\xi)\right] d\xi,$$

$$T_{1,2} F_1[u_1(\xi,\eta)] := \int\limits_{k_1(y)}^{x} \int\limits_{y_0}^{y_1} K(x,y;\xi,\eta) F[u_1(\xi,\eta)] d\eta d\xi,$$

$$T_3 F_3[u_3(\xi,\eta)] := \int\limits_{g_2(x)}^{y} \int\limits_{x_1}^{x} K(x,y;\xi,\eta) F_3[u_3(\xi,\eta)] d\xi d\eta, (x,y) \in \overline{D}_3,$$

$$\gamma_3(x,y) := \omega_2(x)\exp\left(\int\limits_y^{g_2(x)} a_1(x,\eta)d\eta\right) +$$
$$+\int\limits_{g_2(x)}^{y} K(x,y;x_0,\eta)\left[\psi'(\eta)+a_1(x_0,\eta)\psi(\eta)\right]d\eta,$$

$$T_{1,3}F_1[u_1(\xi,\eta)] := \int\limits_{g_2(x)}^{y}\int\limits_{x_0}^{x_1} K(x,y;\xi,\eta)F_1[u_1(\xi,\eta)]d\xi d\eta,$$

$$K(x,y;\xi,\eta) := \exp\left(\int\limits_y^{\eta} a_1(\xi,\tau)d\tau + \int\limits_x^{\xi} a_2(\zeta,y)d\zeta\right).$$

Із умов (6), (7) випливає, що

$$\begin{gathered}
u_{2x}(x,y_1)=u_{1x}(x,y_1),\ x\in[x_0,x_1] \text{ і } u_{3y}(x_1,y)=u_{1y}(x_1,y),\ y\in[y_0,y_1], \text{ а}\\
u_{2y}(x,y_1)-u_{1y}(x,y_1)=[\rho_1+\delta_1(x)]\exp\left(\int\limits_x^{x_0} a_2(\xi,y_1)d\xi\right), x\in[x_0,x_1],\\
u_{3x}(x_1,y)-u_{1x}(x_1,y)=[\rho_2+\delta_2(y)]\exp\left(\int\limits_y^{y_0} a_1(x_1,\eta)d\eta\right), y\in[y_0,y_1],
\end{gathered} \tag{10}$$

де

$$\rho_2 := \omega_2'(x_1)-\varphi'(x_1)+g_2'(x_1)\Bigg\{a_1(x_1,y_0)\omega_2(x_1)-[\psi'(y_0)+a_1(x_0,y_0)\psi(y_0)]\times$$
$$\times\exp\left(\int\limits_{x_1}^{x_0} a_2(\xi,y_0)d\xi\right)-\int\limits_{x_0}^{x_1} F_1(\xi,y_0,\varphi(\xi))\exp\left(\int\limits_{x_1}^{\xi} a_2(\tau,y_0)d\tau\right)d\xi\Bigg\},$$

$$\rho_1 := -\psi'(y_1)+k_1'(y_1)\Bigg\{\omega_1'(x_0)+a_2(x_0,y_1)\omega_1(x_0)-[\varphi'(x_0)+a_2(x_0,y_0)\varphi(x_0)]\times$$
$$\times\exp\left(\int\limits_{y_1}^{y_0} a_1(x_0,\eta)d\eta\right)-\int\limits_{y_0}^{y_1} F_1(x_0,\eta,\psi(\eta))\exp\left(\int\limits_{y_1}^{\eta} a_1(x_0,\tau)d\tau\right)d\eta\Bigg\},$$

$$\delta_1(x) := \int\limits_{x_0}^{x}\exp\left(\int\limits_{x_0}^{\xi} a_2(\tau,y_1)d\tau\right)[f_2[u_2(\xi,y_1)]-f_1[u_1(\xi,y_1)]]\,d\xi,\ x\in[x_0,x_1],$$

$$\delta_2(y) := \int\limits_{y_0}^{y}[f_3[u_3(x_1,\eta)]-f_1[u_1(x_1,\eta)]]\exp\left(\int\limits_{y_0}^{\eta} a_1(x_1,\tau)d\tau\right)d\eta,\ y\in[y_0,y_1].$$

Із умов (10) випливає справедливість

Лема 2. *Нехай виконуються умови леми 1 і крайова задача (1)–(7) має розв'язок $u(x,y)$. Тоді він належатиме просторові $C^{(1.1)}(D)\cap C(\overline{D})$ (буде регулярним), якщо $f[u(x,y)]\in C(\overline{B})$ і $\rho_1=\rho_2=0$.*

У супротивному випадку виконуються рівності (10) і розв'язок задачі (1)–(7) буде іррегулярним.

Встановимо достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі (1)—(7). З цією метою введемо в розгляд простір функцій $C_1(\overline{B}_s)$.

Означення 1. *Будемо говорити, що* $F_s[u_s(x,y)] \in C_1(\overline{B}_s)$, *якщо функція* $F_s[u_s(x,y)]$ *задовольняє наступні умови [3]:*

1) $F_s[u_s(x,y)] \in C(\overline{B}_s)$,

2) в просторі функцій $C(\overline{B}_{s,1})$, $\overline{B}_{s,1} \subset \mathbb{R}^4$, $Пр_{xOy}\overline{B}_{s,1} = \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$, *існує така функція* $H_s(x,y,u_s(x,y);v_s(x,y)) := H_s[u_s(x,y);v_s(x,y)]$, *що*

   (a) $H_s[u_s(x,y);u_s(x,y)] \equiv F_s[u_s(x,y)]$,

   (b) для довільної пари неперервних функцій $u_s(x,y)$, $v_s(x,y) \in \overline{B}_{s,1}$, *які задовольняють умову* $u_s(x,y) \geq v_s(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_s$, *в області* $\overline{B}_{s,1}$ *виконується нерівність*

$$H_s[u_s(x,y);v_s(x,y)] \geq H_s[v_s(x,y);u_s(x,y)], \tag{11}$$

3) функція $H_s[u_s(x,y);v_s(x,y)]$ *в області* $\overline{B}_{s,1}$ *задовольняє умову Ліпшиця, тобто, для довільних двох пар неперервних в* $\overline{D}_s$ *функцій* $u_{s,r}(x,y)$, $v_{s,r}(x,y)$, $r = 1,2$, *виконується умова*

$$|H_s[u_{s,1}(x,y);u_{s,2}(x,y)] - H_s[v_{s,1}(x,y);v_{s,2}(x,y)]| \leq L_s(|w_{s,1}(x,y)| + |w_{s,2}(x,y)|),$$

де $w_{s,r}(x,y) := u_{s,r}(x,y) - v_{s,r}(x,y)$, $r = 1,2$, *де* L_s *— стала Ліпшиця,* $s = 1,2,3$.

Зауважимо, що якщо функція $F_s[u_s(x,y)] \in C(\overline{B}_s)$ і має обмежену частинну похідну першого порядку по $u_s(x,y)$, то вона завжди належить просторові $C_1(\overline{B}_s)$, $s = 1,2,3$. Зворотнє твердження не справедливе.

Нехай $z_{s,p}(x,y)$, $v_{s,p}(x,y) \in C(\overline{D}_s)$ належать області $\overline{B}_{s,1}$ для всіх $s = 1,2,3$ та $p \in \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Введемо позначення:

$$w_{s,p}(x,y) := z_{s,p}(x,y) - v_{s,p}(x,y),\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3,\ p \in \mathbb{N}_0,$$

$$\begin{gathered} f_s^p(x,y) := H_s[z_{s,p}(x,y);v_{s,p}(x,y)], \\ f_{s,p}(x,y) := H_s[v_{s,p}(x,y);z_{s,p+1}(x,y)], \\ f_{s,p}^*(x,y) := H_s[v_{s,p}(x,y);z_{s,p}(x,y)], \\ \alpha_{s,p}(x,y) := z_{s,p}(x,y) - \gamma_s(x,y) - \epsilon_s T_{1,s} f_1^p(\xi,\eta) - T_s f_s^p(\xi,\eta), \\ \beta_{s,p}(x,y) := v_{s,p}(x,y) - \gamma_s(x,y) - \epsilon_s T_{1,s} f_{1,p}^*(\xi,\eta) - T_s f_{s,p}^*(\xi,\eta), \\ z_{s,p}^*(x,y) := z_{s,p}(x,y) - q_{s,p}(x,y) w_{s,p}(x,y), \\ v_{s,p}^*(x,y) := v_{s,p}(x,y) + c_{s,p}(x,y) w_{s,p}(x,y), \\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3, \end{gathered} \tag{12}$$

$$F_s^p(x,y) := H[z_{s,p}^*(x,y);v_{s,p}^*(x,y)],\ F_{s,p}(x,y) := H[v_{s,p}^*(x,y);z_{s,p+1}(x,y)],$$

$$R_s^p(x,y) := \gamma_s(x,y) + \epsilon_s T_{1,s} F_1^p(\xi,\eta) + T_s F_s^p(\xi,\eta),$$

$$R_{s,p}(x,y) := \gamma_s(x,y) + \epsilon_s T_{1,s} F_{1,p}(\xi,\eta) + T_s F_{s,p}(\xi,\eta),$$
$$\alpha^*_{s,p}(x,y) := z_{s,p}(x,y) - R^p_s(x,y), \tag{13}$$
$$\beta^*_{s,p}(x,y) := v_{s,p}(x,y) - R_{s,p}(x,y),$$

де $q_{s,p}(x,y)$, $c_{s,p}(x,y)$ є довільними з простору $C(\overline{D}_s)$ невід'ємними функціями, які задовольняють умови

$$0 \le q_{s,p}(x,y) \le 0,5, \ 0 \le c_{s,p}(x,y) \le 0,5 \tag{14}$$

для всіх $p \in \mathbb{N}_0$ та $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$.

Побудуємо послідовності функцій $\{z_{s,p}(x,y)\}$ та $\{v_{s,p}(x,y)\}$ згідно формул [4, 5]

$$z_{s,p+1}(x,y) = R^p_s(x,y), \ v_{s,p+1}(x,y) = R_{s,p}(x,y),$$
$$(x,y) \in \overline{D}_s, \ s = 1,2,3, \tag{15}$$

де за нульове наближення $z_{s,0}(x,y)$, $v_{s,0}(x,y) \in \overline{B}_{s,1}$ вибираємо довільні з простору $C(\overline{D}_s)$ функції, які при $(x,y) \in \overline{D}_s$ задовольняють умови

$$w_{s,0}(x,y) \ge 0, \ \alpha_{s,0}(x,y) \ge 0, \ \beta_{s,0}(x,y) \le 0, \ (x,y) \in \overline{D}_s. \tag{16}$$

Означення 2. *Функції $z_{s,0}(x,y)$, $v_{s,0}(x,y) \in C(\overline{D}_s)$, $s = 1,2,3$, які належать області $\overline{B}_{s,1}$ і задовольняють умови (16), називаються функціями порівняння крайової задачі (1)—(7).*

Зауважимо, що в силу умови $F_s[u_s(x,y)] \in C(\overline{B}_s)$ функції порівняння задачі (1)—(7) взагалі кажучи існують (див. [6]).

Відмітимо, що в силу (14), (16) якщо $v_{s,0}(x,y)$, $z_{s,0}(x,y) \in \overline{B}_{s,1}$, то і $v^*_{s,0}(x,y)$, $z^*_{s,0}(x,y) \in \overline{B}_{s,1}$, а із виконання умов (16) випливає, що $\alpha^*_{s,0}(x,y) \ge 0$, $\beta^*_{s,0}(x,y) \le 0$.

Із (12), (13) та (15) маємо

$$Z_{s,p}(x,y) - Z_{s,p+1}(x,y) = \alpha^*_{s,p}(x,y), \ V_{s,p}(x,y) - V_{s,p+1}(x,y) = \beta^*_{s,p}(x,y), \tag{17}$$

$$w_{s,p+1}(x,y) = \epsilon_s T_{1,s}(F^p_1(\xi,\eta) - F_{1,p}(\xi,\eta)) + T_s(F^p_s(\xi,\eta) - F_{s,p}(\xi,\eta)), \tag{18}$$

$$\alpha_{s,p+1}(x,y) = \epsilon_s T_{1,s}(F^p_1(\xi,\eta) - f^{p+1}_1(\xi,\eta)) + T_s(F^p_s(\xi,\eta) - f^{p+1}_s(\xi,\eta)),$$
$$\beta_{s,p+1}(x,y) = \epsilon_s T_{1,s}(F_{1,p}(\xi,\eta) - f^*_{1,p+1}(\xi,\eta)) + T_s(F_{s,p}(\xi,\eta) - f^*_{s,p+1}(\xi,\eta)), \tag{19}$$

$$\alpha^*_{s,p+1}(x,y) - \alpha_{s,p+1}(x,y) =$$
$$= \epsilon_s T_{1,s}(f^{p+1}_1(\xi,\eta) - F^{p+1}_1(\xi,\eta)) + T_s(f^{p+1}_s(\xi,\eta) - F^{p+1}_s(\xi,\eta)),$$
$$\beta^*_{s,p+1}(x,y) - \beta_{s,p+1}(x,y) = \tag{20}$$
$$= \epsilon_s T_{1,s}(f^*_{1,p+1}(\xi,\eta) - F_{1,p+1}(\xi,\eta)) + T_s(f^*_{s,p+1}(\xi,\eta) - F_{s,p+1}(\xi,\eta)),$$

$$v_{s,p}(x,y) - z_{s,p+1}(x,y) = \beta_{s,p}(x,y) +$$
$$+ \epsilon_s T_{1,s}(f^*_{1,p}(\xi,\eta) - F^p_1(\xi,\eta)) + T_s(f^*_{s,p}(\xi,\eta) - F^p_s(\xi,\eta)),$$
$$z_{s,p}(x,y) - v_{s,p+1}(x,y) = \alpha_{s,p}(x,y) + \tag{21}$$
$$+ \epsilon_s T_{1,s}(f^p_1(\xi,\eta) - F_{1,p}(\xi,\eta)) + T_s(f^p_s(\xi,\eta) - F_{s,p}(\xi,\eta)),$$
$$p \in \mathbb{N}_0, \ (x,y) \in \overline{D}_s, \ s = 1,2,3.$$

Приймаючи до уваги умови (11), (14) та (16), із (17)—(21) методом математичної індукції переконуємося, що якщо на кожному кроці ітерації (15) функції $q_{s,p}(x,y)$, $c_{s,p}(x,y)$ вибирати таким чином, щоб виконувались нерівності

$$\begin{gathered} z_{s,p}(x,y)-z_{s,p+1}(x,y)-q_{s,p}(x,y)w_{s,p}(x,y)\geq 0, \\ v_{s,p}(x,y)-v_{s,p+1}(x,y)+c_{s,p}(x,y)w_{s,p}(x,y)\leq 0, \\ (x,y)\in\overline{D}_s,\ s=1,2,3. \end{gathered} \tag{22}$$

то послідовності функцій $\{z_{s,p}(x,y)\}$ та $\{v_{s,p}(x,y)\}$, побудовані згідно закону (15), (22), задовольнятимуть в області $\overline{B}_{s,1}$ умови

$$\begin{gathered} v_{s,p}(x,y)\leq v_{s,p+1}(x,y)\leq z_{s,p+1}(x,y)\leq Z_{s,p}(x,y), \\ \alpha_{s,p}(x,y)\geq 0,\ \beta_{s,p}(x,y)\leq 0 \end{gathered} \tag{23}$$

для всіх $p\in\mathbb{N}_0$ та $(x,y)\in\overline{D}_s$, $s=1,2,3$.

Лема 3. *Нехай $F_s[u_s(x,y)]\in C_1(\overline{B}_s)$ і в області $\overline{B}_{s,1}$ існують функції порівняння задачі (1)—(7) $z_{s,0}(x,y)$, $v_{s,0}(x,y)$, $(x,y)\in\overline{D}_s$, $s=1,2,3$.*

Тоді якщо виконуються умови леми 1, то множина функцій $q_{s,p}(x,y)$, $c_{s,p}(x,y)$, які задовольняють умови (14), (22) непорожня.

Доведення. Дійсно, покладемо на кожному кроці ітерації (15), (16)

$$q_{s,p}(x,y)=\begin{cases}\alpha_{s,p}(x,y)\rho_{s,p}^{-1}(x,y), & \text{при } w_{s,p}(x,y)\neq 0,\\ 0, & \text{при } w_{s,p}(x,y)=0,\end{cases}$$

$$c_{s,p}(x,y)=\begin{cases}-\beta_{s,p}(x,y)\rho_{s,p}^{-1}(x,y), & \text{при } w_{s,p}(x,y)\neq 0,\\ 0, & \text{при } w_{s,p}(x,y)=0,\end{cases}$$

$$\rho_{s,p}(x,y):=\alpha_{s,p}(x,y)-\beta_{s,p}(x,y)+w_{s,p}(x,y),\ (x,y)\in\overline{D}_s,\ p\in\mathbb{N}_0.$$

Очевидно, що вибрані таким чином функції $q_{s,p}(x,y)$ та $c_{s,p}(x,y)$ в силу (23) задовольняють умови (14), а приймаючи до уваги (17) маємо

$$z_{s,p}(x,y)-z_{s,p+1}(x,y)-q_{s,p}(x,y)w_{s,p}(x,y)=\alpha^*_{s,p}(x,y)-$$
$$-\alpha_{s,p}(x,y)\rho_{s,p}^{-1}(x,y)w_{s,p}(x,y)\geq\alpha^*_{s,p}(x,y)\left(1-\tfrac{w_{s,p}(x,y)}{\rho_{s,p}(x,y)}\right)\geq 0,$$

$$v_{s,p}(x,y)-v_{s,p+1}(x,y)+c_{s,p}(x,y)w_{s,p}(x,y)\leq\beta^*_{s,p}(x,y)\left(1-\tfrac{w_{s,p}(x,y)}{\rho_{s,p}(x,y)}\right)\leq 0,$$
$$(x,y)\in\overline{D}_s, s=1,2,3,\ p\in\mathbb{N}_0,$$

і лема 3 доведена.

Таким чином нами доведена наступна

Теорема 1. *Нехай функції $F_s[\,u_s(x,y)\,]\in C_1(\,\overline{B}_s\,)$, $a_1(x,y)\in C^{(1.0)}(D)$, $a_2(x,y)\in C^{(0.1)}(\overline{D})$ і виконується умова (8), а в області $\overline{B}_{s,1}$ існують функції порівняння крайової задачі (1) — (7) $z_{s,0}(x,y)$, $v_{s,0}(x,y)\in C(\overline{D}_s)$, $s=1,2,3$.*

Тоді для функцій $z_{s,p}(x,y)$, $v_{s,p}(x,y)$, побудованих згідно формул (15), (16), де $q_{s,p}(x,y)$, $c_{s,p}(x,y)\in C(\overline{D}_s)$, $s=1,2,3$ задовольняють в області $\overline{B}_{s,1}$ умови (14), (22), справедливі нерівності (23) для всіх $p\in\mathbb{N}_0$ та $(x,y)\in\bar{D}_s$, $s=1,2,3$.

Ввівши позначення

$$\max_s \sup_{\overline{D}_s} w_{s,0}(x,y) = d,\ \max_{s,p} \sup_{\overline{D}_s}(1 - q_{s,p}(x,y) - c_{s,p}(x,y)) \le q,$$
$$\max_s L_s = l,\ \max\left\{1, \sup_{\overline{D}}(y - y_0 + x - x_0)\right\} = \gamma,$$
$$\max_s \sup_{\overline{D}_s} K(x,y;\xi,\eta) \le 0,5K,\ s = 1,2,3,$$

та повторюючи міркування, приведені в роботі [1], переконуємось у справедливості наступної теореми

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1.*

Тоді послідовності функцій $\{z_{s,p}(x,y)\}$ та $\{v_{s,p}(x,y)\}$, побудовані згідно закону (14), (15), (16), (22):

1) *збігаються рівномірно до единого неперервного розв'язку відповідного інтегрального рівняння (12) при $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$,*

2) *мають місце оцінки*

$$w_{s,p}(x,y) \le \frac{1}{p!}\left[lKq\gamma(x - x_0 + y - y_0)\right]^p d,\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3,$$

3) *в області $\overline{B}_{s,1}$ мають місце нерівності*

$$v_{s,p}(x,y) \le v_{s,p+1}(x,y) \le u_s(x,y) \le z_{s,p+1}(x,y) \le z_{s,p}(x,y)$$

для всіх $p \in \mathbb{N}_0$, $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$, де $u_s(x,y)$ — единий розв'язок системи інтегральних рівнянь (9),

4) *збіжність ітераційного методу (14), (15), (16), (22) не повільніша збіжності методу (15), коли $q_{s,p}(x,y) = c_{s,p}(x,y) \equiv 0$ і $F_{s,p}(x,y) \equiv f_{s,p}(x,y)$.*

Наслідок 1. *Нехай виконуються умови теореми 2.*

Тоді в просторі функцій $C^*(\overline{D})$ існує единий іррегулярний розв'язок задачі (1)–(7).

Якщо ж права частина рівняння (1) $f[u(x,y)] \in C(\overline{B})$ і виконуються умови $\rho_k = 0$, $k = 1,2$, то розв'язок крайової задачі (1)–(7) буде регулярним (належатиме просторові $C^{(1.1)}(D) \cap C(\overline{D})$).

Наслідок 2. *Нехай $\psi(y) = \varphi(x) = 0$, $(x,y) \in \overline{D}_1$, $\omega_r(x) = 0$, $x \in [x_{r-1}, x_r]$, $r = 1,2$ і $F_s[u_s(x,y)] \in C_1(\overline{B}_s)$, причому $F_s[u_s(x,y)] \equiv H_s[u_s(x,y);0]$.*

Тоді якщо $F_s[0] \le (\ge) 0$ в $\overline{B}_s$, то розв'язок крайової задачі (1)–(7) при $(x,y) \in \overline{D}$ задовольняє нерівності

$$u(x,y) \le (\ge) 0,\ (x,y) \in \overline{D}.$$

Список використаної літератури

1. *Marynets V. V. and Marynets K. V.* On Goursat–Darboux boundary–value problem for systems of non–linear differential equations of hyperbolic type // Miskolc Mathematical Notes. — 2013. — V.14, No.3. — P. 1009–1020.

2. *Marynets V. V., Marynets K. V., Pytovka O.Yu.* On one constructive method of the boundary–value problem investigation for the differential equations of the hyperbolic type// Наук. вісник Ужгород.ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2015. — Вип.2(27). — С. 76—85.
3. *Маринець В. В., Питьовка О.Ю.* Про один підхід дослідження крайових задач для нелінійних рівнянь гіперболічного типу в області із складною структурою краю // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-матем. науки: Збірник наукових праць ІК ім.В.М.Глушкова НАНУ. — 2017. Випуск 15. — С. 113—119.
4. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. — М.:Наука, 1969. — 456 с.
5. *Курпель Н.С., Шувар Б.А.* Двусторонние операторные неравенства и их применения.— Киев: Наук.думка, 1980. — 268 с.
6. *Маринець В. В.* Про один конструктивний метод дослідження крайової задачі Дарбу–Гурса // Наук. вісник Ужгород.ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2016. — Вип.2(29). — С. 72—80.

Одержано 11.02.2018