

УДК 512.547.2

Д. Ю. Білецька, І. В. Шапочка (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ТЕНЗОРНІ ДОБУТКИ НЕРОЗКЛАДНИХ ЦІЛОЧИСЛОВИХ МАТРИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ СИМЕТРИЧНОЇ ГРУПИ ТРЕТЬОГО СТЕПЕНЯ

We have been found the formulas for the tensor products of indecomposable integral matrix representations of the symmetric group of the third degree.

В статті приведені формули для тензорних добутків нерозкладних матричних зображень симетричної групи третього степеня над кільцем цілих раціональних чисел.

Нехай S_3 — симетрична група третього степеня з твірними елементами a, b і твірними співвідношеннями:

$$a^2 = b^3 = e, \quad ba = ab^2,$$

де e — одиничний елемент групи S_3 . В цій статті приведені формули для тензорних добутків нерозкладних матричних зображень групи S_3 над кільцем \mathbb{Z} цілих раціональних чисел. В [1] вивчаються тензорні добутки скінчених груп, зокрема приведено формули для тензорних добутків нерозкладних матричних зображень скінченної циклічної p -групи порядку p^2 над повним дискретно нормованим кільцем з полем лишків характеристики p , яке не є полем. Одержані нами результати базуються на класифікації всіх нееквівалентних нерозкладних цілочислових матричних зображень групи S_3 , одержаною Л. А. Назаровою та А. В. Ройтером в [2]. Підкреслимо, в цій роботі доведено, що розклад цілочислових матричних зображень групи S_3 у суму нерозкладних зображень є однозначним з точністю до порядку слідування доданків. Всі попарно нееквівалентні нерозкладні матричні зображення симетричної групи S_3 над кільцем цілих раціональних чисел \mathbb{Z} вичерпуються наступними зображеннями:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : a &\rightarrow 1, \quad b \rightarrow 1; & \Gamma_2 : a &\rightarrow -1, \quad b \rightarrow 1; \\ \Gamma_3 : a &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & b &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \\ \Gamma_4 : a &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & b &\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \\ \Gamma_5 : a &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & b &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ \Gamma_6 : a &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & b &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \\ \Gamma_7 : a &\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & b &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \\ \Gamma_8 : a &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & b &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\Gamma_9 : a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_{10} : a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Надалі для матричного зображення Γ групи S_3 через $[\Gamma]$ позначимо клас всіх еквівалентних зображенню Γ матричних цілочислових зображень групи S_3 . У свою чергу для невід'ємних цілих чисел n_1, n_2, \dots, n_{10} через

$$n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + \dots + n_{10}\Gamma_{10}$$

позначимо цілком розкладне зображення групи S_3 , яке містить n_k раз нерозкладну компоненту Γ_k для кожного $k \in \{1, 2, \dots, 10\}$.

Теорема 1. *Справджуються наступні формули для тензорних добутків нерозкладних цілочислових матричних зображень симетричної групи S_3 :*

$$\begin{array}{ll} [\Gamma_1 \otimes \Gamma_1] = [\Gamma_1], & [\Gamma_1 \otimes \Gamma_2] = [\Gamma_2], \\ [\Gamma_1 \otimes \Gamma_3] = [\Gamma_3], & [\Gamma_1 \otimes \Gamma_4] = [\Gamma_4], \\ [\Gamma_1 \otimes \Gamma_5] = [\Gamma_5], & [\Gamma_1 \otimes \Gamma_6] = [\Gamma_6], \\ [\Gamma_1 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_7], & [\Gamma_1 \otimes \Gamma_8] = [\Gamma_8], \\ [\Gamma_1 \otimes \Gamma_9] = [\Gamma_9], & [\Gamma_1 \otimes \Gamma_{10}] = [\Gamma_{10}], \\ [\Gamma_2 \otimes \Gamma_2] = [\Gamma_1], & [\Gamma_2 \otimes \Gamma_3] = [\Gamma_4], \\ [\Gamma_2 \otimes \Gamma_4] = [\Gamma_3], & [\Gamma_2 \otimes \Gamma_5] = [\Gamma_5], \\ [\Gamma_2 \otimes \Gamma_6] = [\Gamma_7], & [\Gamma_2 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_6], \\ [\Gamma_2 \otimes \Gamma_8] = [\Gamma_9], & [\Gamma_2 \otimes \Gamma_9] = [\Gamma_8], \\ [\Gamma_2 \otimes \Gamma_{10}] = [\Gamma_{10}], & [\Gamma_3 \otimes \Gamma_3] = [\Gamma_8], \\ [\Gamma_3 \otimes \Gamma_4] = [\Gamma_9], & [\Gamma_3 \otimes \Gamma_5] = [\Gamma_3 + \Gamma_4], \\ [\Gamma_3 \otimes \Gamma_6] = [\Gamma_{10}], & [\Gamma_3 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_{10}], \\ [\Gamma_3 \otimes \Gamma_8] = [\Gamma_4 + \Gamma_{10}], & [\Gamma_3 \otimes \Gamma_9] = [\Gamma_3 + \Gamma_{10}], \\ [\Gamma_3 \otimes \Gamma_{10}] = [2\Gamma_{10}], & [\Gamma_4 \otimes \Gamma_4] = [\Gamma_8], \\ [\Gamma_4 \otimes \Gamma_5] = [\Gamma_3 + \Gamma_4], & [\Gamma_4 \otimes \Gamma_6] = [\Gamma_{10}], \\ [\Gamma_4 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_{10}], & [\Gamma_4 \otimes \Gamma_8] = [\Gamma_3 + \Gamma_{10}], \\ [\Gamma_4 \otimes \Gamma_9] = [\Gamma_4 + \Gamma_{10}], & [\Gamma_4 \otimes \Gamma_{10}] = [2\Gamma_{10}], \\ [\Gamma_5 \otimes \Gamma_5] = [2\Gamma_5], & [\Gamma_5 \otimes \Gamma_6] = [\Gamma_{10}], \\ [\Gamma_5 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_{10}], & [\Gamma_5 \otimes \Gamma_8] = [\Gamma_3 + \Gamma_{10}], \\ [\Gamma_5 \otimes \Gamma_9] = [\Gamma_4 + \Gamma_{10}], & [\Gamma_5 \otimes \Gamma_{10}] = [2\Gamma_{10}], \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 [\Gamma_6 \otimes \Gamma_6] &= [\Gamma_6 + \Gamma_{10}], & [\Gamma_6 \otimes \Gamma_7] &= [\Gamma_7 + \Gamma_{10}], \\
 [\Gamma_6 \otimes \Gamma_8] &= [2\Gamma_{10}], & [\Gamma_6 \otimes \Gamma_9] &= [2\Gamma_{10}], \\
 [\Gamma_6 \otimes \Gamma_{10}] &= [3\Gamma_{10}], & [\Gamma_7 \otimes \Gamma_7] &= [\Gamma_6 + \Gamma_{10}], \\
 [\Gamma_7 \otimes \Gamma_8] &= [2\Gamma_{10}], & [\Gamma_7 \otimes \Gamma_9] &= [2\Gamma_{10}], \\
 [\Gamma_7 \otimes \Gamma_{10}] &= [3\Gamma_{10}], & [\Gamma_8 \otimes \Gamma_8] &= [\Gamma_9 + 2\Gamma_{10}], \\
 [\Gamma_8 \otimes \Gamma_9] &= [\Gamma_8 + 2\Gamma_{10}], & [\Gamma_8 \otimes \Gamma_{10}] &= [4\Gamma_{10}], \\
 [\Gamma_9 \otimes \Gamma_9] &= [\Gamma_9 + 2\Gamma_{10}], & [\Gamma_9 \otimes \Gamma_{10}] &= [4\Gamma_{10}], \\
 [\Gamma_{10} \otimes \Gamma_{10}] &= [6\Gamma_{10}].
 \end{aligned}$$

Доведення. Перші дев'ятнадцять рівностей є очевидними. Для доведення наступних двадцяти шести рівностей для всіх $i, j \in \{3, 4, \dots, 10\}$ таких, що $i \leq j$, нами знайдено оборотну матрицю $C^{(i,j)}$ над кільцем цілих чисел \mathbb{Z} відповідного порядку, для якої справджуються рівності

$$(\Gamma_i \otimes \Gamma_j)(a)C^{(i,j)} = C^{(i,j)}\left((n_1^{(ij)}\Gamma_1 + n_2^{(ij)}\Gamma_2 + \dots + n_{10}^{(ij)}\Gamma_{10})(a)\right),$$

$$(\Gamma_i \otimes \Gamma_j)(b)C^{(i,j)} = C^{(i,j)}\left((n_1^{(ij)}\Gamma_1 + n_2^{(ij)}\Gamma_2 + \dots + n_{10}^{(ij)}\Gamma_{10})(b)\right),$$

для деяких невід'ємних цілих чисел $n_1^{(ij)}, n_2^{(ij)}, \dots, n_{10}^{(ij)}$. Укажемо ці матриці:

$$C^{(3,3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C^{(3,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C^{(3,5)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(3,6)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad C^{(3,7)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(3,8)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(3,9)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(3,10)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & -2 & 0 & -2 & -3 & -1 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -2 & -1 & -2 & 0 & -3 & -2 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & -1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(4,4)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C^{(4,5)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(4,6)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad C^{(4,7)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(4,8)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & -2 & -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$C^{(4,9)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(4,10)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & -2 & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(5,5)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(5,6)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C^{(5,7)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(5,8)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C^{(5,9)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(5,10)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(6,6)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(6,7)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$C^{(6,8)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(6,9)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -3 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -3 & -2 & -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$C^{(6,10)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(7,7)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(7,8)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -1 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & -2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(7,9)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(7,10)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(8,8)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -3 & -3 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -3 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(8,9)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -3 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -3 & -2 & -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$C^{(8,10)} = \begin{pmatrix} C_{11}^{(8,10)} & C_{12}^{(8,10)} \\ C_{21}^{(8,10)} & C_{22}^{(8,10)} \end{pmatrix};$$

де

$$C_{11}^{(8,10)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C_{12}^{(8,10)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C_{21}^{(8,10)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C_{22}^{(8,10)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(9,9)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -3 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & 1 & -5 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 3 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 3 & 7 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -3 & -3 & -5 & -6 & -2 & -2 & -1 & -1 & -3 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 3 & 4 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & -6 & -4 & -1 & -2 & -2 & -1 & -2 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -3 & -4 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 6 & 5 & 2 & 2 & 1 & 0 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & 3 & -1 & -4 & -2 & -2 & -1 & 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 3 & 4 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$C^{(9,10)} = \begin{pmatrix} C_{11}^{(9,10)} & C_{12}^{(9,10)} \\ C_{21}^{(9,10)} & C_{22}^{(9,10)} \end{pmatrix};$$

де

$$C_{11}^{(9,10)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$C_{12}^{(9,10)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C_{21}^{(9,10)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$C_{22}^{(9,10)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -2 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(10,10)} = \begin{pmatrix} C_{11}^{(10,10)} & C_{12}^{(10,10)} \\ C_{21}^{(10,10)} & C_{22}^{(10,10)} \end{pmatrix};$$

$$C_{21}^{(10,10)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C_{22}^{(10,10)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & -3 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & -2 & -2 & -1 & -2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & -2 & -2 & -2 & -1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Список використаної літератури

1. Гудивок П. М., Рудько В. П. Тензорные произведения конечных групп. – Ужгород: Патент, 1985. – 118 с.
2. Назарова Л. А., Ройтер А. В. Целочисленные представления симметрической группы третьей степени // Укр. мат. журн. – 1962. – XIV, №3. – С. 271–288.

Одержано 04.03.2018