УДК 510
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).142-149

О. В. Варцаба[1], І. А. Мич[2], В. В. Ніколенко[3], В. С. Динис[4]

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики
olena.vartsaba@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9158-2365

[2] ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
ihor.mych@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3392-1442

[3] ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
доцент кафедри інформаційних управляючих систем та технологій,
кандидат фізико-математичних наук
volodymer.nikolenko@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0071-6896

[4] ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики
vadim02091996@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5952-9326

ЕКВАЦІОНАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ НУЛЬАРНИХ АЛГЕБР, АЛГЕБР БУЛЕВОГО КУБУ ТА КУБУ ЖЕГАЛКІНА

У даній роботі проведені дослідження над булевими універсальними алгебрами, в сигнатуру яких входять нульарні, унарні та частина бінарних булевих операцій. Побудовані екваціональні та сигнатурні решітки класу тривіальних алгебр. Елементи решіток представляються у вигляді квадрата.

Клас універсальних булевих алгебр складається з восьми алгебр, в сигнатуру яких входять операції кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення. Вони утворюють сигнатурні і екваціональні куби. Для тривіальних алгебр і всіх алгебр булевого кубу знайдені повні системи тотожностей. Повнота систем тотожностей доводиться за допомогою алгоритмів, які дозволяють привести формули відповідних алгебр до стандартних канонічних виглядів.

Куб Жегалкіна складається з восьми алгебр, в сигнатуру яких входять операції одиниця, сума та множення за модулем два. Для алгебр кубу Жегалкіна побудована екваціональна решітка.

Ключові слова: булева алгебра, екваціональна решітка, сигнатурна решітка

1. Вступ. Дана робота є продовженням робіт [1-5], у яких проведені екваціональні дослідження в універсальних алгебрах, заданих над бінарними квадратними матрицями, в сигнатуру яких входять операції диз'юнкції, кон'юнкції та поворотів.

У запропонованій роботі досліджуються повні системи тотожностей в універсальних булевих алгебрах. Теорія булевих алгебр описується в роботах [5, 6].

В [7] Р. Ліндон показав, що всі двозначні алгебри мають повні скінченні системи тотожностей. Задача знаходження повних систем тотожностей для конкретних булевих алгебр і побудова на їх основі стандартних форм досліджена недостатньо. У цій роботі знайдені повні системи тотожностей і побудовані аналоги досконалих диз'юнктивних нормальних форм для класу нульарних алгебр, алгебр булевого кубу та кубу Жегалкіна.

2. Екваціональна та сигнатурна решітки деяких класів булевих алгебр.

Означення 1. *Універсальною булевою алгеброю називається алгебра* $U = \langle A, \Omega \rangle$*, де* $A = \{0, 1\}$*,* $\Omega-$*деяка множина булевих операцій.*

Позначимо через B_k множину універсальних булевих алгебр $U = \langle A, \Omega \rangle$ арність операцій яких не перевищує k. Алгебра $U_\emptyset = \langle A, \Omega \rangle$ називається виродженою, якщо $\Omega = \emptyset$. Клас вироджених алгебр позначимо через B_0. У вироджених алгебрах, у яких $|A| > 1$, повна система тотожностей має вигляд: $x_i = x_i$, тобто $H(U_\emptyset) = \{x_i = x_i\}$.

Клас нульарних універсальних булевих алгебр B_0 складається з чотирьох алгебр: $U_\emptyset-$вироджена алгебра; $U_0 = \langle A, \Omega_0 \rangle$, $\Omega_0 = \{0\}$; $U_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$, $\Omega_1 = \{1\}$; $U_{01} = \langle A, \Omega_{01} \rangle$, $\Omega_{01} = \{0, 1\}$, де 0 і 1 – нульарні операції.

У нульарних алгебрах нульарні операції є формулами, тому: $H(U_0) = \{x_i = x_i;\ 0 = 0\}$; $H(U_1) = \{x_i = x_i;\ 1 = 1\}$; $H(U_{01}) = \{x_i = x_i;\ 0 = 0;\ 1 = 1\}$.

Екваціональні і сигнатурні решітки класу B_0 мають вигляд:

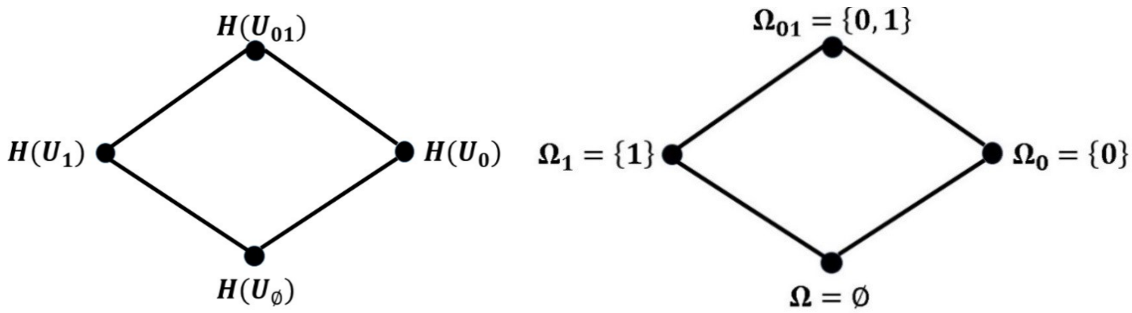

Рис. 1. Екваціональна та сигнатурна решітки класу B_0.

Клас універсальних булевих алгебр B_1 складається з восьми алгебр, які можна задати сигнатурним кубом.

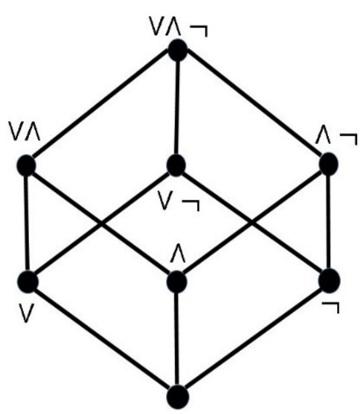

Рис. 2. Сигнатурний куб класу B_1.

Сигнатурна решітка класу B_0 є підрешіткою класу B_1 і для алгебр B_0 знайдено повні системи тотожностей. Побудуємо повні системи тотожностей в інших чотирьох алгебрах куба: для алгебри $U_- = \langle A,\, - \rangle$ −повна система тотожностей $H\left(U_-\right) = \{\bar{\bar{x}} = x\}$; $H\left(U_{-0}\right) = \left\{\bar{\bar{0}} = 0;\ \bar{\bar{x}} = x\right\}$; $H\left(U_{-1}\right) = \left\{\bar{\bar{1}} = 1;\ \bar{\bar{x}} = x\right\}$; $H\left(U_{-10}\right) = \left\{\bar{\bar{1}} = 1;\ \bar{\bar{0}} = 0;\ \bar{\bar{x}} = x\right\}$.

3. Булевий куб. Розглянемо клас одноносієвих алгебр M, $U = \langle A,\, \Omega \rangle \in M$, якщо $A = \{0, 1\}$, $\Omega \subset \{\neg,\, \vee,\, \wedge\}$. У клас M входять вісім алгебр, які утворюють сигнатурний куб. Цей куб називається булевим, так як максимальним елементом цього кубу є булева алгебра із сигнатурою $\Omega = \{\neg,\, \vee,\, \wedge\}$.

Тривіальна алгебра $U_0 = \langle A,\, \Omega_0 \rangle$, де $\Omega_0 = \emptyset$. У цій алгебрі множина формул має вигляд $F_i = x_i$, тобто повна система тотожностей $\{x_i = x_i\}$.

Алгебра заперечення $U_1 = \langle A,\, \Omega_1 \rangle$, де $\Omega_1 = \{\bar{x}\}$. Формули цієї алгебри мають вигляд $\left.\begin{matrix} - \\ - \\ - \\ x \end{matrix}\right\}k$. Тотожність $\overline{\overline{x}} = x$ дає можливість отримати формули двох видів: $x = \left.\begin{matrix} - \\ - \\ - \\ \overline{\overline{x}} \end{matrix}\right\}2k$, $x = \left.\begin{matrix} - \\ - \\ - \\ \overline{x} \end{matrix}\right\}2k+1$. Нехай $F_1\left(x_i\right) = F_2\left(x_i\right)$, застосовуючи $\overline{\overline{x}} = x$, отримаємо формули $\widehat{F_1}\ \left(x_i\right) = \widehat{F_2}\ \left(x_i\right)$, які мають вигляд x_i і $\overline{x_i}$. Отже, повна система тотожностей цієї алгебри: $\{x_i = x_i;\ \overline{\overline{x}} = x\}$.

Алгебра диз'юнкції $U_2 = \langle A,\, \Omega_2 \rangle$, де $\Omega_2 = \{\vee\}$. Запишемо тотожності цієї алгебри:

$$\begin{gathered} 1.\ x_1 \vee x_1 = x_1; \\ 2.\ x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1; \\ 3.\ (x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)\,. \end{gathered} \tag{1}$$

Тотожність $(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)$ дає можливість опустити всі дужки, формула $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$− лексикографічно впорядкувати доданки в формулах F_1 і F_2, а тотожність $x_1 \vee x_1 = x_1$ дозволяє опустити однакові доданки. Якщо $F_1 = F_2$, то $\widehat{F}_1 = \widehat{F}_2$ лексикографічно співпадають. Тому має місце твердження.

Твердження 1. *Система тотожностей* (1) *є повною в алгебрі* U_2.

Алгебра кон'юнкції $U_3 = \langle A, \Omega_3 \rangle$, де $\Omega_3 = \{\wedge\}$. Наведемо тотожності алгебри U_3:

$$\begin{gathered} 1.\ x_1 \wedge x_1 = x_1; \\ 2.\ x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1; \\ 3.\ (x_1 \wedge x_2) \wedge x_3 = x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3)\,. \end{gathered} \tag{2}$$

Формула $(x_1 \wedge x_2) \wedge x_3 = x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3)$ дає можливість опустити всі дужки, рівність $x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1$ – лексикографічно впорядкувати множники в формулах F_1 і F_2, а тотожність $x_1 \wedge x_1 = x_1$ дозволяє опустити однакові множники. Аналогічно алгебрі U_2, якщо $F_1 = F_2$, то $\widehat{F}_1 = \widehat{F}_2$ лексикографічно співпадають. Тому має місце твердження.

Твердження 2. *Система тотожностей* (2) *є повною в алгебрі* U_3.

Алгебра $U_4 = \langle A, \Omega_4 \rangle$, де $\Omega_4 = \{\neg, \vee\}$. Формулами в цій алгебрі є:

1) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – формули;
2) $\overline{x_i}$ *і* $(x_i \vee x_j)$ – формули;
3) якщо F_1 і F_2 формули, то $\overline{F_1}$, $(F_1 \vee F_2)$ – формули.

Для алгебри U_4 знайдена повна система тотожностей:

1) $x \vee x = x$;
2) $x \vee y = y \vee x$;
3) $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$;
4) $\overline{\overline{x}} = x$;
5) $x \vee \overline{x} = y \vee \overline{y}$;
6) $\overline{x \vee \overline{y \vee z}} = \overline{x \vee \overline{y}} \vee \overline{x \vee \overline{z}}$;
7) $\overline{x \vee y} = \overline{x \vee y \vee z} \vee \overline{x \vee y \vee \overline{z}}$;
8) $\overline{y \vee x \vee \bar{x}} = \overline{x \vee \bar{x}}$;
9) $y \vee \overline{x \vee \bar{x}} = y$;
10) $x = \overline{\overline{x} \vee y} \vee \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$.

Означення 2. *Формули вигляду* $\overline{\tilde{x}_{i_1} \vee \tilde{x}_{i_2} \vee \ldots \vee \tilde{x}_{i_k}}$, *де* $\tilde{x}_{i_k} = x_{i_k}$ *або* $\tilde{x}_{i_k} = \bar{x}_{i_k}$ *називаються елементарними доданками. Елементарні доданки, які містять в своєму складі всі змінні формули* F, *називаються повними.*

Алгоритм побудови досконалої диз'юнктивної нормальної форми алгебри U_4:

1) Використовуючи тотожності 4, 6 добиваємось того, що у формулі F над кожною диз'юнкцією заперечення зустрічається не більше одного разу.
2) Тотожність 7 дає можливість зробити всі елементарні доданки повними.
3) Тотожності 8 і 9 поглинають формули типу y або $x \vee \bar{x}$, крім випадку коли $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тотожно дорівнює одиниці.
4) Тотожність 1 поглинає однакові доданки, а тотожності 2, 3 лексикографічно впорядковують змінні в елементарних доданках.

Твердження 3. *Повні елементарні доданки приймають значення 1 тільки на одному наборі змінних.*

Твердження 4. *Два повні елементарні доданки співпадають тоді і тільки тоді, коли вони лексикографічно співпадають в лексикографічно-впорядкованих доданках.*

Диз'юнкція повних елементарних доданків є аналогом досконалої диз'юнктивної нормальної форми.

Алгебра $U_5 = \langle A, \Omega_5 \rangle$, де $\Omega_5 = \{\neg, \wedge\}$. Формулами в алгебрі U_5 є:

1) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – формули;
2) $\overline{x_i}$ *і* $(x_i \wedge x_j)$ – формули;
3) якщо F_1 і F_2 формули, то $\overline{F_1}$, $(F_1 \wedge F_2)$ – формули.

Для алгебри U_5 побудована повна система тотожностей:

1) $x \wedge x = x$;
2) $x \wedge y = y \wedge x$;
3) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$;
4) $\overline{\overline{x}} = x$;
5) $x \wedge \overline{x} = y \wedge \overline{y}$;
6) $\overline{x \wedge \overline{y \wedge z}} = \overline{x \wedge \overline{y}} \wedge \overline{x \wedge \overline{z}}$;

7) $\overline{x \wedge y} = \overline{x \wedge y \wedge z} \wedge \overline{x \wedge y \wedge \overline{z}}$;
8) $\overline{y \wedge x \wedge \overline{x}} = \overline{x \wedge \overline{x}}$;
9) $y \wedge \overline{x \wedge \overline{x}} = y$;
10) $x = \overline{\overline{x} \wedge y} \wedge \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}$.

Означення 3. *Формули вигляду* $\overline{\tilde{x}_{i_1} \wedge \tilde{x}_{i_2} \wedge ... \wedge \tilde{x}_{i_k}}$, *де* $\tilde{x}_{i_k} = x_{i_k}$ *або* $\tilde{x}_{i_k} = \overline{x}_{i_k}$ *називаються елементарними множниками. Елементарні множники, які містять в своєму складі всі змінні формули* F, *називаються повними.*

Алгоритм побудови досконалої диз'юнктивної нормальної форми алгебри U_5:
1) Використовуючи тотожності 4, 6 добиваємось того, що у формулі F над кожною кон'юнкцією заперечення зустрічається не більше одного разу.
2) Тотожність 7 дає можливість зробити всі елементарні множники повними.
3) Тотожності 8 і 9 поглинають формули типу y або $x \wedge \bar{x}$, крім випадку коли $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ тотожно дорівнює нулю.
4) Тотожність 1 поглинає однакові множники, а тотожності 2, 3 лексикографічно впорядковують змінні в елементарних множниках.

Твердження 5. *Повні елементарні множники приймають значення 0 тільки на одному наборі змінних.*

Твердження 6. *Два повні елементарні множники співпадають тоді і тільки тоді коли вони лексикографічно співпадають в лексикографічно-впорядкованих множниках.*

Кон'юнкція повних елементарних доданків є аналогом досконалої кон'юнктивної нормальної форми.

Алгебра $U_6 = \langle A, \Omega_6 \rangle$, де $\Omega_6 = \{\vee, \wedge\}$. Для цієї алгебри також знайдена повна система тотожностей:
1) $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$;
2) $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$;
3) $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$, $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$;
4) $(x \vee y) \wedge z = x \wedge z \vee y \wedge z$, $x \vee y \wedge z = (x \vee y)(x \vee z)$;
5) $x \vee x \wedge y = x$, $x(x \vee y) = x$.

Теорема 1. *Кожна формула алгебри* U_6 *може бути представлена єдиною ДНФ.*

Доведення. Нехай $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ – формула алгебри U_6. Кожну формулу $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ можна подати у вигляді: $F_1(x_1, x_2, ..., x_n) = k_1 \vee k_2 \vee ... \vee k_n$, де k_i, $i = \overline{1,\ n}$ – елементарні кон'юнкції, побудовані із змінних $x_1, x_2, ..., x_n$. Доведення теореми проведемо методом від супротивного. Припустимо, що формулу $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ алгебри U_6 можна подати у вигляді двох ДНФ: $F_1(x_1, x_2, ..., x_n) = k_1 \vee k_2 \vee ... \vee k_n$ або $F_2(x_1, x_2, ..., x_n) = k^*{}_1 \vee k^*{}_2 \vee ... \vee k^*{}_m$, де k_i^*, $i = \overline{1,\ m}$ також елементарні кон'юнкції, побудовані із змінних $x_1, x_2, ..., x_n$. Зауважимо, що усі елементарні кон'юнкції k_i, $i = \overline{1,\ n}$, задовольняють умову, що жодна з них не є власною частиною іншої. Аналогічна умова висувається для усіх елементарних кон'юнкцій k_i^*, $i = \overline{1,\ m}$.

Прирівняємо праві частини двох формул:

$$k_1 \vee k_2 \vee \ldots \vee k_n = k^*{}_1 \vee k^*{}_2 \vee \ldots \vee k^*{}_m. \tag{3}$$

Розглянемо значення кон'юнкта $k_i = x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_l}$ на наборах $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Цей кон'юнкт прийме значення 1 тільки на одному наборі $\tilde{\alpha}_i = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ у якому $\alpha_{i_k} = 1$, $k = 1, 2, ..., l$, а усі інші компоненти дорівнюють нулеві. На наборі $\tilde{\alpha}_i$ тільки кон'юнкт k_i приймає значення рівне 1, а усі інші кон'юнкти $k_1, k_2, ..., k_{i-1}, k_{i+1}, ..., k_n$ на цьому наборі приймають значення 0. Оскільки виконується рівність (3), то серед доданків k_i^*, $i = \overline{1,\ m}$ існує кон'юнкт k_j^* такий, що $k_j^* \subset k_i$. Для кон'юнкта k_j^*, аналогічно описаним вище міркуванням, будуємо набір $\tilde{\alpha}_j^* = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ на якому тільки він приймає значення 1, а усі інші приймають значення 0. Тоді з рівності (3) отримаємо, що серед кон'юнктів $k_1, k_2, ..., k_n$ існує такий кон'юнкт k_t, який є власною частиною k_j^*, а звідси випливає, що k_t є власною частиною k_i. Отримали протиріччя, яке доводить теорему.

Алгебра $U_7 = \langle A,\, \Omega_7 \rangle$, де $\Omega_7 = \{\vee,\, \wedge,\, \neg\}$. Повна система тотожностей цієї алгебри включає повну систему тотожностей алгебри U_6, до якої додаються тотожності:

1) $\bar{\bar{x}} = x$;
2) $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$, $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$.

З проведених вище досліджень випливає справедливість теорем.

Теорема 2. *Екваціональна решітка класу M, ізоморфна сигнатурній решітці.*

Теорема 3. *T-базис класу M складається з восьми алгебр $U_0 - U_7$, які утворюють екваціональну решітку.*

4. Куб Жегалкіна. Розглянемо клас односієвих алгебр M, $U = \langle A,\, \Omega \rangle \in M$, якщо $A = \{0, 1\}$; $\Omega \subset \{1,\, \otimes,\, \oplus\}$, де $x \otimes y$, $x \oplus y$ – відповідно операції множення та додавання за модулем два. На рисунку 3 зображено сигнатурний куб Жегалкіна.

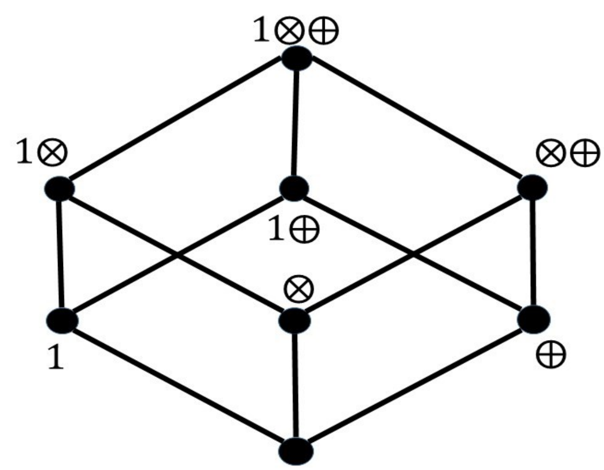

Рис. 3. Сигнатурний куб Жегалкіна.

Алгебри U_0 (тривіальна алгебра) та U_3 (алгебра кон'юнкції) співпадають з алгебрами булевого кубу. Знайдемо повні системи тотожностей усіх інших алгебр кубу Жегалкіна.

Модульна алгебра $U_1 = \langle A, \oplus \rangle$**.** Запишемо повну систему тотожностей цієї алгебри:

1) $x \oplus x = y \oplus y$;
2) $x \oplus y = y \oplus x$;
3) $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$;
4) $y \oplus x \oplus x = y$.

Тотожності 1 і 4 опускають однакові доданки, якщо їхня кількість парна і залишають один – якщо непарна. Тотожності 2 і 3 виконують лексикографічне впорядкування.

Нульарна алгебра $U_2 = \langle A, 1 \rangle$**.** Повна система тотожностей: $\{x=x, 1=1\}$.

Алгебра $U_4 = \langle A, \oplus, 1 \rangle$**.** Наведемо повну систему тотожностей цієї алгебри:

1) $\tilde{x} \oplus \tilde{y} = \tilde{y} \oplus \tilde{x}$;
2) $(\tilde{x} \oplus \tilde{y}) \oplus \tilde{z} = \tilde{x} \oplus (\tilde{y} \oplus \tilde{z})$;
3) $x \oplus x = 1 \oplus 1$;
4) $x \oplus 1 \oplus 1 = x$.

Тотожність 4 визначає, що формули алгебри U_4 можуть мати не більше одного доданка рівного одиниці. Довільну формулу F можемо звести до вигляду $\hat{F} = 1 \oplus F'$ або $\hat{F} = F'$, де F' – формула алгебри U_2.

Алгебра $U_5 = \langle A, \oplus, \otimes \rangle$**.** Повна система тотожностей цієї алгебри включає в себе повні системи тотожностей алгебр U_1, U_3 і тотожність$(x \oplus y) \wedge z = x \wedge z \oplus y \wedge z$. Ця тотожність дає можливість розкривати всі дужки. Тотожності алгебри U_3 дають можливість впорядкувати множини, а тотожності алгебри U_1 доданки.

Алгебра $U_6 = \langle A, \otimes, 1 \rangle$**.** Знайдена повна система тотожностей цієї алгебри має вигляд:

1) $x \otimes x = x$;
2) $x \otimes y = y \otimes x$;
3) $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$;
4) $x \otimes 1 = x$.

На основі цих тотожностей довільну формулу $F(x_1, x_2, ..., x_n, 1)$ можна привести до вигляду $\hat{F} = 1$ або $\hat{F} = x_1 x_2 ... x_n$.

Алгебра Жегалкіна $U_7 = \langle A, \oplus, \otimes, 1 \rangle$**.** Повна система тотожностей алгебри U_7 є об'єднанням систем тотожностей алгебр U_4, U_5, U_6. За допомогою цих тотожностей будь-яку формулу алгебри Жегалкіна однозначно можна перетворити у поліном Жегалкіна.

Список використаної літератури

1. Мич І. А., Ніколенко В. В. Повні системи тотожностей в одному класі алгебр. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. «Математика і інформатика».* 2017. Вип. 1 (30). С. 79-86. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.1(30).79-86.
2. Мич І. А., Ніколенко В. В. Досконалі диз'юнктивні нормальні форми в одному класі алгебр. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. «Математика і інформатика».* 2017. Вип. 2 (31). С. 123-128. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.2(31).123-128
3. Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О.В. Досконалі диз'юнктивні нормальні форми алгебри. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. «Математика і інформатика».* 2018. Вип. 1 (32). С. 124-129. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.1(32).124-129
4. Мич І. А., Ніколенко В. В. Еквацональна решітка одного класу алгебр. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. «Математика і інформатика».* 2018. Вип. 2(33). С. 109-113. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2(33).109-113

5. Варцаба О.В., Мич І. А., Ніколенко В. В. Сигнатурна решітка одного класу алгебр. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. «Математика і інформатика»*. 2018. Вип. 2(33). С. 41-44. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2(33).41-44.
6. Мальцев А. И. Алгебраические системы. Москва: Наука, 1970. 392 с.
7. Линдон Р. К. Тождества в конечных алгебрах. *Кибернетический сборник*. 1960. №.2. С. 246-248.

Vartsaba O. V., Mych I. A., Nykolenko V. V., Dynys V. S. Equational investigation of zero algebras, algebras of a boolean cube and a Zhegalkin cube.

In this paper, investigation of Boolean universal algebras, the signature of which includes zero, unary and part of binary Boolean operations is conducted. Equational and signature lattices of the class of trivial algebras are constructed. Lattice elements are represented as a square.

The class of universal Boolean algebras consists of 8 algebras. The signature of these algebras contains operations of conjunction, disjunction, and negation. They form signature and equational cubes.

Complete systems of identities have been found for trivial algebras and all algebras of a Boolean cube. The completeness of identity systems is proved by algorithms that allow to bring the formulas of the corresponding algebras to standard canonical forms.

The Zhegalkin cube consists of 8 algebras, the signature of which includes element 1, arithmetic operation of addition mod 2 and arithmetic operation of multiplication. An equational lattice of this class have been constructed for the algebras of the Zhegalkin cube.

Keywords: strong law of large numbers, random signed measure, renewal process, uniform strong law of large numbers, random processes indexed by sets.

References

1. Mych, I. A., & Nykolenko, V. V. (2017). Complete identity systems in a class of algebras. Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics, 1(30), 79-86. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.1(30).79-86.
2. Mych, I. A., & Nykolenko, V. V. (2017). Perfect disjunctive normal forms in a class of algebras. Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. of Mathematics and Informatics, 2(31), 123-128. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.2(31).123-128
3. Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Vartsaba, O. V. (2018). Perfect disjunctive normal forms of algebra U_2. Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics, 1(32), 124-129. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.1(32).124-129
4. Mych, I. A., & Nykolenko, V. V. (2018). Equivalent lattice of one class of algebra. Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics, 2(33), 109-113. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2(33).109-113.
5. Vartsaba, O.V., Mych, I. A., & Nykolenko, V. V. (2018). Lattice signature of one class of algebra. Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics, 2(33), 41-44. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2(33).41-44.
6. Maltcev, A. Y. (1970). Algebraicheskie sistemy. Moskva: Nauka [in Russian].
7. Lindon, R. K. (1960). Tozhdestva v konechnyh algebrah. *Kiberneticheskij sbornik*. №2, 246-248.

Одержано 02.10.2020