УДК 517.6
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).85-93

І. Ю. Раєвська[1], М. Ю. Раєвська[2]

[1] Інститут математики НАН України,
старший науковий співробітник відділу алгебри і топології,
кандидат фізико-математичних наук
raeirina@imath.kiev.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6764-480X

[2] Інститут математики НАН України,
старший науковий співробітник відділу алгебри і топології,
кандидат фізико-математичних наук
raemarina@imath.kiev.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6135-7818

ЛОКАЛЬНІ МАЙЖЕ-КІЛЬЦЯ НА ЕЛЕМЕНТАРНИХ АБЕЛЕВИХ ГРУПАХ ПОРЯДКУ p^3

Майже-кільця виникають природним чином при вивченні систем нелінійних відображень і вивчаються протягом багатьох десятиліть. Основні визначення та багато результатів стосовно майже-кілець можна знайти, наприклад, у [G. Pilz. Near-rings. The theory and its applications. North Holland, Amsterdam, 1977].

Майже-кільця — це узагальнення кілець в тому сенсі, що додавання не обов'язково є комутативним і передбачається лише один дистрибутивний закон. Очевидно, що кожне асоціативне кільце є майже-кільцем, і кожна група є адитивною групою майже-кільця, але не обов'язково майже-кільця з одиницею. Питання про те, яка група може бути адитивною групою майже-кільця з одиницею, далеке від вирішення.

Майже-кільце R з одиницею називається локальним, якщо підгрупа усіх необоротних елементів із R утворює підгрупу адитивної групи R. Дослідження локальних майже-кілець було ініційовано Мексоном (1968), який визначив ряд їх основних властивостей і, зокрема, довів, що адитивна група нуль-симетричного локального майже-кільця є p-групою. Мексон (1968) описав усі неізоморфні нуль-симетричні локальні майже-кільця з нециклічною адитивною групою порядку p^2, які не є майже-полями. Мексон у 1968 р. також показав, що кожна нециклічна абелева p-група порядку $p^n > 4$ є адитивною групою нуль-симетричного локального майже-кільця, яке не є кільцем.

Список усіх локальних майже-кілець порядку не більше 31 можна отримати з пакету SONATA (https://gap-packages.github.io/sonata/) системи комп'ютерної алгебри GAP (https://www.gap-system.org/). Однак класифікація майже-кілець вищих порядків вимагає набагато складніших обчислень. Для локальних майже-кілець вони були реалізовані в новому GAP-пакеті LocalNR (https://gap-packages.github.io/LocalNR). Поточна версія (ще не розповсюджена за допомогою GAP) містить 37599 локальних майже-кілець порядку не більше 361, за винятком порядків 128, 256 і деяких порядків 32, 64 і 243.

Ця робота присвячена дослідженню локальних майже-кілець з елементарними абелевими адитивними групами порядку p^3.

Ключові слова: майже-кільце, локальне майже-кільце, елементарна абелева група.

1. Вступ. Вивчення локальних майже-кілець вперше було ініційоване в [1] та встановлено, що адитивна група скінченного нуль-симетричного локального майже-кільця є p-групою. Мексон [2] показав, що з точністю до ізоморфізму існує $p-1$ локальне майже-кільце з елементарною абелевою адитивною групою порядку p^2, в яких підгрупи необоротних елементів мають порядок p, тобто тих майже-кілець, які не є майже-полями. Разом із фундаментальною роботою Цассенхауза про майже-поля й роботою Клея та Малоне [5], ця стаття дає повний опис усіх нуль-симетричних локальних майже-кілець порядку p^2. Крім того, в останній статті встановлено, що з точністю до ізоморфізму існує єдине майже-кільце з одиницею, адитивна група якого циклічна, і яке фактично є комутативним кільцем.

Далі, Мексоном [4] було доведено, що кожна нециклічна скінченна абелева p-група порядку, більшого за 4, є адитивною групою деякого нуль-симетричного локального майже-кільця, що не є кільцем. Мексоном сформульовано проблему пошуку єдиного набору відображень, що визначають всі неізоморфні локальні майже-кільця на цих групах. Ця проблема й досі залишається відкритою, як і проблема визначення кількості неізоморфних локальних майже-кілець на даній групі.

Ця робота присвячена дослідженню локальних майже-кілець з елементарними абелевими адитивними групами порядку p^3.

2. Попередні результати. Дамо основні означення.

Означення 1. *Непорожня множина R з двома бінарними операціями "$+$" та "$\cdot$" називається майже-кільцем, якщо:*
1) $(R,+)$ *— група з нейтральним елементом* 0*,*
2) $(R,\cdot)$ *— напівгрупа,*
3) $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ *для всіх* x, y, $z\in R$.
Таке майже-кільце називається лівим майже-кільцем. Якщо ж аксіому 3) замінити аксіомою $(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$ для всіх x, y, $z\in R$, то отримаємо праве майже-кільце.

Група $(R,+)$ позначається через R^+ та називається *адитивною групою*, а її нейтральний елемент 0 — *нулем* майже-кільця R. З аксіоми 3 випливає, що $r\cdot 0=r\cdot(0+0)=r\cdot 0+r\cdot 0$, звідки отримуємо $r\cdot 0=0$. З цієї ж аксіоми випливає, що $r\cdot(-s)=-(r\cdot s)$. Майже-кільце R називається *нуль-симетричним*, якщо також $0\cdot x=0$.

Майже-кільце R, в якому напівгрупа $(R,\cdot)$ є моноїдом з одиничним елементом i, називається *майже-кільцем з одиницею i*. Група всіх оборотних елементів цього моноїда позначається через R^* та називається *мультиплікативною групою* майже-кільця R, а її доповнення $R\backslash R^*$ — множиною необоротних елементів із R.

Означення 2. *Майже-кільце R з одиницею називається локальним, якщо множина L всіх необоротних елементів із R утворює підгрупу адитивної групи R^+. В цьому випадку L будемо називати підгрупою необоротних елементів майже-кільця R.*

Наступний результат визначає структурну особливість скінченних локальних майже-кілець.

Лема 1. *Кожне нетривіальне підмайже-кільце з одиницею скінченного локального майже-кільця є локальним майже-кільцем.*

Доведення. Нехай R — локальне майже-кільце порядку p^n та L — підгрупа необоротних елементів R^+. Нехай R_1 — нетривіальне підмайже-кільце з одиницею в R та L_1 — напівгрупа необоротних елементів з R_1. Оскільки L_1 є піднапівгрупою L, то L_1 є підгрупою в L, а отже, підгрупою в ${R_1}^+$. Звідси R_1 — локальне майже-кільце. Твердження доведено. □

Скінченні локальні майже-кільця з циклічною підгрупою необоротних елементів описані в [7, теорема 1].

Теорема 1. *Нехай R — локальне майже-кільце порядку p^n з $n > 1$, підгрупа L якого циклічна та нетривіальна. Тоді його адитивна група R^+ або сама циклічна, або є елементарною абелевою групою порядку p^2. В першому випадку R є комутативним локальним кільцем, ізоморфним кільцю лишків $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ з $n \geq 2$, а в другому — існує p попарно неізоморфних таких майже-кілець R з $|L| = p$, із яких $p-1$ є нуль-симетричними, та мультиплікативні групи R^* яких ізоморфні напівпрямому добутку двох циклічних підгруп порядків p та $p-1$.*

Як безпосередній наслідок теореми 1 маємо наступний результат.

Наслідок 1. *Нехай R є локальним майже-кільцем порядку p^3, яке не є ізоморфним $\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$ або не є майже-полем. Тоді підгрупа необоротних елементів L є елементарною абелевою групою порядку p^2.*

Наступне твердження містить класифікацію абелевих груп порядку p^3 (див. [6]).

Лема 2. *Нехай G — абелева група порядку p^3. Далі наведено визначальні співвідношення всіх неізоморфних груп G.*

1) $a^{p^3} = 1$.

2) $a^{p^2} = 1$, $b^p = 1$, $ab = ba$.

3) $a^p = b^p = c^p = 1$, $ab = ba$, $ac = ca$, $cb = bc$.

В статті [5] майже-кільця з одиницею, а тому і локальні, з циклічною адитивною групою повністю вивчені. В статті розглянемо елементарні абелеві групи порядку p^3 у якості адитивних груп локальних майже-кілець.

Нехай $G(p,p,p)$ — група зі співвідношеннями 3) з леми 2.

3. Локальні майже-кільця з елементарними абелевими адитивними групами порядку p^3.

Нехай R — майже-кільце з одиницею, адитивна група R^+ якого ізоморфна групі $G(p,p,p)$. Тоді $R^+ = \langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle$ для деяких a, b, $c \in R$, що задовольняють співвідношення $ap = bp = cp = 0$, $a + b = b + a$, $a + c = c + a$, $c + b = b + c$. Зокрема, кожний елемент $x \in R$ єдиним чином записується у вигляді $x = ax_1 + bx_2 + cx_3$ з коефіцієнтами $0 \leq x_1 < p$, $0 \leq x_2 < p$ та $0 \leq x_3 < p$.

Без втрати загальності, можна припустити, що a є одиницею в R, тобто $ax = xa = x$ для кожного $x \in R$. Більш того, для кожного $x \in R$ існують такі коефіцієнти $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\lambda(x)$, $\mu(x)$ та $\nu(x)$, що $xb = a\alpha(x) + b\beta(x) + c\gamma(x)$ та $xc = a\lambda(x) + b\mu(x) + c\nu(x)$. Зрозуміло, що вони єдиним чином визначені за модулем p, тому деякі відображення $\alpha : R \to Z_p$, $\beta : R \to Z_p$, $\gamma : R \to Z_p$, $\lambda : R \to Z_p$, $\mu : R \to Z_p$, $\nu : R \to Z_p$.

Теорема 2. *Якщо x, $y = ay_1 + by_2 + cy_3 \in R$, то*

$$xy = a(x_1y_1 + \alpha(x)y_2 + \lambda(x)y_3) + b(x_2y_1 + \beta(x)y_2 + \mu(x)y_3) + c(x_3y_1 + \gamma(x)y_2 + \nu(x)y_3),$$

причому виконуються наступні твердження:

(0) *$\alpha(0) \equiv 0 \pmod p$, $\beta(0) \equiv 0 \pmod p$, $\gamma(0) \equiv 0 \pmod p$, $\lambda(0) \equiv 0 \pmod p$, $\mu(0) \equiv 0 \pmod p$ та $\nu(0) \equiv 0 \pmod p$ тоді і тільки тоді, коли майже-кільце R є нуль-симетричним*;

(1) $\alpha(a)=0,\ \beta(a)=1,\ \gamma(a)=0,\ \lambda(a)=0,\ \mu(a)=0,\ \nu(a)=1\ (\mod p\ )$;
(2) $\alpha(xy)\equiv x_1\alpha(y)+\alpha(x)\beta(y)+\lambda(x)\gamma(y)\ (\mod p\ )$;
(3) $\beta(xy)\equiv x_2\alpha(y)+\beta(x)\beta(y)+\mu(x)\gamma(y)\ (\mod p\ )$;
(4) $\gamma(xy)\equiv x_3\alpha(y)+\gamma(x)\beta(y)+\nu(x)\gamma(y)\ (\mod p\ )$;
(5) $\lambda(xy)\equiv x_1\lambda(y)+\alpha(x)\mu(y)+\lambda(x)\nu(y)\ (\mod p\ )$;
(6) $\mu(xy)\equiv x_2\lambda(y)+\beta(x)\mu(y)+\mu(x)\nu(y)\ (\mod p\ )$;
(7) $\nu(xy)\equiv x_3\lambda(y)+\gamma(x)\mu(y)+\nu(x)\nu(y)\ (\mod p\ )$.

Доведення.

Оскільки $0\cdot a=a\cdot 0=0$, то R є нуль-симетричним майже-кільцем, якщо і тільки якщо $0=0\cdot b=a\alpha(0)+b\beta(0)+c\gamma(0)$ або $\alpha(0)=\beta(0)=\gamma(0)=0$ та $0=0\cdot c=a\lambda(0)+b\mu(0)+c\nu(0)$ або $\lambda(0)=\mu(0)=\nu(0)=0$. Більш того, $b=ab=a\alpha(a)+b\beta(a)+c\gamma(a)$ та $c=ac=a\lambda(a)+b\mu(a)+c\nu(a)$, маємо $\alpha(a)=0$, $\beta(a)=1$, $\gamma(a)=0$, $\lambda(a)=0$, $\mu(a)=0$, $\nu(a)=1$. Тому твердження (0) та (1) мають місце.

Користуючись лівою дистрибутивністю

$$xy=(xa)y_1+(xb)y_2+(xc)y_3=(ax_1+bx_2+cx_3)y_1+(a\alpha(x)+b\beta(x)+c\gamma(x))y_2+$$
$$+(a\lambda(x)+b\mu(x)+c\nu(x))y_3.$$

Далі маємо

$$(ax_1+bx_2+cx_3)y_1=ax_1y_1+bx_2y_1+cx_3y_1,$$
$$(a\alpha(x)+b\beta(x)+c\gamma(x))y_2=a\alpha(x)y_2+b\beta(x)y_2+c\gamma(x)y_2$$

та

$$(a\lambda(x)+b\mu(x)+c\nu(x))y_3=a\lambda(x)y_3+b\mu(x)y_3+c\nu(x)y_3.$$

Тому, користуючись також комутативністю додавання,

$$xy=a(x_1y_1+\alpha(x)y_2+\lambda(x)y_3)+b(x_2y_1+\beta(x)y_2+\mu(x)y_3)+$$
$$+c(x_3y_1+\gamma(x)y_2+\nu(x)y_3).$$

З асоціативності множення маємо $(xy)b=x(yb)$. Оскільки

$$(xy)b=a\alpha(xy)+b\beta(xy)+c\gamma(xy)$$

та

$$x(yb)=a(x_1\alpha(y)+\alpha(x)\beta(y)+\lambda(x)\gamma(y))+b(x_2\alpha(y)+\beta(x)\beta(y)+\mu(x)\gamma(y))+$$
$$+c(x_3\alpha(y)+\gamma(x)\beta(y)+\nu(x)\gamma(y)),$$

то прирівнюючи відповідні коефіцієнти отримаємо рівності (2)–(4).

Аналогічно з асоціативності множення маємо $(xy)c=x(yc)$. Оскільки

$$(xy)c=a\lambda(xy)+b\mu(xy)+c\nu(xy)$$

та

$$x(yc)=a(x_1\lambda(y)+\alpha(x)\mu(y)+\lambda(x)\nu(y))+b(x_2\lambda(y)+\beta(x)\mu(y)+\mu(x)\nu(y))+$$
$$+c(x_3\lambda(y)+\gamma(x)\mu(y)+\nu(x)\nu(y)),$$

то прирівнюючи відповідні коефіцієнти отримаємо рівності (5)–(7). □

Нехай R — локальне майже-кільце з адитивною групою R^+, що ізоморфна групі $G(p,p,p)$, і не є майже-полем.

Зауважимо, що за наслідком 1 підгрупа необоротних елементів L адитивної групи R^+ локального майже-кільця R є елементарною абелевою порядку p^2, тобто $|R:L| = p$.

Теорема 3. *Нехай R — локальне майже-кільце з адитивною групою R^+, що ізоморфна групі $G(p,p,p)$, і не є майже-полем. Тоді $R^+ = \langle a\rangle + \langle b\rangle + \langle c\rangle$ для деяких a, b, $c \in R$, що задовольняють співвідношення $ap = bp = cp = 0$, $a+b = b+a$, $a+c = c+a$, $c+b = b+c$. Якщо a є одиницею в R, то $L = \langle b\rangle + \langle c\rangle$ та $R^* = \{ax_1 + bx_2 + cx_3 \mid x_1 \not\equiv 0 \ (\bmod p\ )\}$.*

Доведення. Якщо a є одиницею в R, то b та $c \in L$ за наслідком 1. Тоді $L = \langle b\rangle + \langle c\rangle$. Оскільки $R^* = R\backslash L$, та елемент $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 \in R^*$, якщо і тільки якщо, $x_1 \not\equiv 0 \ (\bmod p\ )$. □

Застосовуючи теорему 3, отримаємо наступну формулу множення для будь-яких двох елементів $x = ax_1 + bx_2 + cx_3$ та $y = ay_1 + by_2 + cy_3$ локального майже-кільця R.

Наслідок 2. *Якщо x, $y \in R$, $xb = b\beta(x) + c\gamma(x)$ та $xc = b\mu(x) + c\nu(x)$, то*

$$xy = ax_1y_1 + b(x_2y_1 + \beta(x)y_2 + \mu(x)y_3) + c(x_3y_1 + \gamma(x)y_2 + \nu(x)y_3),$$

причому для відображень $\beta\colon R \to \mathbb{Z}_p$, $\gamma\colon R \to \mathbb{Z}_p$, $\mu\colon R \to \mathbb{Z}_p$ та $\nu\colon R \to \mathbb{Z}_p$ виконуються наступні твердження:

(0) *$\beta(0) \equiv 0 \ (\bmod p)$, $\gamma(0) \equiv 0 \ (\bmod p)$, $\mu(0) \equiv 0 \ (\bmod p)$ та $\nu(0) \equiv 0 \ (\bmod p)$ тоді і тільки тоді, коли майже-кільце R є нуль-симетричним;*
(1) *$\beta(a) = 1$, $\gamma(a) = 0$, $\mu(a) = 0$, $\nu(a) = 1 \ (\bmod p\ )$;*
(2) *якщо $\beta(x) \equiv 0 \ (\bmod p)$ та $\mu(x) \equiv 0 \ (\bmod p)$, то $x_1 \equiv 0 \ (\bmod p)$;*
(3) *$\beta(xy) \equiv \beta(x)\beta(y) + \mu(x)\gamma(y) \ (\bmod p\ )$;*
(4) *$\gamma(xy) \equiv \gamma(x)\beta(y) + \nu(x)\gamma(y) \ (\bmod p\ )$;*
(6) *$\mu(xy) \equiv \beta(x)\mu(y) + \mu(x)\nu(y) \ (\bmod p\ )$;*
(7) *$\nu(xy) \equiv \gamma(x)\mu(y) + \nu(x)\nu(y) \ (\bmod p\ )$.*

Очевидно, що функції $\beta(x)$ та $\mu(x)$ не залежать від коефіцієнта x_3.

Маємо наступне твердження.

Лема 3. *Підгрупа $< c >$ є ідеалом в локальному майже-кільці R.*

Доведення.

Нехай $x = ax_1+bx_2+cx_3$, $y = ay_1+by_2+cy_3 \in R$, $z = cz_3 \in < c >$. Перевіримо, чи буде $< c >$ ідеалом в R, тобто $(z+x)y - xy \in < c >$. Для цього скористаємося формулою множення елементів в R з наслідку 2,

$$xy = ax_1y_1 + b(x_2y_1 + \beta(x)y_2 + \mu(x)y_3) + c(x_3y_1 + \gamma(x)y_2 + \nu(x)y_3).$$

Маємо

$$(z+x)y - xy = (cz_3+ax_1+bx_2+cx_3)(ay_1+by_2+cy_3) - (ax_1+bx_2+cx_3)(ay_1+by_2+cy_3) =$$

$$= (ax_1 + bx_2 + c(x_3 + z_3))(ay_1 + by_2 + cy_3) - (ax_1 + bx_2 + cx_3)(ay_1 + by_2 + cy_3) =$$

$$= ax_1y_1 + b(x_2y_1 + \beta(z+x)y_2 + \mu(z+x)y_3) + c(x_3y_1 + \gamma(z+x)y_2 + \nu(z+x)y_3) -$$
$$-ax_1y_1 - b(x_2y_1 + \beta(x)y_2 + \mu(x)y_3) - c(x_3y_1 + \gamma(x)y_2 + \nu(x)y_3) =$$
$$= c(y_2(\gamma(z+x) - \gamma(x)) + y_3(\nu(z+x) - \nu(x))) \in < c > .$$

Отже, $< c >$ є ідеалом в R. □

Далі, наведемо приклади майже-кільцевого множення.

Лема 4. *Нехай G ізоморфна групі $G(p,p,p)$. Якщо $x = ax_1 + bx_2 + cx_3$ та $y = ay_1 + by_2 + cy_3 \in G$, то множення*

$$x \cdot y = ax_1y_1 + b(x_2y_1 + \beta(x)y_2) + c(x_3y_1 + \nu(x)y_2)$$

з одним з наступних наборів функцій
- $\beta(x) = 1$ *та* $\nu(x) = 1$;
- $\beta(x) = x_1$ *та* $\nu(x) = x_1$;
- $\beta(x) = x_1^2$ *та* $\nu(x) = x_1^2$;
- ...
- $\beta(x) = x_1^{p-1}$ *та* $\nu(x) = x_1^{p-1}$

визначає локальне майже-кільце $R = (G, +, \cdot)$.

Маємо наступну теорему.

Теорема 4. *Існує щонайменше p неізоморфних локальних майже-кілець на елементарній абелевій групі порядку p^3.*

Доведення. Оскільки нуль-симетричні локальні майже-кільця порядку p^2 класифіковані в роботі [2], то й описані всі неізоморфні фактор-майже-кільця $N = R/ < c >$. Тобто можна застосувати формулу множення з вказаної роботи, попередньо адаптувавши її для лівих локальних майже-кілець. Зрозуміло, що $N^+ = \langle a \rangle + \langle b \rangle$. А саме, нехай $x = ax_1 + bx_2$ та $y = ay_1 + by_2$ елементи майже-кільця N, тоді

$$xy = ax_1y_1 + b(x_2y_1 + \rho(x_1)y_2),$$

де ρ приймає $p-1$ значення для нуль-симетричних майже-кілець за [2,Theorem 1.6].

З іншого боку, за наслідком 2 маємо:

$$xy = ax_1y_1 + b(x_2y_1 + x_1\beta(x)y_2).$$

Прирівнявши коефіцієнти при твірних, отримаємо: $x_1\beta(x)y_2 = \rho(x_1)y_2$. Якщо $y_2 \not\equiv 0 \ (mod\ p)$, то $x_1\beta(x) = \rho(x_1)$. Звідки $\beta(x) = \rho(x_1)x_1{}^{-1}$. Якщо $y_2 \equiv 0 \ (mod\ p)$, то $xy = ax_1y_1 + bx_2y_1$.

Отже, існує $p-1$ таких різних функції $\beta(x)$.

Очевидно, що множення з леми 4 з функціями $\beta(x) = 1$ та $\nu(x) = 1$ є майже-кільцевим і визначає константне локальне майже-кільце, що завершує доведення. □

4. Приклади локальних майже-кілець з елементарною абелевою адитивною групою порядку p^3. Дамо алгоритм побудови локального майже-кільця з елементарною абелевою адитивною групою порядку $5^3 = 125$, що реалізовано в системі комп'ютерної алгебри GAP [8].

$LoadPackage(\text{“}LocalNR\text{”});$
$G := SmallGroup(125, 5);$
$gen := MinimalGeneratingSet(G);$
$List(gen, Order);$
$a := gen[1];$
$b := gen[2];$
$c := gen[3];$
$beta := function(x)$
$return\ x\hat{}2\ mod\ 5;\ end;$
$nu := function(x)$
$return\ x\hat{}2\ mod\ 5;\ end;$
$mulGR := function(x, y)$
$local\ x1,\ x2,\ x3,\ y1,\ y2,\ y3;$
$for\ x1\ in\ [0..4]\ do$
$for\ x2\ in\ [0..4]\ do$
$for\ x3\ in\ [0..4]\ do$
$for\ y1\ in\ [0..4]\ do$
$for\ y2\ in\ [0..4]\ do$
$for\ y3\ in\ [0..4]\ do$
$if\ x = a\hat{}x1 * b\hat{}x2 * c\hat{}x3\ and\ y = a\hat{}y1 * b\hat{}y2 * c\hat{}y3\ then\ return$
$a\hat{}(x1 * y1) * b\hat{}(x2 * y1 + beta(x1) * y2) * c\hat{}(x3 * y1 + \nu(x1) * y3); fi;$
$od; od; od; od; od; od; end;$
$n := ExplicitMultiplicationNearRingNC(G, mulGR);$
$M := MultiplicationTable(n); ;$
$mul := NearRingMultiplicationByOperationTable(G, M, AsSortedList(G));$
$n := ExplicitMultiplicationNearRing(G, mul);$

З побудованих прикладів у пакетах “Sonata” [9] та “LocalNR” [10] маємо таку кількість локальних майже-кілець з досліджуваними характеристиками, що не є майже-полями:

Адитивна група	Кількість неізоморфних локальних майже-кілець
$C_2 \times C_2 \times C_2$	6
$C_3 \times C_3 \times C_3$	12
$C_5 \times C_5 \times C_5$	29
$C_7 \times C_7 \times C_7$	46
$C_{11} \times C_{11} \times C_{11}$	96

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. В роботі вивчаються локальні майже-кільця з абелевими адитивними групами порядку p^3. Визначено формули множення для таких майже-кілець та описано функції, що їх задають. Наведено приклади локальних майже-кілець на цих групах.

Отримані результати знайдуть застосування при вивченні недистрибутивних структур на цих групах та класифікації цих об'єктів. Локальні майже-кільця тісно пов'язані з брейсами, які дають розв'язки комбінаторних рівнянь Янга-Бакстера [11].

Список використаної літератури

1. Maxson C. J. On local near-rings. *Math. Z.* 1968. 106. P. 197–205.
2. Maxson C. J. Local near-rings of cardinality p^2. *Canad. Math. Bull.* 1968. 11, no. 4. P. 555–561.
3. Zassenhaus H. Über endliche Fastkörper. *Abh. Math. Sem., Univ. Hamburg.* 1935/36. 11. P. 187–220.
4. Maxson C. J. On the construction of finite local near-rings (I): on non-cyclic abelian p-groups. *Quart. J. Math. Oxford.* 1970. 2, 21. P. 449–457.
5. Clay J. R., Malone Jr. The near-rings with identities on certain finite groups. *Math. Scand.* 1966. 19. P. 146–150.
6. Холл М. Теория групп. Москва: Издательство иностранной литературы, 1962. 468 p.
7. Раєвська І. Ю., Раєвська М. Ю. Локальні майже-кільця з обмеженнями на мультиплікативні групи та підгрупи необоротних елементів. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*, Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. 2013. **14**. С. 134–145.
8. The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.11.0, 2020. (`https://www.gap-system.org`)
9. Aichinger E., Binder F., Ecker Ju., Mayr P. and Noebauer C. *SONATA — System of nearrings and their applications, GAP package, Version 2.8*; 2015. (`https://gap-packages.github.io/sonata/`)
10. Raievska I., Raievska M., Sysak Y., LocalNR, Package of local nearrings, Version 1.0.3, 2021. (GAP package), (`https://gap-packages.github.io/LocalNR`)
11. Rump W. Set-theoretic solutions to the Yang-Baxter equation, skew-braces, and related near-rings. *J. Algebra Appl.* 2019. 18, No. 8. Article ID 1950145. 22 p.

Raievska I. Yu., Raievska M. Yu. Local nearrings on elementary Abelian groups of order p^3.

Nearrings arise naturally in the study of systems of nonlinear mappings, and have been studied for many decades. Basic definitions and many results concerning nearrings can be for instance found in [G. Pilz. Near-rings. The theory and its applications. North Holland, Amsterdam, 1977].

Nearrings are generalized rings in the sense that the addition need not be commutative and only one distributive law is assumed. Clearly every associative ring is a nearring and each group is the additive group of a nearring, but not necessarily of a nearring with identity. The question what group can be the additive group of a nearring with identity is far from solution.

A nearring R with an identity is called local if the set of all non-invertible elements of R forms a subgroup of the additive group of R. A study of local nearrings was initiated by Maxson (1968) who defined a number of their basic properties and proved in particular that the additive group of a finite zero-symmetric local nearring is a p-group. Maxson (1968) described all non-isomorphic zero-symmetric local nearrings with non-cyclic additive group of order p^2 which are not nearfields. He also shown in 1968 that every non-cyclic abelian p-group of order $p^n > 4$ is the additive group of a zero-symmetric local nearring which is not a ring.

The list of all local nearrings of order at most 31 can be extracted from the package SONATA (https://gap-packages.github.io/sonata/) of the computer system algebra GAP (https://www.gap-system.org/). However, the classification of nearrings of higher orders requires much more complex calculations. For local nearrings they were realized by us in the form of a new GAP package called LocalNR (https://gap-packages.github.io/LocalNR). Its current version (not yet distributed with GAP) contains 37599 local nearrings of order at most 361, except orders 128, 256 and some of orders 32, 64 and 243.

This paper is devoted to the study of local nearrings whose additive groups are an Abelian group of order p^3.

Keywords: nearring, local nearring, elementary Abelian group.

References

1. Maxson, C. J. (1968). On local near-rings. *Math. Z., 106,* 197-205.
2. Maxson, C. J. (1968). Local near-rings of cardinality p^2. *Canad. Math. Bull., 11(4),* 555-561.
3. Zassenhaus, H. (1935/36). Über endliche Fastkörper. *Abh. Math. Sem., Univ. Hamburg, 11,* 187-220.
4. Maxson, C. J. (1970). On the construction of finite local near-rings (I): on non-cyclic abelian p-groups. *Quart. J. Math. Oxford (2), 21,* 449-457.
5. Clay, J. R., & Malone, Jr. (1966). The near-rings with identities on certain finite groups. *Math. Scand., 19,* 146-150.
6. Hall, M. Jr. (1959). The theory of groups. New York: MacMillan Company.
7. Raievska, I. Yu., & Raievska, M. Yu. (2013). Local nearrings with restrictions on the multiplicative groups and the subgroups of non-invertible elements. *Sci. Journ. Dragomanov Ped. Univ. Ser. 1. Phys. – math. sci. (Kiev), 14,* 134-145 [in Ukrainian].
8. The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming (Version 4.11.0). (2020). Retrieved from `https://www.gap-system.org`.
9. Aichinger, E., Binder, F., Ecker, Ju., Mayr, P. & Noebauer, C. (2015). SONATA — System of nearrings and their applications (Version 2.8) [GAP package]. Retrieved from `https://gap-packages.github.io/sonata/`.
10. Raievska, I., Raievska, M., & Sysak, Y. (2021). LocalNR, Package of local nearrings (Version 1.0.3) [GAP package]. Retrieved from `https://gap-packages.github.io/LocalNR`.
11. Rump, W. (2019). Set-theoretic solutions to the Yang-Baxter equation, skew-braces, and related near-rings. J. *Algebra Appl., 18(8)*, 1950145.

Одержано 23.04.2021