

УДК 539.3

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).155-167](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).155-167)**М. М. Діхтярук¹, Н. О. Ярецька², О. А. Кравчук³**

¹ Хмельницький національний університет,
доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань,
кандидат фізико-математичних наук
mega-dihtyaruk@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0819-3842>

² Хмельницький національний університет,
доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань,
кандидат фізико-математичних наук
yaretskano@khmnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3726-2878>

³ Хмельницький національний університет,
старший викладач кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань,
kravchukoa2@khmnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6937-5001>

ДОСЛІДЖЕННЯ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПРИ ПЕРІОДИЧНОМУ ПІДСИЛЕННІ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОЇ СМУГИ ТОНКИМИ ПІДКРІПЛЮЮЧИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

У статті досліджено якісний і кількісний вплив початкових (залишкових) напружень на закон розподілу контактних характеристик при взаємодії пружних скінчених накладок (стрингерів), при їх періодичному розміщенні, з попередньою напруженою смугою. Дослідження виконане у рамках лінеаризованої теорії пружності для стисливих та нестисливих тіл з використанням методів інтегральних перетворень Фур'є, методів розв'язку гармонійних диференціальних рівнянь, сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь та числових методів. Вважаємо, що пружна смуга з початковими (залишковими) напруженнями знаходиться в умовах плоскої деформації, а для пружної накладки, навантаженої одночасно вертикальними і горизонтальними силами, справедлива загальноприйнята модель згину балки в поєднанні з моделлю одноісного напружено-деформованого стану пружної накладки. Виведено сингулярне інтегрально-диференціальне рівняння з ядром Гілберта, що дозволяє розв'язати поставлену задачу. Аналітичний розв'язок рівняння знаходимо у вигляді рядів від функції Якобі. Для матеріалів з пружними потенціалами гармонічного типу (стисливі тіла) та пружними потенціалами Бартенєва-Хазановича і Трелоара (нестисливі тіла) проведені числові дослідження. Розглянуто випадок, коли всі періодично розміщені накладки, що підкріплюють пружну смугу з початковими (залишковими) напруженнями, навантажені тангенціальною силою. Аналіз числових результатів свідчить про суттєвий вплив попередньо напруженого деформованого стану на розподіл контактних характеристик періодично підсиленої смуги тонкими підкріплюючими елементами. Отримані результати можуть бути використані для інженерних розрахунків на міцність та довговічність конструкцій з урахуванням початкових (залишкових) напружень для широкого вибору конструкційних матеріалів.

Ключові слова: напружено-деформований стан, початкові (залишкові) напруження, функції Якобі, перетворення Фур'є.

1. Вступ. Контактні задачі класичної теорії пружності в нашій країні і за кордоном в останні десятиліття одержали подальший розвиток як по глибині нових підходів, так і по ширині досліджень. Про це свідчить велика кількість вчених, які працюють над заданою проблемою і кількість поданих доповідей на

симпозіуми, з'їзди та конференції як у нашій країні, так і за кордоном в останні десятиліття.

Існує велика кількість оглядових праць, які містять детальний аналіз основних результатів і сучасний стан різних аспектів розвитку механіки контактної взаємодії, в яких приведена кількісно велика бібліографія з вищезгаданих питань. Не дивлячись на досить великий спектр праць по дослідженню закону розподілу контактних характеристик у конструкціях та деталях машин у класичній теорії пружності, не вдається, виходячи з прийнятої фізичної моделі, врахувати початковий (залишковий) напружено-деформований стан тіл, що перебувають в контакті. Як відомо, початкові (залишкові) напруження практично завжди присутні в елементах конструкцій і деталях машин. Причини їх появи різноманітні: незворотні деформації, структурні зміни в матеріалах, зміни агрегатного стану в окремих місцях конструкцій, фізико-механічні, хімічні і технологічні процеси, збірка конструкцій або навмисне їх створення. Дія останніх, викликає в попередньо напруженому тілі такий самий ефект, як і будь-які інші напруження, які можуть викликати деформації, руйнування, що спричиняє збільшення тенденції до втрати стійкості та внутрішнього тертя. Отже, врахування початкових (залишкових) напружень при розрахунку важливих елементів конструкцій, машин і споруд дозволило б (при їх створенні) ефективно враховувати ресурси міцності матеріалів шляхом правильної оцінки запасів цієї міцності й істотно знизити їх матеріалоемність. Цей підхід дозволяє зберегти необхідні функціональні характеристики в цілому.

Навіть враховуючи досить великий діапазон досліджень по визначенню закону розподілу контактних характеристик у конструкціях і деталях машин класичної теорії пружності, не можливо (виходячи з прийнятої лінійної моделі), як вказано вище, врахувати початковий (залишковий) напружено-деформований стан тіл, що перебувають у контакті. Але його можна врахувати, використавши лінеаризовану теорію пружності, розроблену у 70 роках минулого століття академіком НАН України О. М. Гузем. Хоча в загальному випадку, чітка постановка таких задач вимагає застосування нелінійної теорії пружності. Проте при досить великих величинах початкових (залишкових) напружень можна обмежитися її лінеаризованим варіантом.

Історично дослідження контактних задач в рамках лінеаризованої теорії пружності складалося по двох напрямках. Перший пов'язаний з дослідженнями контактної взаємодії тіл з конкретною формою пружного потенціалу [1]. Другий підхід це дослідження просторових та плоских задач контактної взаємодії тіл з початковими (залишковими) напруженнями з довільною структурою пружного потенціалу для стисливих і нестисливих матеріалів у випадку теорії скінченних (великих) і декількох варіантів теорії малих початкових (залишкових) деформацій [2 – 17].

2. Актуальність. Вивчення і дослідження якісного і кількісного впливу початкових (залишкових) напружень на закон розподілу контактних характеристик є досить актуальною проблемою як в теоретичному, так і в практичному аспектах. Зокрема, теоретичне та практичне значення одержаних результатів дослідження полягає в тому, що всі розв'язки поставленої задачі подані у вигляді аналітичних виразів, формул та графіків. Їх можна безпосередньо використовувати в інженерних розрахунках міцності і довговічності конструкцій з

урахуванням початкових (залишкових) напружень для широкого вибору конструкційних матеріалів.

3. Постановка задачі. Метою роботи є розв'язок задачі про контактну взаємодію пружних скінчених накладок (стрингерів), при їх періодичному розміщенні, з попередньо напруженою смугою в рамках лінеаризованої теорії пружності. Дослідження виконане у рамках лінеаризованої теорії пружності для стисливих та нестисливих тіл [2 – 4].

Для вивчення впливу початкового (залишкового) напружено-деформованого стану на закон розподілу контактних характеристик розглянемо пружну нескінченну смугу з початковими напруженнями товщиною t , яка на скінчених відрізках $L_k \{-a + 2lk, a + 2lk\}$, $k = 1, 2$ своєї грані $y_1 = 0$, що підкріплена періодично розміщеними пружними накладками з періодом $2l$, а грань $y_2 = -t$ жорстко заземлена (Рис. 1).

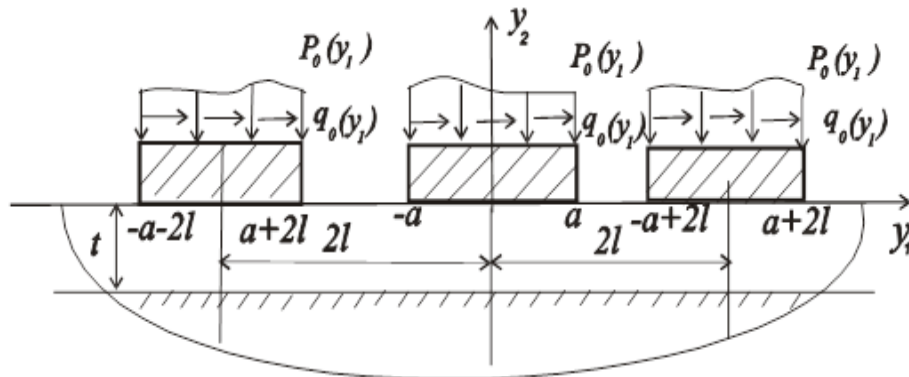


Рис. 1. Попередньо напружена смуга, підсилена тонкими стрингерами.

Необхідно визначити вплив початкових (залишкових) напружень в пружній смузі з початковими (залишковими) напруженнями на закон розподілу нормальних і тангенціальних контактних напружень в області контакту пружних накладок з пружною смугою, коли на останні діють вертикальні і горизонтальні навантаження інтенсивності $p_0(y_1)$ і $q_0(y_1)$ відповідно.

4. Метод розв'язку. В силу періодичності розглянутої задачі вплив початкових (залишкових) напружень на L_k при $y_2 = 0$ під пружними тонкими накладками буде однаковий [1, 5, 6], тобто контактні напруження, що виникають на L_k – відрізках зі сторони накладок пружної смуги будуть функціями періодичними з періодом $2l$.

$$\tau_{12}(y_1)|_{y_2=0} = \tau(y_1) = \tau(y_1 - 2l) = \tau(y_1 + 2l),$$

$$\tilde{Q}_{22}(y_1) = Q_{22}(y_1 - 2l) = Q_{22}(y_1 + 2L),$$

$$\tilde{Q}_{21}(y_1) = Q_{21}(y_1 - 2l) = Q_{21}(y_1 + 2L).$$

Отже, можна обмежитися розглядом однієї із них, наприклад, тієї, для якої $k = 0$. Будемо вважати також, що відносно пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями і пружних накладок справедливі припущення, а саме: пружна смуга з початковими (залишковими) напруженнями знаходиться в умовах плоскої деформації, а для пружної накладки, навантаженої одночасно

вертикальними і горизонтальними силами, справедлива загальноприйнята модель згину балки в поєднанні з моделлю одновісного напружено-деформованого стану пружної накладки. Це означає, що пружна накладка в вертикальному напрямку Oy_2 згинається, як звичайна балка, а у горизонтальному напрямку осі Oy_1 стискається або розтягується, як звичайний стержень в одновісному напружено-деформованому стані з скінченою жорсткістю. Виходячи з останнього, для поставленої задачі будуть мати місце рівняння

$$\frac{du(y_1)}{dy_1} = \frac{1}{E_1 t} \int_{-\infty}^{y_1} [q(t) - q_0(t)] dt \quad (-\infty < y_1 < \infty).$$

Так як стрингер (накладка) в вертикальному напрямку згинається як звичайна балка, то згин балки опишемо у вигляді

$$D \frac{d^4 v(y_1)}{dy_1^4} = P(y_1) - P_0(y_1), \quad (-\infty < y_1 < \infty)$$

при граничних умовах

$$u(y_1) = u_1(y_1); \quad v(y_1) = u_2(y_1); \quad y_1 \in (-a + 2kl < y_1 < a + 2kl); \\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

де u, v – відповідно горизонтальні і вертикальні переміщення пружної накладки в позначеннях класичної теорії пружності; $u_1(y_1), u_2(y_1)$ – відповідно горизонтальні і вертикальні переміщення граничних точок пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями; $p(y_1), q(y_1)$ – інтенсивності нормальних і горизонтальних контактних напружень.

При виведенні основної системи диференціальних рівнянь, що дозволяють розв'язати поставлену задачу, відзначимо, що на основі принципу суперпозиції [1, 7] отримаємо і використаємо функцію впливу для скінченного стрингера $y_1 \in [-a, a]$ у вигляді:

$$u_1(y_1) = \int_{-a}^a h_{11}(|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau + \int_{-a}^a h_{12}(|y_1 - \tau|) q(\tau) d\tau, \\ u_2(y_1) = \int_{-a}^a h_{21}(|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau + \int_{-a}^a h_{22}(|y_1 - \tau|) q(\tau) d\tau. \quad (1)$$

Аналогічно функції впливу для вертикальних і горизонтальних переміщень граничних точок грані пружної смуги $y_2 = 0$ з урахуванням періодичності останніх [6, 8, 9] можна записати у вигляді:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau = \int_{-a}^a h_{11}(|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau + \\ + \int_{-a-2l}^{a-2l} h_{11}(|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau + \int_{-a+2l}^{a+2l} h_{11}(|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_{-a+4l}^{a+4l} h_{11} (|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau + \int_{-a+4l}^{a+4l} h_{11} (|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau + \dots \quad (2)$$

При отриманні значення інтеграла (2) використаємо періодичність нормальних і тангенціальних контактних напружень $p(\tau)$ і $q(\tau)$

$$p(\tau) = p(\tau - 2kl) = p(\tau + 2kl) = \dots,$$

$$q(\tau) = q(\tau - 2kl) = q(\tau + 2kl) = \dots$$

Заміна змінних

$$\tau = \eta + 2kl, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

з врахуванням значення переміщень від дії одиничної нормальної і тангенціальної сили [7, 10, 11] після ряду перетворень приводить до інтегралу вигляду (2):

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} h_{11} (|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} H_{11} (\alpha) \cos (y_1 \eta) s \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos 2kls \right] ds \right\} p(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (3)$$

Інтеграл (3) можна дещо спростити, якщо використати значення [1, 12, 13]:

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos ky_1 = \frac{2\pi}{l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta (y - 2\pi k),$$

$$\delta (\alpha y_1) = \frac{1}{\alpha} \delta (y_1),$$

де $\delta (y_1)$ – одинична функція Дірака [2, 3, 14].

Після деяких перетворень [1, 6, 15] отримаємо :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} h_{11} (|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau = \frac{P_0}{2l} H_{11} (0) + \\ & + \frac{1}{l} \int_{-a}^a \sum_{k=1}^{\infty} H_{11} \left(\frac{\pi k}{l} \right) \cos \left[\frac{\pi k}{l} (y_1 - \eta) \right] p(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Застосувавши аналогічні перетворення до інших інтегралів, отримаємо

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} h_{12} (|y_1 - \tau|) q(\tau) d\tau = \\ & = \frac{Q_0}{2l} H_{12} (0) + \frac{1}{l} \int_{-1}^1 \sum_{k=1}^{\infty} H_{12} \left(\frac{\pi k}{l} \right) \times \sin \left[\frac{\pi k}{l} (y_1 - \eta) \right] q(\eta) d\eta, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h_{21} (|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau &= \\ &= \frac{P_0}{2l} H_{21} (0) + \frac{1}{l} \int_{-a}^a \sum_{k=1}^{\infty} H_{21} \left(\frac{\pi k}{l} \right) \times \sin \left[\frac{\pi k}{l} (y_1 - \eta) \right] p(\eta) d\eta, \\ \int_{-\infty}^{\infty} h_{22} (|y_1 - \tau|) q(\tau) d\tau &= \\ &= \frac{Q_0}{2l} H_{22} (0) + \frac{1}{l} \int_{-a}^a \sum_{k=1}^{\infty} H_{22} \left(\frac{\pi k}{l} \right) \times \sin \left[\frac{\pi k}{l} (y_1 - \eta) \right] q(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Запишемо асимптотичні вирази $H_{ij}(\alpha)$, $i, j = 1, 2$, при $\alpha \rightarrow 0$ і $\alpha \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} H_{11}(\alpha) &= -A; & \lim_{\alpha \rightarrow 0} H_{12}(\alpha) &= O(\alpha); \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} H_{22}(\alpha) &= A_1; & \lim_{\alpha \rightarrow \infty} H_{11}(\alpha) &= -B \cdot O(\alpha^{-1}); \\ \lim_{\alpha \rightarrow \infty} H_{22}(\alpha) &= B \cdot O(\alpha^{-1}); & \lim_{\alpha \rightarrow \infty} H_{12}(\alpha) &= -B_1 \cdot O(\alpha^{-1}), \end{aligned}$$

де A, A_1, B, B_2 – величини, що характеризують початковий (залишковий) напружено-деформований стан у пружній смузі, які визначаються для стисливих і нестисливих тіл у випадку конкретної структури пружних потенціалів згідно [2, 7, 16].

Якщо врахувати значення суми [1, 3]:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} = -\ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right|,$$

то інтеграли (3) і (4) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h_{11} (|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau &= -\frac{A}{2l} P_0 + \frac{B}{\pi} \int_{-a}^a p(\tau) \ln \left| 2 \sin \frac{\pi}{l} \left(\frac{y_1 - \eta}{2} \right) \right| dt + \\ &+ \frac{1}{l} \int_{-a}^a \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[H_{11} \left(\frac{\pi k}{l} \right) + \frac{Bl}{\pi k} \right] \cos \frac{\pi k}{l} (y_1 - \eta) \right\} p(\eta) d\eta, \quad (5) \\ \int_{-\infty}^{\infty} h_{22} (|y_1 - \tau|) q(\tau) d\tau &= -\frac{A_1}{2l} Q_0 - \frac{B}{\pi} \int_{-a}^a q(\tau) \ln \left| 2 \sin \frac{\pi}{l} \left(\frac{y_1 - \eta}{2} \right) \right| d\eta + \\ &+ \frac{1}{l} \int_{-a}^a \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[H_{22} \left(\frac{\pi k}{l} \right) + \frac{Bl}{\pi k} \right] \cos \frac{\pi k}{l} (y_1 - \eta) \right\} q(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Врахувавши (4) та значення суми [1, 3]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin ky_1}{k} = \frac{\pi - |y_1|}{2} \sin qy_1, \quad (-2\pi < y < 2\pi)$$

інтеграли (5) можна записати у вигляді таких формул:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h_{12} (y_1 - \tau) q(\tau) d\tau &= \\ &= \frac{1}{l} \int_{-a}^a \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[H_{12} \left(\frac{\pi k}{l} \right) + \frac{B_1 l}{\pi k} \right] \sin \left[\sin \frac{\pi k}{l} (y_1 - \eta) \right] \right\} q(\eta) d\eta - \end{aligned}$$

$$-\frac{B_1}{2l} \int_{-a}^a q(\tau) \sin q(y_1 - \eta) d\eta + \frac{B_1}{2l} [Q_0 y_1 - \bar{M}_0]; \quad |y_1| \leq a, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h_{21}(y_1 - \tau) p(\tau) d\tau = \\ = \frac{1}{l} \int_{-a}^a \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[H_{12} \left(\frac{\pi k}{l} \right) + \frac{B_1 l}{\pi k} \right] \sin \left[\frac{\pi k}{l} (y_1 - \eta) \right] \right\} p(\eta) d\eta - \\ - \frac{B_1}{2l} \int_{-a}^a p(\tau) \sin q(y_1 - \eta) d\eta + \frac{B_1}{2l} [P_0 y_1 - M_0]; \quad |y_1| \leq a \end{aligned}$$

при

$$\bar{M}_0 = \int_{-a}^a xq(x) dx, \quad M_0 = \int_{-a}^a xp(x) d\xi.$$

Виконаємо підстановку значень (4), (5) та (6) у (1) і знайдемо переміщення граничних точок в області контакту $y_1 \in [-a, a]$ на межі $y_2 = 0$ пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями.

$$u_1(y_1) = -\frac{B}{\pi} \int_{-a}^a q(\eta) \ln \left[2 \sin \frac{\pi}{2l} (y_1 - \eta) \right] d\eta - \frac{B_1}{2} +$$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a L_{12}(|y_1 - t|) p(\eta) d\eta + \int_{-a}^a L_{12}(|y_1 - t|) q(\eta) d\eta - \\ - \frac{1}{2l} [B_1 (Q_0 y - \bar{M}_0) - AP_0], \quad |y_1| < a \end{aligned} \quad (7)$$

$$u_2(y_1) = -\frac{B}{\pi} \int_{-a}^a q(\eta) \ln \left[2 \sin \frac{\pi}{2l} (y_1 - \eta) \right] d\eta - \frac{B_1}{2} \int_{-a}^a p(\eta) \operatorname{sign}(y_1 - \eta) d\eta +$$

$$+ \int_{-a}^a L_{22}(|y_1 - \eta|) q(\eta) d\eta + \int_{-a}^a N_{12}(y_1 - \eta) p(\eta) d\eta + \frac{1}{2l} [B_1 (P_0 y - M_0) - A_1 Q_0].$$

Введемо позначення

$$L_{11}(|y_1 - \eta|) = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \left[H_{11} \left(\frac{\pi k}{l} \right) + \frac{Bl}{\pi k} \right] \cos \frac{\pi k}{l} (y_1 - \eta),$$

$$L_{12}(y_1 - \eta) = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \left[H_{12} \left(\frac{\pi k}{l} \right) + \frac{B_1 l}{\pi k} \right] \sin \frac{\pi k}{l} (y_1 - \eta),$$

$$L_{22}(|y_1 - \eta|) = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \left[H_{22} \left(\frac{\pi k}{l} \right) + \frac{Bl}{\pi k} \right] \cos \frac{\pi k}{l} (y_1 - \eta).$$

Для того, щоб одержати вихідні функціональні рівняння, з яких визначаються невідомі контактні напруження, підставимо (7) в (1), одержимо наступну систему сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь.

$$\begin{aligned}
 D \frac{d^4}{dy_1^4} \left\{ \frac{B}{\pi} \int_{-a}^a p(\eta) \ln \left| 2 \sin \frac{\pi}{l} \left(\frac{y_1 - \eta}{2} \right) \right| d\eta - \frac{B_1}{2} \int_{-a}^a q(\eta) \operatorname{sign}(y_1 - \eta) d\eta + \right. \\
 \left. + \int_{-a}^a L_{11}(|y_1 - \eta|) p(\eta) d\eta + \int_{-a}^a L_{12}(y_1 - \eta) q(\eta) d\eta + \right. \\
 \left. + \frac{1}{2l} [B_1(Q_0 y_1 - \bar{M}_0) - AP_0] \right\} = p(y_1) - p_0(y_1), \\
 \frac{d}{dy_1} = \left\{ \frac{B}{\pi} \int_{-a}^a q(\eta) d\eta \ln \left[2 \sin \frac{\pi}{l} \left(\frac{y_1 - \eta}{2} \right) \right] d\eta - \frac{B_1}{2} \int_{-a}^a p(\eta) \operatorname{sign}(y_1 - \eta) d\eta + \right. \\
 \left. + \int_{-a}^a L_{22}(|y_1 - \eta|) q(\eta) d\eta + \int_{-a}^a L_{12}(y_1 - \eta) p(\eta) d\eta + \frac{1}{2l} [B_0(P_0 y - M_0) - A_1 Q_0] \right\} = \\
 = \frac{1}{E_1 h} \int_{-a}^a [q(\eta) - q_0(\eta)] d\eta, \quad |y_1| \leq a.
 \end{aligned}$$

Ця система розв'язується при таких граничних умовах:
при $y_1 = a$

$$\int_{-a}^a \eta p(\eta) d\eta = M_0; \quad \int_{-a}^a q(\eta) d\eta = Q_0; \quad \int_{-a}^a p(\eta) d\eta = P_0. \quad (8)$$

Систему сингулярних інтегральних рівнянь можна спростити аналогічно, як і у [1, 6, 17], ввівши нові функції.

$$\begin{aligned}
 X(\tau) &= \tilde{p}(\tau) + i\tilde{q}, \\
 \tilde{p}(\tau) &= p \left(\frac{l\tau}{\pi} \right) \frac{1}{P_0}, \quad \tilde{q}(\tau) = q \left(\frac{l\tau}{\pi} \right) \frac{1}{Q_0}, \\
 \tilde{p}_0(\tau) &= p \left(\frac{l\tau}{\pi} \right) \frac{1}{P_0}, \quad \tilde{q}_0(\tau) = q_0 \left(\frac{l\tau}{\pi} \right) \frac{1}{Q_0}.
 \end{aligned} \quad (9)$$

Після складних громіздких перетворень і заміни змінних

$$\frac{\pi}{l} y_1 = \tau, \quad \frac{\pi}{l} \eta = \xi.$$

одержимо

$$\beta_1 X(\tau) + \int_{-a}^a X(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\tau - \xi}{2} d\tau - \int_{-a}^a \tilde{L}_{11}(\tau - \xi) X(\tau) d\tau -$$

$$\begin{aligned}
& -i \int_{-a}^a \tilde{L}_{12}(\tau - \xi) X(\tau) d\tau - \int_{-a}^a \tilde{L}_{22}(\tau - \xi) \tilde{X}(\tau) d\tau - \\
& - \int_{-a}^a [\beta_2(\tau - \xi)^2 - \beta_3] \tilde{X}(\tau) d\tau - \int_{-a}^a [\beta_2(\tau - \xi) + \beta_3] \tilde{X}(\tau) d\tau = \\
& = i \left[2\beta_3 \tilde{Q}_1(\tau) + \lambda_4 \right] d\tau - 2\beta_2 \tilde{M}_1(\tau) + C.
\end{aligned} \tag{10}$$

Величини $\tilde{L}_{ij}(\tau)$, β_i – визначають початковий (залишковий) напружений стан, обчислюються для стисливих і нестисливих тіл у випадку пружних потенціалів конкретної структури для рівних і нерівних коренів визначального рівняння згідно [2, 3, 7].

Отже розв'язок поставленої задачі зведено до розв'язку сингулярного інтегрально-диференціального рівняння (10) з ядром Гілберта. Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді рядів від функції Якобі [1, 2, 7].

$$X(\tau) = w(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{X}_n P_n^{(\alpha, \beta)} \left(\operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \operatorname{tg} \frac{\tau}{2} \right), \quad |\tau| < \delta, \tag{11}$$

а функцію ваги $w(\tau)$ візьмемо у вигляді

$$\begin{aligned}
w(\tau) &= \sec \frac{\tau}{2} \left(\sin \frac{\delta - \tau}{2} \right)^\alpha \left(\sin \frac{\delta + \tau}{2} \right)^\beta, \\
\alpha &= -\frac{1}{2} - i\alpha_1; \quad \beta = -\frac{1}{2} + i\alpha_1; \quad , \alpha_1 = \frac{\ln(3 - 4c_{44})}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Відмітимо, що \tilde{X}_n – нескінченний ряд невідомих комплексних коефіцієнтів, які потрібно визначити. Для їх визначення підкладемо значення (11) в рівняння (9). В результаті, використовуючи властивості ортогональності функції Якобі [1, 3, 12], для визначення невідомих величин X_m , одержимо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned}
l_m \tilde{X}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \left[P_{m,n}^{(1)} \tilde{X}_n + P_{m,n}^{(2)} \bar{X}_n \right] &= \\
&= - \left[P_m^{(1)} \tilde{X}_0 + P_m^{(2)} \bar{X}_0 + P_m^{(3)} + R \cdot P_m^{(1)} \right], \quad (m = 1, 2, \dots).
\end{aligned} \tag{12}$$

У (12) введено позначення [1, 6]

Для розв'язку системи (12) числовим методом, визначимо коефіцієнт \bar{X}_0 і сталу R , що входять у праву частину (12). Коефіцієнт \bar{X}_0 знаходимо із першої граничної умови (8).

$$\bar{X}_0 = \frac{\operatorname{ch} \pi \alpha_1 \cdot \cos \frac{\delta}{2}}{2l} \left(1 + i \frac{Q_0}{P_0} \right).$$

Сталу R знаходимо із системи алгебраїчних рівнянь (12).

Система (12) квазірегулярна, оскільки суми

$$P_m = l_m m^4 \sum_{n^\varepsilon} \frac{1}{n^\varepsilon} \left[|P_{m,n}^{(1)}| + |P_{m,n}^{(2)}| \right] \quad (m = 1, 2, \dots)$$

та вільний член (12) мають порядок при $m \rightarrow \infty$, $O\left(m^{-\frac{1}{2}+2}\right)$. Це означає, що коефіцієнт матриці системи швидко спадає із зростанням m і n від діагональних елементів. Отже, систему (12) можна розв'язати відомими числовими методами.

5. Аналіз числових результатів. Для реалізації числового результату розглянемо випадок, коли всі періодично розміщені накладки, які підкріплюють пружну смугу з початковими (залишковими) напруженнями, навантажені тангенціальною силою $Q_0(\alpha) = Q$.

Числові результати отримані з використанням комп'ютерної ліцензованої програми Maple 15, для потенціалів у випадку рівних коренів визначального рівняння [2–4, 16] (гармонічного потенціалу та потенціалу Бартенєва-Хазановича); та у випадку нерівних коренів [2–4, 17] (потенціалу Трелоара). При обчисленні використовувалися параметри таких матеріалів [2, 4], $Ca 0$, $S1$, $Na 0$, $S2$ – пружні накладки; $Cu 0,06$, $Fe 0,045$ – пружна смуга з початковими (залишковими) напруженнями.

На рис. 2–4 проілюстровано вплив початкових (залишкових) напружень у пружній смугі на закон розподілу контактних напружень під періодично розміщеними накладками від дії тангенціальної сили $q_0(y_1) = Q_0$ для безрозмірних величин (12).

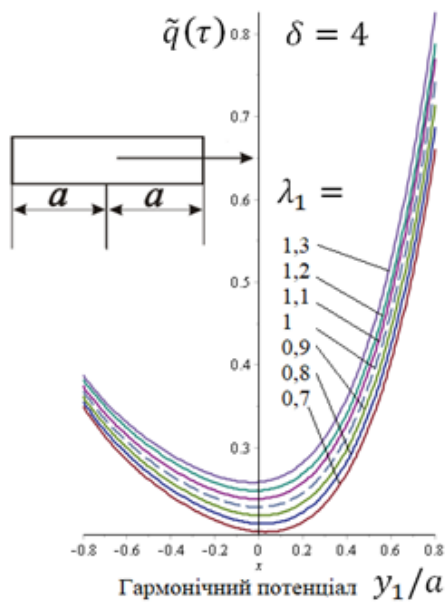


Рис. 2. Розподіл контактних напружень

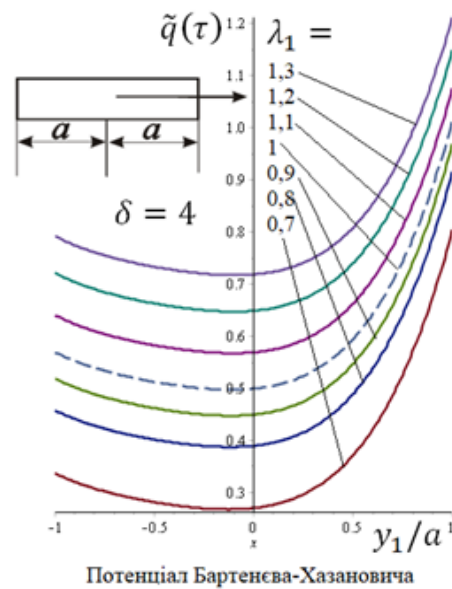


Рис. 3. Розподіл контактних напружень

На рис. 2–4 показано розміщення кривих для значення параметра $\lambda_1 = 1,3; 1,2; 1,1; 1; 0,9; 0,8; 0,7$, що характеризує початковий (залишковий) напружено-деформований стан. Пунктирна лінія відповідає пружній смугі без початкових (залишкових) напружень ($\lambda_1 = 1$), тобто відображає розв'язок аналогічної задачі у рамках класичної теорії пружності [1, 2].

6. Висновки. На основі проведеного числового аналізу можна зробити висновок про те, що закономірність впливу початкових напружень у пружній смугі на розподіл контактних тангенціальних напружень істотним чином зале-

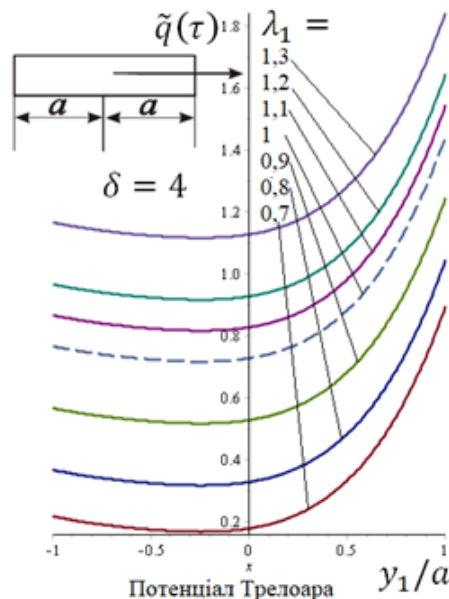


Рис. 4. Розподіл контактних напружень

жить від структури пружного потенціалу в смузі.

Більш істотний вплив кількісного характеру початкові напруження мають у високо еластичних матеріалах, порівняно з жорсткими, а якісний вплив – співпадає. Причому, при стиску ($\lambda_1 < 1$) контактні напруження зменшуються, а у випадку розтягу ($\lambda_1 > 1$) збільшуються. Цей результат можна ефективно використовувати для регулювання контактних характеристик при розрахунку конструкцій на міцність.

Список використаної літератури

1. Саркисян В. С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван : Изд. Ереван. ун-та, 1983. 260 с.
2. Гузь О. М., Бабич С. Ю., Рудницький В. Б. Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями. Київ : Вища шк., 1995. 305 с.
3. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Глухов Ю. П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. Германия : Saarbrücken LAPLAMBERT Academic Publishing, 2015. 468 с.
4. Yaretska N. O. Mathematical model and solution of spatial contact problem for prestressed cylindrical punch and elastic layer. *Innovative paradigm of the development of modern physical-mathematical sciences*: Collective monograph. Riga, Latvia : "Baltija Publishing", 2022. P. 261–295.
5. Babich S. Yu., Guz A. N., Rudnitsky V. B. Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches. *International Applied Mechanics*. 2004. Vol. 40, № 7. P. 744–765.
6. Babich. S. Yu., Dikhtyaruk N. N., Degtyar S. V. Contact Problem for Two Identical Strips Reinforced by Periodically Arranged Fasteners with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*. 2019. Vol. 55, № 6. P. 629–635.
7. Діхтярук М. М. Визначення функції впливу для пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями. Пр. 4-го Міжнародного симпозіуму з трибофатики (ISTF), (м. Тернопіль, Україна, 23–27 вересня 2002 р.). Відп. ред. В. Т. Трощенко. Тернопіль : Терноп. держ. техн. ун-т ім. Івана Пулюя, 2002. С. 426–431.
8. Діхтярук М. М. Періодична контактна задача для пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями. *Доповіді НАН України*, 2004. № 3. С. 46–49.
9. Rudnitsky V. B., Dikhtyaruk N. N. A prestressed elastic strip with elastic reinforcements.

- International Applied Mechanics*. 2002. Vol. 38, № 11. P. 1354–1360.
10. Babich. S. Yu., Dikhtyaruk N. N. Load transfer from an infinite inhomogeneous stringer to an elastic strip clamped by one face with initial stresses. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56, № 6. P. 346–356.
 11. Dikhtyaruk N. N. Load transfer from the infinite stringer to the two jammed along one edge identical stripes with initial (residual) stresses. *Scientific journal of the Ternopil national technical university*. 2016. Vol. 83, № 3. P. 51–61.
 12. Dikhtyaruk N. N. Equilibrium of a Prestressed Strip Reinforced with Elastic Plates. *International Applied Mechanics*. 2004. Vol. 40, № 3. P. 290–296.
 13. Rudnitsky V. B., Dikhtyaruk N. N. Interaction Between an Infinite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem. *International Applied Mechanics*. 2017. Vol. 53, № 2. P. 149–155.
 14. Babych S. Y., Yarets'ka N. O. Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. 2021. Vol. 57. № 3. P. 297–305.
 15. Рудницький В. Б., Дихтярук Н. Н. Упругая полоса с начальными напряжениями, усиленная упругими накладками. *Прикладна механіка*. 2002. Вип. 38, № 11. С. 81–88.
 16. Yaretskaya N. A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. *International Applied Mechanics*. 2014. Vol. 50, № 4. P. 378–388.
 17. Yaretskaya N. F. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. 2018. Vol. 54, № 5. P. 539–543.

Dikhtiaruk N. N., Yarets'ka N. O., Kravchuk O. A. Investigation of contact interaction with periodic reinforcement of pre-stressed strip with thin sustaining elements.

The qualitative and quantitative influence of initial (residual) stresses on the law of distribution of contact characteristics at interaction of elastic finished overlays (stringers), at their placement, with a preliminary tension strip is investigated. The study was performed within the framework of the linearized theory of elasticity for compressible and incompressible bodies. Fourier integral methods, methods for solving harmonic differential equations, singular integral-differential equations and numerical methods were used. We make the assumption that the elastic band with initial (residual) stresses is in the conditions of plane deformation. Also, for an elastic lining loaded with both vertical and horizontal forces, the generally accepted model of beam bending in combination with the model of uniaxial stress-strain state of the elastic lining is valid. A singular integral-differential equation with the Gilbert kernel was derived, which allows us to solve this problem. We find the analytical solution of the equation in the form of series from the Jacobi function. Numerical studies were performed for materials with elastic potentials of harmonic type (compressible bodies) and elastic potentials of Bartenev-Khazanovich and Treloar (incompressible bodies). Numerical studies have been performed for materials with elastic potentials of harmonic type (compressible bodies) and elastic potentials of Bartenev-Khazanovich and Treloir (incompressible bodies). We have considered the case when all periodically placed pads that support the elastic band with the initial (residual) stresses were loaded with tangential force. Analysis of numerical results shows a significant effect of pre-stressed deformed state on the distribution of contact characteristics of the periodically reinforced strip with thin reinforcing elements. The results obtained can be used for engineering calculations for the strength and durability of structures, taking into account the initial (residual) stresses for a wide range of structural materials.

Keywords: stress-strain state, initial (residual) stresses, Jacobi function, Fourier transform.

References

1. Sarkisyan, V. S. (1983). Kontaktnyye zadachi dlya poluploskostey i polos s uprugimi nakladkami. *Yerevan : Izd. Yerevan. un-ta*. [in Russian].

2. Huz, O. M., Babych, S. Yu., & Rudnytskyi, V. B. (1995). Kontaktna vzaiemodiia pruzhnykh til z pochatkovymy napruzhenniamy. *Kyiv : Vyshcha shk.* [in Ukrainian].
3. Guz', A. N., Babich, S. Yu., & Glukhov, Yu. P. (2015). Smeshannye zadachi dlya uprugogo osnovaniya s nachal'nymi napryazheniyami [Mixed problems for an elastic base with initial stresses]. LAP LAMBERT Academic Publishing. [in Russian].
4. Yaretska, N. O. (2022). Mathematical model and solution of spatial contact problem for prestressed cylindrical punch and elastic layer. [Innovative paradigm of the development of modern physical-mathematical sciences: Collective monograph]. "Baltija Publishing". 261–295.
5. Babich, S. Yu., Guz, A. N., & Rudnitsky, V. B. (2004). Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches. *International Applied Mechanics*, 40(7), 744–765.
6. Babich, S. Yu., Dikhtyaruk, N. N., & Degtyar, S. V. (2019). Contact Problem for Two Identical Strips Reinforced by Periodically Arranged Fasteners with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*, 55(6), 629–635.
7. Dikhtiaruk, M. M. (2002). Vyznachennia funktsii vplyvu dlia pruzhnoi smuhy z pochatkovymy (zalyshkovymy) napruzhenniamy. [Title]. *Pr. 4-ho Mizhnarodnoho sympoziumu z trybofatyky (ISTF)*, (m. Ternopil, Ukraina, 23–27 veresnia 2002 r.) / Vidp. red. V. T. Troshchenko. Ternopil: Ternop. derzh. tekhn. un-t im. Ivana Puliuia, 426–431. [in Ukrainian].
8. Dikhtiaruk, M. M. (2004). Periodychna kontaktna zadacha dlia pruzhnoi smuhy z pochatkovymy (zalyshkovymy) napruzhenniamy. *Dopovidi NAN Ukrainy*, 3, 46–49. [in Ukrainian].
9. Rudnitsky, V. B., & Dikhtyaruk, N. N. (2002). A prestressed elastic strip with elastic reinforcements. *International Applied Mechanics*, 38(11), 1354–1360.
10. Babich, S. Yu., & Dikhtyaruk, N. N. (2020). Load transfer from an infinite inhomogeneous stringer to an elastic strip clamped by one face with initial stresses. *International Applied Mechanics*, 56(6). 346–356.
11. Dikhtyaruk, N. N. (2016). Load transfer from the infinite stringer to the two jammed along one edge identical stripes with initial (residual) stresses. *Scientific journal of the Ternopil national technical university*, 83(3). 51–61.
12. Dikhtyaruk, N. N. (2004). Equilibrium of a Prestressed Strip Reinforced with Elastic Plates. *International Applied Mechanics*, 40(3), 290–296.
13. Rudnitsky, V. B., & Dikhtyaruk, N. N. (2017). Interaction Between an Infinite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem. *Int. Appl. Mech.*, 53(2), 149–155.
14. Babych, S. Y., & Yarets'ka, N. O. (2021). Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*, 57(3), 297–305.
15. Rudnitskiy, V. B., & Dikhtyaruk, N. N. (2002). Uprugaya polosa s nachal'nymi napryazheniyami, usilennaya uprugimi nakladkami. *Prikladna mekhanika*, 38(11), 81–88. [in Russian].
16. Yaretskaya, N. A. (2014). Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. *International Applied Mechanics*, 50(4), 378–388.
17. Yaretskaya, N. F. (2018). Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*, 54(5), 539–543.

Одержано 15.04.2022