УДК 512.44
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).75-81

А. М. Тегза[1], Г. І. Сливка-Тилищак[2], М. С. Герич[3], О. О. Погоріляк[4], Т. В. Боярищева[5]

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
antonina.tegza@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5310-4311

[2] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
доктор фізико-математичних наук, доцент
anna.slyvka@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7129-0530

[3] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
miroslava.gerich@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9634-5254

[4] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
oleksandr.pogoriliak@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0501-4861

[5] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
tetjana.bojarishcheva@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2899-4900

МОДЕЛЮВАННЯ ГАУССОВОГО СТАЦІОНАРНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ З НЕОБМЕЖЕНИМ СПЕКТРОМ З ВИКОРИСТАННЯМ ТЕОРІЇ $L_2(\Omega)$-ПРОЦЕСІВ

Робота присвячена подальшому розвитку теорії моделювання гауссових стаціонарних випадкових процесів за методом, який запропонував і розвивав Ю. В. Козаченко. Розглянуто застосування теорії $L_2(\Omega)$-процесів при моделюванні гауссових стаціонарних випадкових процесів. Використовуючи оцінки норм та деякі властивості і теореми $L_2(\Omega)$-процесів, для моделі одержано розбиття спектрального проміжку, при якому модель наближатиме процес з заданими точністю і надійністю в рівномірній метриці. У середовищі Python було змодельовано процес для часткового випадку.

Ключові слова: $L_2(\Omega)$-процеси, гауссів стаціонарний випадковий процес, модель процесу, точність, надійність моделі.

1. Вступ. Однією з актуальних задач теорії випадкових процесів є побудова математичної моделі, а також дослідження її загальних властивостей. На сьогоднішній день активно розроблюються загальні методи чисельного моделювання випадкових процесів, а також швидко зростає область застосування стохастичних моделей, зокрема в радіотехніці, електроніці, у актуарній математиці і т.д.

Оскільки більшість фізичних явищ залежить від багатьох факторів, то при їх моделюванні намагаються відтворити процеси, що є сумою великого числа випадкових факторів, тобто, згідно з центральною граничною теоремою, гауссові або близькі до них процеси. Тому найбільш поширеними і найбільш розробленими є методи моделювання гауссових випадкових процесів і полів. Ряд нових напрямків у галузі моделювання випадкових процесів та полів розроблено Г. О. Михайловим, Ю. В. Козаченком та їх учнями [1]- [3], [6]. Дана робота присвячена подальшому розвитку теорії моделювання гауссових стаціонарних випадкових процесів за методом, який запропонував і розвивав Ю. В. Козаченко. У даній роботі розглянуто простір Орлича, що породжується функцією $U(x) = |x|^2$. Випадковий процес у цьому просторі називають $L_2(\Omega)$-процесом. Використовуючи властивості цього процесу, побудовано модель гауссового стаціонарного процесу з заданими точністю і надійністю і для часткового випадку комп'ютерно змодельовано процес.

2. Основний результат. Розглянемо гауссовий стаціонарний дійсний центрований неперервний в середньому квадратичному випадковий процес $X(t)$ з коваріаційною функцією:

$$r(\tau) = EX(t+\tau)X(t) = \int_0^\infty \cos \lambda t dF(\lambda),$$

де $F(\lambda)$ – неперервна спектральна функція цього процесу.

Тоді випадковий процес має зображення

$$X(t) = \int_0^\infty \cos \lambda t d\eta_1(\lambda) + \int_0^\infty \sin \lambda t d\eta_2(\lambda),$$

де $\eta_1(\lambda)$ та $\eta_2(\lambda)$ такі незалежні центровані гауссові випадкові процеси, що $E(\eta_i(\lambda_2) - \eta_i(\lambda_1))^2 = F(\lambda_2) - F(\lambda_1)$ при $\lambda_1 < \lambda_2$, $i = 1, 2$.

За модель процесу візьмемо випадковий процес

$$X_M(t) = \sum_{k=0}^{M} [\eta_{k1} \cos \zeta_k t + \eta_{k2} \sin \zeta_k t], \tag{1}$$

де де η_{l1}, η_{m2}, ζ_k — незалежні при всіх l, m та k випадкові величини, $\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{M+1}\}$ – таке розбиття проміжку $[0, +\infty)$, що $\lambda_0 = 0$, $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, $\lambda_{M+1} = +\infty$, η_{k1}, η_{k2} – гауссові випадкові величини, такі що $E\eta_{k1} = E\eta_{k2} = 0$, $E\eta_{k1}^2 = E\eta_{k2}^2 = F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k) = b_k^2$, ζ_k – випадкові величини, що приймають значення на відрізках $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$, та якщо $b_k^2 > 0$, то

$$F_k(\lambda) = P\{\zeta_k < \lambda\} = \frac{F(\lambda) - F(\lambda_k)}{F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)}.$$

Якщо $b_k^2 = 0$, то $\eta_{k1} = 0, \eta_{k2} = 0, \zeta_k = 0$ з ймовірністю одиниця.

Означення 1. *[1] Випадкову величину ξ називатимемо субгауссовою, якщо знайдеться таке $a \geq 0$, що для всіх $\lambda \in R$ виконується нерівність*

$$E \exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\left\{\frac{a^2\lambda^2}{2}\right\}.$$

Клас всіх субгауссових величин будемо позначати $Sub(\Omega)$.
Випадковий процес $X = \{X(t),\ t \in \mathfrak{T}\}$ називається субгауссовим процесом, якщо для всіх $t \in \mathfrak{T}$, $X(t)$ – субгауссова випадкова величина та $\sup_{t\in\mathfrak{T}} \tau(X(t)) < < \infty$.

Нехай $\eta_M(t) = X(t) - X_M(t)$. Тоді

$$\eta_M(t) = \sum_{k=0}^{M} \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t) d\eta_1(\lambda) + \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin\lambda t - \sin\zeta_k t) d\eta_2(\lambda) \right). \qquad (2)$$

Лема 1. *[4] Нехай $\|\xi\|_{L_p} = (E|\xi|^p)^{\frac{1}{p}}$, $1 \le p < \infty$, $\xi_i \in L_p$ – послідовність незалежних випадкових величин з $E\xi_i = 0$, $i = \overline{1,\infty}$. Тоді*

$$\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i\|^2_{L_p} \le C_p \left(\sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\|^2_{L_p} \right),$$

де

$$C_p = 8 \left(\frac{(p+1)}{2\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{2}{p}}.$$

З досліджень дисертації [7] для часткового випадку $L_2(\Omega)$-процесу сформулюємо леми:

Лема 2. *Якщо $\int_0^\infty \lambda^2 dF(\lambda) < \infty$, то для субгауссового випадкового процесу $\eta_M(t)$ справедлива нерівність*

$$\|\eta_M(t)\|_{L_2} \le 2(C_2\widetilde{\Delta}_2)^{\frac{1}{2}} T \left[\left(\frac{\lambda_M}{M} \right)^2 F(\lambda_M) + \left(\int_{\lambda_M}^{\infty} |\lambda - \lambda_M|^2 dF(\lambda) \right)^{\frac{2}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (3)$$

Лема 3. *Якщо $\int_0^\infty \lambda^2 dF(\lambda) < \infty$, $p \ge 2$, то справедливе співвідношення*

$$\|\eta_M(t) - \eta_M(s)\|_{L_2} \le 2(C_2\widetilde{\Delta}_2)^{\frac{1}{2}} |s-t| \left[\left(\frac{\lambda_M}{M} \right)^2 (1 + \lambda_M T)^2 F(\lambda_M) + \int_{\lambda_M}^{\infty} |3u - \lambda_M|^2 \, dF(u) \right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (4)$$

Обчислимо коефіцієнти для нашого випадку: $C_2 = 8\left(\frac{\Gamma(3)}{2\sqrt{\pi}}\right) = \frac{8}{\sqrt{\pi}}$;
$\widetilde{\Delta}_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty t^2 e^{-t^2/2} dt$, провівши заміну змінних, матимемо $\widetilde{\Delta}_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 1$.
Справедливою буде теорема:

Теорема 1. *Якщо в моделі $X_M(t)$ розбиття Λ таке, що виконуються нерівності:*

$$\int\limits_0^\infty \lambda^2 dF(\lambda) < \infty, \tag{5}$$

$$\sqrt{TL\varepsilon_0} + \sqrt{2}\varepsilon_0 \le \frac{\delta}{3}\sqrt{\frac{2\beta}{3}}, \tag{6}$$

де $L = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}}\left[\left(\frac{\lambda_M}{M}\right)^2(1+\lambda_M T)^2 F(\lambda_M) + \int\limits_{\lambda_M}^\infty (3u-\lambda_M)^2\, dF(u)\right]^{\frac12}$, *а*

$\varepsilon_0 = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}}T\left[\left(\frac{\lambda_M}{M}\right)^2 F(\lambda_M) + \int\limits_{\lambda_M}^\infty (u-\lambda_M)^2\, dF(u)\right]^{\frac12}$, *то існує випадковий гауссів процес $X(t)$ до якого дана модель $X_M(t)$ буде наближатись з надійністю $1-\beta$, $0<\beta<1$ та точністю $\delta>0$ в рівномірній метриці.*

Доведення. Випадковий процес $X(t)$ і його модель, а отже і $\eta_M(t)$ є сепарабельними неперервними з ймовірністю одиниця процесами.

Якщо виконується умова (6), то з леми 2 випливає, що процес $\eta_M(t)$ є $L_2(\Omega)$-процесом (оскільки $\varepsilon_0 = \sup\limits_{0\le t\le T}\|\eta_M(t)\|_{L_p} < \infty$).

А для $L_2(\Omega)$-процесу справедлива нерівність:

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}|\eta_M(t)| > \delta\right\} \le \frac{\widetilde{B}_2^2}{\delta^2},$$

де $\widetilde{B}_2 = \inf\limits_{0\le t\le T}(E|\eta_M(t)|^2)^{\frac12} + \inf\limits_{0<\theta<1}\frac{1}{\theta(1-\theta)}\int\limits_0^{\theta 2\varepsilon_0} N^{\frac12}(\varepsilon)d\varepsilon, \quad \varepsilon_0 = \sup\limits_{0\le t\le T}\|\eta_M(t)\|_{L_2}$.

Оскільки з [5] $N(\varepsilon) = \frac{T}{2\sigma^{(-1)}(\varepsilon)} + 1$, $\sigma(h) = \sup\limits_{|t-s|<h}\|\eta_M(t)-\eta_M(s)\|_{L_2}$.

В нашому випадку $\sigma(h) = hL$, де L визначено в лемі 2:

$$L = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}}\left[\left(\frac{\lambda_M}{M}\right)^2(1+\lambda_M T)^2 F(\lambda_M) + \int\limits_{\lambda_M}^\infty (3u-\lambda_M)^2\, dF(u)\right]^{\frac12}.$$

Тоді

$$\sigma^{(-1)}(h) = \frac{h}{L}, \quad \inf_{0\le t\le T}\left(E|\eta_M(t)|^2\right)^{\frac12} = 0,$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \inf_{0<\theta<1}\frac{1}{\theta(1-\theta)}\int\limits_0^{2\theta\varepsilon_0}\left(\frac{TL}{2\varepsilon}+1\right)^{\frac12}d\varepsilon \le \inf_{0<\theta<1}\frac{1}{\theta(1-\theta)}\left[\left(\frac{TL}{2}\right)^{\frac12}(\theta\varepsilon_0)^{\frac12}2 + 2\theta\varepsilon_0\right] \\ &\le \inf_{0<\theta<1}\frac{\theta^{\frac12}}{\theta(1-\theta)}\left[\sqrt{2TL\varepsilon_0} + 2\varepsilon_0\right] \end{aligned}$$

Мінімум досягається при $\theta = \frac13$, тому

$$B_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left[\sqrt{2TL\varepsilon_0} + 2\varepsilon_0\right].$$

Тоді $\quad P\{\sup_{0<t\leq T}|\eta_M(t)|>\delta\}\leq \frac{27}{4\delta^2}\left(\sqrt{2TL\varepsilon_0}+2\varepsilon_0\right)^2.$

Оскільки можна підібрати такі λ_M та M, щоб ε_0 та L були зроблені як завгодно малими, то існує таке розбиття Λ, для якого згідно означення збіжності моделі до процесу з певною точністю і надійністю повинна виконуватись нерівність

$$\frac{27}{4\delta^2}\left(\sqrt{2TL\varepsilon_0}+2\varepsilon_0\right)^2\leq\beta.$$

Розглянемо частковий випадок цієї теореми.

Візьмемо таку спектральну функцію: $F(\lambda)=1-e^{-\lambda}$. Тоді умова (5) виконується:

$$\int\limits_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda}d\lambda=\Gamma(3)=2$$

Знайдемо коефіцієнти нерівності (6), поклавши $T=1$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}}\left[\left(\frac{\lambda_M}{M}\right)^2(1-e^{-\lambda_M})+\int\limits_{\lambda_M}^\infty(u-\lambda_M)^2e^{-u}du\right]^{\frac{1}{2}}=\\ &= \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}}\left[\left(\frac{\lambda_M}{M}\right)^2(1-e^{-\lambda_M})+2e^{-\lambda_M}\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$L=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}}\left[\left(\frac{\lambda_M}{M}\right)^2(1+\lambda_M)^2(1-e^{-\lambda_M})+\int\limits_{\lambda_M}^\infty(3u-\lambda_M)^2e^{-u}du\right]^{\frac{1}{2}}$$

Обчисливши визначений інтеграл у другому доданку, матимемо:

$$L=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}}\left[\left(\frac{\lambda_M}{M}\right)^2(1+\lambda_M)^2(1-e^{-\lambda_M})+e^{-\lambda_M}\left(4\lambda_M^2+12\lambda_M+3\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Підставимо результати у (6), матимемо:

$$\sqrt[4]{\left(\left(\frac{\lambda_M}{M}\right)^2(1-e^{-\lambda_M})+\frac{2}{e^{\lambda_M}}\right)\left(\left(\frac{\lambda_M}{M}\right)^2(1+\lambda_M)^2(1-e^{-\lambda_M})+\frac{4\lambda_M^2+12\lambda_M+3}{e^{\lambda_M}}\right)}+ \\ +\sqrt{2\left(\frac{\lambda_M}{M}\right)^2(1-e^{-\lambda_M})+4e^{-\lambda_M}}\leq\frac{\delta}{12}\sqrt{\frac{\beta\sqrt{\pi}}{3}}$$

Підставляючи різні значення точності і надійності, можемо одержати залежність числа M доданків моделі процесу від довжини спектру λ_M. Для розв'язання цієї нерівності складено програму на мові Python. Результати подані у зведеній таблиці 1.

Комп'ютерно змоделюємо процес (1) для одного з часткових випадків, використовуючи мову програмування Python.

Для цього потрібно змоделювати компоненти моделі (1), тобто гауссові випадкові величини η_{k1}, η_{k2}, для яких $E\eta_{k1}=E\eta_{k2}=0$, $E\eta_{k1}^2=E\eta_{k2}^2=F(\lambda_{k+1})-F(\lambda_k)=b_k^2$ та випадкові величини ζ_k, що приймають значення на відрізках

Таблиця 1.

Залежність числа M від точності і надійності моделі.

δ	β	λ_M	M
0.1	0.1	25	80 416
		50	211 226
		100	565 982
0.01	0.1	25	820 756
		50	2 111 936
		100	5 659 720
0.01	0.01	25	3 276 316
		50	6 678 481
		100	17 897 584

$[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ з функцією розподілу

$$F_k(\lambda) = P\{\zeta_k < \lambda\} = \frac{F(\lambda) - F(\lambda_k)}{F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)}.$$

Для моделювання випадкових величин ζ_k використано метод Смірнова, а для моделювання нормально розподілених випадкових величин, використано готові функції бібліотеки numpy.random; часову змінну t взято з проміжку $[0,\ 1]$. Одержимо графічне представлення процесу на рис. 1.

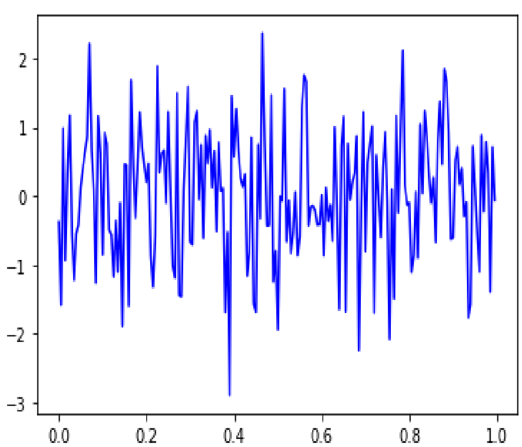

Рис. 1. Модель випадкового процесу, при $F(\lambda) = 1 - e^{-\lambda}$.

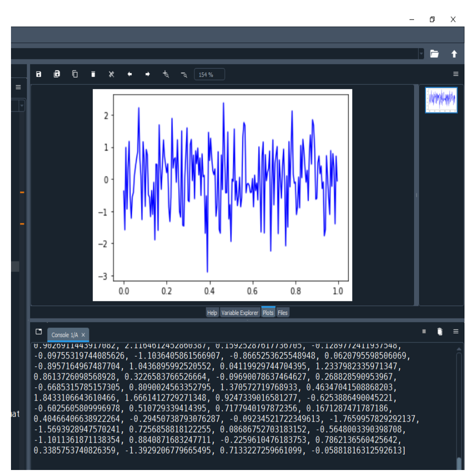

Рис. 2. Скріншот результату.

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. У даній роботі побудовано модель гауссового стаціонарного випадкового процесу з заданими точністю і надійністю у рівномірній метриці, використовуючи теорію $L_2(\Omega)$-процесів. Для часткового випадку спектральної функції та деяких значень точності і надійності одержано таблицю значень числа M в залежності від величини спектрального проміжку. Проаналізувавши її, видно, що із покращенням точності і надійності, зростає кількість доданків у моделі (1) . Для точності

$\delta = 0,1$, надійності $1-\beta = 0,9$ і спектральної функції $F(\lambda) = 1-e^{-\lambda}$, одержано графічне представлення процесу (див. рис. 1).

Список використаної літератури

1. Buldygin V. V. and Kozachenko Yu. V. (2000). Metric characterisation of random variables and random processes. *Amer. Math. Soc. Providence RI.*
2. Козаченко Ю. В., Пашко А. О. (1999). Моделювання випадкових процесів. *К.: Київський університет*, 223 с.
3. Козаченко Ю. В., Пашко А. О. (1988). Точність моделювання випадкових процесів в нормах просторів Орлича I. *Теор. ймовірн. та матем.стат.,* № 58, С. 45–60.
4. Мацак И. К., Пличко А. Н. (1988). Некоторые неравенства для сумм независимых случайных величин в банаховых пространствах. *Теория вероятн. и матем.статист.*, № 38, С. 81–86.
5. Тегза А. М. (2001). Про точність та надійність деяких моделей гауссових процесів з обмеженим спектром. *Науковий вісник Ужгородського університету*, Вип. 6, С. 125–131.
6. Джуліано Антоніні Р., Козаченко Ю. В., Тегза А. М. (2002). Нерівності для норм субгауссових векторів та точність моделювання випадкових процесів. *Теор. ймовірност. та матем. статист.*, Вип. 66, С. 58–66.
7. Tegza A. M. (2003). Обгрунтування оцінок точності і надійності моделювання гауссових стаціонарних випадкових процесів. *Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук.*

Tegza A. M., Slyvka-Tilishchak G. I., Gerich M. S., Pogorilyak O. O., Bojarishcheva T. V. Modeling of Gaussian stationary random process with unlimited spectrum using the theory of $L_2(\Omega)$ - processes.

The work is devoted to the further development of the theory of modeling of Gaussian stationary random processes by the method proposed and developed by Yu. V. Kozachenko. He application of the theory of $L_2(\Omega)$ - processes in the modeling of Gaussian stationary random processes is considered. Using estimates of norms and some properties and theorems of $L_2(\Omega)$ - processes, the model is divided into a spectral interval at which the model will approximate the process with given accuracy and reliability in a uniform metric. For the partial case, the process was modeled in the Python environment.

Keywords: Gaussian stationary random process, model of random process, entropy characteristics, accuracy, model reliability.

References

1. Buldygin, V. V. & Kozachenko, Yu. V. (2000). Metric characterisation of random variables and random processes. *Amer. Math. Soc. Providence RI.*
2. Kozachenko, Yu. V., & Pashko, A. O. (1999). Modeling of random processes. *K.: Kyiv University*, 223 p. [In Ukrainian].
3. Kozachenko, Yu. V., & Pashko, A. O. (1988). Accuracy of modeling of random processes in norms of Orlych spaces I. *Theory of Prob. and Math. Stat.,* 58, 45–60. [In Ukrainian].
4. Macak, I. K., & Plichko, A. N. (1988). Some inequalities for the sums of independent random variables in Banach spaces. *Theory of Prob. and Math. Stat.*, 38, 81–86.
5. Tegza, A. M. (2021). On the accuracy and reliability of some models of Gaussian processes with a limited spectrum *Scientific Bulletin of Uzhgorod University*, 6, 125–131.
6. Giuliano Antonini, R., Kozachenko, Y. V., & Tegza, A. M. (2002). Inequalities for norms of subgaussian vectors and accuracy of modeling of random processes. *Theory of Prob. and Math. Stat.,* 66, 58–66.
7. Tegza, A. M. (2003). Substantiation of estimates of accuracy and reliability of modeling of Gaussian stationary random processes. it Dissertation for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences [In Ukrainian].

Одержано 15.04.2022