

УДК 539.3

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).91-102](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).91-102)**С. Ю. Бабич¹, Н. О. Ярецька², В. Ф. Лазар³, Н. П. Щекань⁴**

¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
провідний науковий співробітник,
доктор технічних наук, професор
babich_sy@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2642-9115>

² Хмельницький національний університет,
доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань,
кандидат фізико-математичних наук
yaretskano@khmnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3726-2878>

³ Мукачівський державний університет,
доцент кафедри інженерії, технологій та професійної освіти,
кандидат технічних наук
vflazar@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2457-571X>

⁴ Київський національний економічний університет ім. Вадими Гетьмана,
старший викладач кафедри вищої математики,
nadshhek@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1784-6139>

АНАЛІТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СТАТИЧНОЇ ЗАДАЧІ ПРО ТИСК ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ ПІВПРОСТОРІВ ТА ПРУЖНОГО ЦИЛІНДРА З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Стаття присвячена розв'язку контактної задачі для попередньо напруженого циліндричного штампта та двох пружних півпросторів з початковими напруженнями в аналітичному вигляді без врахування сил тертя. Будемо вважати, що поверхні поза межею контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а на межі контакту переміщення та напруження — неперервні. Задачу розв'язано у випадку нерівних коренів визначального рівняння. Дослідження представлено у загальному виді для теорії великих початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій у межах лінеаризованої теорії пружності при довільній структурі пружного потенціалу. Припускається, що початкові стани пружного циліндричного штампта та пружних основ (півпросторів) однорідні та рівні. Дослідження проводиться в координатах початкового деформованого стану, які пов'язані з лагранжевими координатами (природного стану). Крім того, вплив циліндричного штампта викликає невеликі збурення відповідних величин основного напружено-деформованого стану. Також передбачається, що пружний циліндричний штамп та пружні півпростори виготовлені з різних ізотропних, трансверсально-ізотропних або композитних матеріалів. У випадку ортотропних тіл, будемо вважати, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають із напрямком осей координат у деформованому стані. Наведені загальні розв'язки основних диференціальних рівнянь лінеаризованої теорії пружності у випадку осесиметричної деформації для скінченної циліндричної області. У результаті, розв'язки поставленої задачі представлені у вигляді нескінченних рядів, коефіцієнти яких визначаються з нескінченної системи алгебраїчних рівнянь. Відмітимо, що коефіцієнти системи залежать від величин, що визначають структуру пружного потенціалу та висоту пружного штампта. У статті також встановлено зв'язок між осіданням та рівнодіючою навантаження. Отже, за допомогою отриманих розв'язків можна вивчити

вплив початкових (залишкових) напружень у двох пружних півпросторах та пружному циліндричному штампі на розподіл контактних напружень в області контакту.

Ключові слова: початкові напруження, напружено-деформований стан, лінеаризована теорія пружності, півпростір, циліндричний штамп.

1. Вступ. Дослідження процесів контактної взаємодії пружних тіл із врахуванням початкових напружень є частиною великої за обсягом та актуальної області механіки суцільних середовищ, що безперервно розвивається. Велика увага приділяється дослідженню контактної взаємодії твердих деформованих тіл, що пов'язана із проблемою визначення їх напружено-деформованих станів. Оскільки контактні задачі формують теоретичну основу для розрахунків на контактну міцність, жорсткість та зносостійкість рухомих і нерухомих з'єднань, а їх дослідження зводяться до одних із найважчих рівнянь математичної фізики, то їх розв'язання пов'язане із великими математичними труднощами.

Одним з важливих факторів при контактній взаємодії є вплив початкових напружень, які практично завжди присутні в реальних конструкціях і деталях машин, тому розробка ефективних методів розрахунку напружено-деформованого стану з врахуванням початкових деформацій є актуальною і важливою науково-технічною проблемою.

На даний час з проблем, що мають відношення до контактних задач жорстких та пружних штампів, які взаємодіють із пружними тілами без початкових напружень отримані результати з широкого кола питань. І вони достатньо відображені у численних публікаціях періодичних видань, однією із яких є праця [1]. Роботи з контактної взаємодії тіл присвячені взаємодії попередньо напружених тіл із жорсткими та пружними штампами без початкових напружень представлені у працях [2–4]. Дослідження контактної взаємодії попередньо напружених штампів з пружними тілами з початковими напруженнями висвітлені у працях [5, 6]. Існує також ряд інших публікацій, що повністю або частково пов'язані із тематикою даної статті [7–12].

Метою роботи є представлення аналітичного розв'язку статичної контактної задачі про тиск двох попередньо напружених півпросторів на циліндричний пружний штамп з початковими (залишковими) напруженнями без врахування сил тертя в межах лінеаризованої теорії пружності. У статті розглянуто випадок нерівних коренів визначального рівняння [2, 3] в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

2. Постановка задачі. Нехай скінченний пружний циліндричний штамп висотою H з початковими напруженнями (рис. 1), геометрична вісь симетрії якого співпадає з віссю y_3 циліндричної системи координат (r, θ, y_3) стискається (розтягується) двома ідентичними попередньо напруженими півпросторами за допомогою вісесиметричного навантаження, що зводиться до рівнодійної сили P . Зовнішнє навантаження прикладене таким чином, що точки не навантажених поверхонь обох попередньо напружених півпросторів та віддалених від області контакту півпросторів з пружним штампом, переміщуються відносно координатної площини $y_3 = 0$ на величину ε . Величини: R — радіус циліндричного штампа, $h = 0.5H$.

Будемо вважати, що поверхні поза межею контакту залишаються вільними

від впливу зовнішніх сил, а на межі контакту переміщення та напруження — неперервні. На рис. 1 величини λ_i ($i = 1, 2, 3$) — коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового стану, а S_0^{11}, S_0^{22} — компоненти симетричного тензора початкових напружень.

Будемо розглядати пружні ізотропні тіла (стисливі або нестисливі) з довільною формою пружного потенціалу. А у випадку ортотропних тіл, будемо вважати, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають із напрямком осей координат у деформованому стані y_i ($i = \overline{1, 3}$).

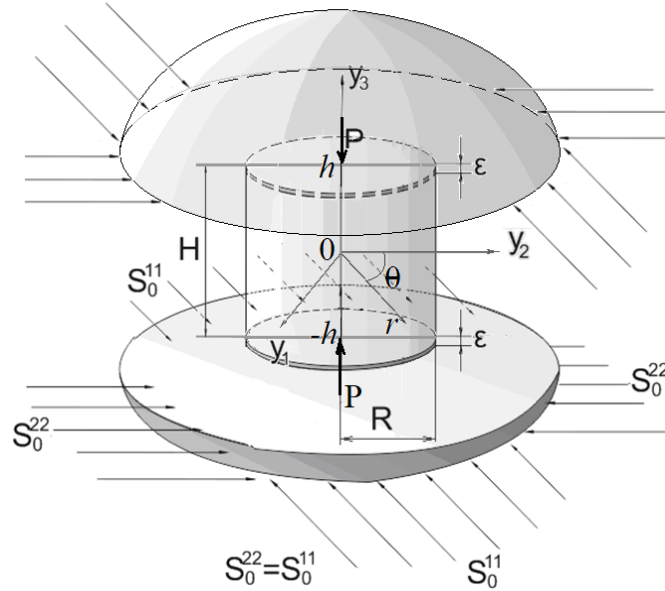


Рис. 1. Тиск двох попередньо напружених півпросторів на пружний циліндричний штамп з початковими напруженнями.

Відзначимо, що усі величини, які відносяться до пружного циліндричного штампа позначаються верхнім індексом «(3)», верхнього півпростору — «(1)», а нижнього півпростору — «(2)». Також зробимо припущення, що початкові напружено-деформовані стани у штампі та півпросторах однорідні та рівні. У класичному випадку (при відсутності початкових напружень) подібна контактна задача була розглянута у [1].

3. Основні співвідношення та граничні умови. Скажімо, що початкові стани півпросторів та штампа — однорідні, й для них виконуються співвідношення [2, 3]:

$$y_m = x_m + U_m^0 \quad U_m^0 = \delta_{mi}(\lambda_m - 1)\lambda_i^{-1}y_i \quad (i, m = \overline{1, 3}),$$

де δ_{mi} — символ Кронекера.

Тоді основне рівняння у переміщеннях [3] для стисливих тіл має вигляд

$$L'_{m\alpha}U_\alpha = 0, \quad L'_{m\alpha} = \omega'_{ij\alpha\beta}\partial^2/\partial y_i\partial y_\beta, \quad (i, m, \alpha, \beta = \overline{1, 3}), \quad (1)$$

а для нестисливих тіл має виконуватися умова нестисливості:

$$L'_{m\alpha}U_\alpha + q'_{\alpha m}\partial p'/\partial y_\alpha = 0, \quad L'_{m\alpha} = \kappa'_{im\alpha\beta}\partial^2/\partial y_i\partial y_\beta, \quad (2)$$

$$q'_{ij} \partial U_j / \partial y_i = 0, \quad q'_{ij} = \lambda_i q_{ij}, \quad (i, j, m, \alpha, \beta = \overline{1, 3}).$$

Вирази для компонент тензора напружень для стисливих і нестисливих тіл при $y_i = \text{const}$ ($i = 1, 2, 3$) матимуть вигляд

$$Q'_{ij} = \begin{cases} \omega'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta} - \text{для стисливих тіл,} & \omega'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \omega_{ij\alpha\beta}, \\ \kappa'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial C_\beta} + q'_{ij} p - \text{для нестисливих тіл,} & \kappa'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \kappa_{ij\alpha\beta}, \end{cases}$$

де $\omega'_{ij\alpha\beta} = \omega'_{ij\alpha\beta}(S_{11}^0, S_{22}^0, S_{33}^0)$, $\kappa'_{ij\alpha\beta} = \kappa'_{ij\alpha\beta}(S_{11}^0, S_{22}^0, S_{33}^0)$ — складові тензора модулів пружності четвертого порядку.

При однорідних початкових напруженнях має місце умова:

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0; \quad S_0^{33} = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3. \quad (3)$$

Враховуючи (3), розв'язок рівнянь (1), (1) представимо через функцію $\tilde{\chi}$, яка у циліндричних координатах (r, θ, y_3) задовольняє рівняння

$$\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_1 + \tilde{\chi}_2, \quad \left(\Delta_1 + \xi_2'^2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \tilde{\chi}_1 = 0, \quad \left(\Delta_1 + \xi_3'^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \tilde{\chi}_2 = 0, \quad (4)$$

де $\Delta_1 = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r$.

Як було зазначено вище, у даній статті обмежимося випадком нерівних коренів ($\xi_2'^2 \neq \xi_3'^2$) характеристичного (визначального) рівняння, що відповідає рівнянням (4).

У системі колових циліндричних координат (r, θ, z_i) , де $z_i = v_i^{-1} y_3$, $v_i = \sqrt{n_i}$, ($i = 1, 2$), $n_1 = \xi_2'^2$, $n_2 = \xi_3'^2$ такій постановці відповідають граничні умови:

- 1) на торцях пружного штамп в області контакту $z_i = \pm h / v_i$, де $v_i = \sqrt{n_i}$, ($i = \overline{1, 2}$):

$$u_3^{(i)} - u_3^{(3)} = \varepsilon, \quad Q_{33}^{(3)} = Q_{33}^{(i)}, \quad Q_{3r}^{(3)} = 0, \quad (5)$$

$$Q_{3r}^{(i)} = 0, \quad (0 \leq r \leq R), \quad (i = 1, 2),$$

- 2) на межах пружних півпросторів поза ділянкою контакту $z_i = \pm h / v_i$, ($i = \overline{1, 2}$):

$$Q_{33}^{(i)} = 0, \quad Q_{3r}^{(i)} = 0, \quad u_3^{(i)} = 0, \quad (r > R), \quad (i = 1, 2), \quad (6)$$

- 3) на боковій поверхні пружного штамп $r = R$:

$$Q_{rr}^{(3)} = 0, \quad Q_{3r}^{(3)} = 0, \quad (|z_i| \leq h / v_i), \quad (i = 1, 2), \quad (7)$$

Умова рівноваги, яка встановлює зв'язок між осіданням торців та рівнодією навантаження P має вигляд:

$$P = -2\pi \int_0^R r |Q_{33}^{(i)}| dr, \quad |Q_{33}^{(i)}| = |Q_{3r}^{(i)}|_{z_i = \pm h / v_i}, \quad (i = 1, 2). \quad (8)$$

Умова (8) закриває постановку просторової лінеаризованої задачі про контактну взаємодію попередньо напруженого скінченного циліндричного штампа із двома пружними півпросторами з початковими напруженнями.

Напружено-деформований стан в області контакту ($y_3 = \pm h$, $z_i = \pm h/v_i$), ($i = 1, 2$) у попередньо напружених півпросторах будемо визначати згідно лінеаризованих рівнянь [3]:

$$Q'_{33}{}^{(i)}\left(\rho; \pm \frac{h}{v_i R}\right) = \frac{C_{44}(1+m_1)l_1(s-s_3)}{R} \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta,$$

$$Q'_{3r}{}^{(i)}\left(\rho; \pm \frac{h}{v_i R}\right) = 0, \quad U'_{3'}{}^{(i)}\left(\rho; \pm \frac{h}{v_i R}\right) = -\frac{m_1(s_2-s_3)}{v_1} \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta\rho) d\eta, \quad (9)$$

$$U'_{r'}{}^{(i)}\left(\rho; \pm \frac{h}{v_i R}\right) = (s_3-1) \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_1(\mu\rho) d\eta.$$

де

$$C_{44} = \begin{cases} w'_{1313}, \\ \kappa'_{1313}. \end{cases} \quad m_i = \begin{cases} \frac{\omega'_{1111}n_i - \omega'_{3113}}{\omega'_{1133} + \omega'_{1313}}; \\ \frac{\lambda_1 q_1}{\lambda_3 q_3} n_i; \end{cases}$$

$$l_i = \begin{cases} \frac{\omega'_{1331}}{\kappa'_{1313}} + \frac{\omega'_{1313} - \omega'_{1331}}{\kappa'_{1313}} \frac{\omega'_{1133} + \omega'_{1313}}{\omega'_{1111}n_i + \omega'_{1133}}; \\ \frac{\omega'_{1313}}{\kappa'_{1313}} + \frac{\omega'_{1313} - \kappa'_{1331}}{\kappa'_{1313}} \frac{\omega'_{1111}n_i + \omega'_{1133}}{\lambda_3 q_3 + \lambda_1 q_1 n_i}; \end{cases}$$

$$\xi = \frac{z_i v_i}{R}, \quad \eta = \xi R, \quad (i = 1, 2), \quad s = s_0 l_2 l_1^{-1}, \quad s_0 = (1+m_2)(1+m_1)^{-1},$$

$$s_1 = (m_1 - 1)m_1^{-1}, \quad s_2 = (v_1 m_2)(v_2 m_1)^{-1}, \quad s_3 = s_0 v_1 v_2^{-1},$$

$F(\eta)$ – шукана функція, $J_v(x)$ – функції Бесселя дійсного аргументу.

Загальний розв'язок для визначення напружено-деформованого стану у циліндричному пружному штампі з початковими напруженнями у випадку нерівних коренів ($\xi_2^2 \neq \xi_3^2$) характеристичного рівняння (4) приймемо у вигляді:

$$\tilde{\chi} = 3C_0 r^2 (z_1 - z_2) - 2C_0 (z_1^3 + z_2^3) + \sum_{k=1}^{\infty} \{ [A_k I_0(\gamma_k v_1 r) S_1(\gamma_k v_1 z_1) + B_k I_0(\gamma_k v_2 r) S_1(\gamma_k v_2 z_2)] + J_0(\alpha_k r) [S_2(\alpha_k z_1) + S_3(\alpha_k z_2)] \}, \quad (10)$$

де $I_v(x)$ – функція Бесселя уявного аргументу.

$$S_1 = C_k \sin(\gamma_k v_1 z_1) + D_k \cos(\gamma_k v_1 z_1), \quad S_2 = E_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + F_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1),$$

$$S_3 = N_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + M_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1),$$

$C_k, D_k, E_k, F_k, N_k, M_k, A_k, B_k$ – деякі сталі коефіцієнти, α_k, γ_k – власні значення задачі (5)–(8).

Тоді напружено-деформований стан у попередньо напруженому циліндричному штампі для стисливих (нестисливих) тіл та нерівних коренів рівняння (4), із врахуванням граничних умов (5)–(8), представимо у вигляді

$$\begin{aligned}
U'_{33} &= \frac{\varepsilon\omega_2}{R} \left\langle -\frac{R}{\omega_2 h \theta_6} \left[\frac{m_1 z_1}{n_1} + \frac{m_2 z_2}{n_2} \right] \chi_0 + \right. \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{n_1} \left\{ \gamma_k^2 \left[\frac{s_0 m_1 I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} I_0(\gamma_k v_1 R \rho) \sin(\gamma_k v_1 z_1) - m_2 I_0(\gamma_k v_2 R \rho) \sin(\gamma_k v_2 z_2) \right] + \right. \\
&+ \frac{\mu_k^2}{R^2} J_0(\mu_k \rho) F_k^* \left[\frac{m_1}{n_1} \left(\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2) \left[\operatorname{cth} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0) v_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \left[\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k z_1}{R} \right) + \right. \\
&+ \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k z_1}{R} \right) \left. \right) + \frac{m_2}{n_2} \left(\frac{v_2 \left[\operatorname{cth} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{\operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \left[\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k z_2}{R} \right) - \right. \\
&\left. \left. - \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k z_2}{R} \right) \frac{n_2 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right)}{n_1 s_0 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right)} \right) \right] \right\} \chi_k \rangle, \quad (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q'_{33} &= \varepsilon C_{44} (1 + m_1) l_1 \left\langle -\frac{\chi_0}{h \theta_6} \left[\frac{1}{v_1} + \frac{s}{v_2} \right] + \right. \\
&+ \frac{\omega_2}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \left\{ \gamma_k^3 \left[\frac{s_0 I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} I_0(\gamma_k v_1 R \rho) \cos(\gamma_k v_1 z_1) - \frac{s n_2}{n_1} I_0(\gamma_k v_2 R \rho) \cos(\gamma_k v_2 z_2) \right] + \right. \\
&+ \frac{\mu_k^3}{R^3 n_1} J_0(\mu_k \rho) F_k^* \left[\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2) \left[\operatorname{cth} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0) n_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \left[\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \right] \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k z_1}{R} \right) + \right. \\
&+ \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k z_1}{R} \right)}{v_1} + \frac{s \left[\operatorname{cth} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{\operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \left[\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k z_2}{R} \right) - \right. \\
&\left. \left. - \frac{s v_2 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right)}{n_1 s_0 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right)} \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k z_2}{R} \right) \right] \right\} \chi_k \rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q'_{3r} &= C_{44} (1 + m_1) \frac{\varepsilon\omega_2}{R v_1} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \left\{ \gamma_k^3 s_0 \left[\frac{I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} I_1(\gamma_k v_1 R \rho) \sin(\gamma_k v_1 z_1) - \right. \right. \\
&\left. \left. - \frac{v_2}{v_1} I_1(\gamma_k v_2 R \rho) \sin(\gamma_k v_2 z_2) \right] - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\mu_k^3}{R^3} J_1(\mu_k \rho) F_k^* \left[\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2) \left[\operatorname{cth} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0) n_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \left[\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k z_1}{R} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{v_1} \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k z_1}{R} \right) + \frac{s_0 v_1 \left[\operatorname{cth} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{v_2 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \left[\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k z_2}{R} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right)}{v_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right)} \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k z_2}{R} \right) \right] \left. \right\} \chi_k,
 \end{aligned}$$

де

$$\omega_2 = \frac{v_1^3}{m_1(s_3 - s_2)}, \quad \tilde{c}_0 = \begin{cases} \omega'_{1111} \omega'^{-1}_{1122}; \\ \lambda_1 q_1 (\lambda_3 q_3)^{-1} (\kappa'_{1133} + \kappa'_{1313}) \kappa'^{-1}_{1122}; \end{cases}$$

$$\tilde{c}_i = \begin{cases} \lambda_3 \omega'_{1133} m_i \omega'^{-1}_{1122} n_i^{-1}; \\ (\kappa'_{1133} m_i - \kappa'_{3113}) \kappa'^{-1}_{1122} n_i^{-1}; \end{cases} \quad (i = \overline{1, 2}).$$

$$\begin{aligned}
 F_k^* = & (1 + \alpha_k^3) \gamma_k^3 \left[\frac{n_1 \tilde{A}_k^* G_k(1; R)}{1 - \gamma_k^2 v_1^2} \left(\gamma_k v_1 \sin(\gamma_k h) \cos \left(\frac{h}{v_1} \right) - \cos(\gamma_k h) \sin \left(\frac{h}{v_1} \right) \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{n_2 G_k(2; R)}{1 - \gamma_k^2 v_2^2} \left(\gamma_k v_2 \sin(\gamma_k h) \cos \left(\frac{h}{v_2} \right) - \cos(\gamma_k h) \sin \left(\frac{h}{v_2} \right) \right) \right] / \\
 & / \left(\alpha_k^3 J_0(\alpha_k R) \left[\frac{\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0}{v_1} E_k^* \left(\alpha_k \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \cos \left(\frac{h}{v_1} \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \sin \left(\frac{h}{v_1} \right) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\tilde{c}_2 - \tilde{c}_0}{v_2} N_k^* \left(\alpha_k \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_2} \right) \cos \left(\frac{h}{v_2} \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_2} \right) \sin \left(\frac{h}{v_2} \right) \right) \right] \right),
 \end{aligned}$$

$$N_k^* = \frac{v_2 \left[\operatorname{cth} \left(\frac{\alpha_k h}{v_2} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right]}{n_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_2} \right) \left[\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]},$$

$$E_k^* = \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2) \left[\operatorname{cth} \left(\frac{\alpha_k h}{v_2} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right]}{(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0) v_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \left[\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]},$$

$$G_k(i; R) = (\tilde{c}_0 - \tilde{c}_1) I_0(\gamma_k v_i r) + \frac{1 - \tilde{c}_0}{\gamma_k v_i r} I_1(\gamma_k v_i r),$$

$$\theta_6 = m_1 v_1^{-3} + m_2 v_2^{-3}, \quad \tilde{A}_k^* = -\frac{s_0 I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)}.$$

де χ_k – шукані сталі.

4. Метод розв'язку. Використовуючи розв'язок для циліндричного штамп-па (11) та задовольняючи третій умові (5), другій умові (7), знаходимо власні значення задачі Штурма-Ліувілля для $n_1 \neq n_2$:

$$\gamma_k = \frac{\pi k}{h}, \quad \alpha_k = \frac{\mu_k}{R}, \quad (J_1(\alpha_k R) = 0). \quad (12)$$

З перших граничних умов (5)–(6) визначимо невідому функцію $F(\eta)$ для (10) з подвійних інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta\rho) d\eta &= q(\rho), \quad 0 < \rho < 1 \\ \int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta &= 0, \quad \rho > 1. \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \left(q(\rho) = \varepsilon \left\langle (1 - \chi_0) \frac{\omega_2}{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k J_0(\mu_k \rho) F_k^* \left[\frac{m_1}{n_1} \left(E_k^* \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{m_2}{n_2} \left(N_k^* \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{R v_2} \right) + M_k^* \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{R v_2} \right) \right) \right] \chi_k \right\rangle \right). \end{aligned}$$

Відповідно до [3] розв'язок системи (13), знайдемо у вигляді:

$$F(\eta) = \frac{2\eta}{\pi} \left[\cos \eta \int_0^1 \frac{y f(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy + \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} du \int_0^1 \eta y \sin(\eta y) f(yu) dy \right].$$

Отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{F(\eta)}{\eta} &= \frac{2\varepsilon}{\pi} \left((1 - \chi_0) \frac{\omega_2}{n_1} \psi(\eta, 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{R} F_k^* \left[\frac{m_1}{n_1} \left(E_k^* \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{m_2}{n_2} \left(N_k^* \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{R v_2} \right) + M_k^* \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{R v_2} \right) \right) \right] \chi_k \psi(\eta, \mu_k) \right), \quad (14) \\ \left(\psi(\eta, \mu_k) &= \frac{\eta \sin \eta \cos \mu_k - \mu_k \sin \mu_k \cos \eta}{\eta^2 - \mu_k^2}, \quad \psi(\eta, 0) = \frac{\sin \eta}{\eta} \right). \end{aligned}$$

Для визначення сталих коефіцієнтів $C_k, D_k, E_k, F_k, N_k, M_k, A_k, B_k$ та функції $F(\eta)$ було введено нові змінні:

$$\int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} J_1(\eta\rho) d\eta = -\frac{\varepsilon R(v_2 + v_1 s)}{2v_1 v_2 h(s - s_3) \theta_6} \chi_0, \quad \chi_k = -\frac{R n_1}{\varepsilon \mu_n \omega_2} \tilde{B}_k. \quad (15)$$

З другої умови (5) отримаємо:

$$\int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = \frac{R}{s - s_3} \left\langle \frac{\varepsilon}{h \theta_6} \left[\frac{1}{v_1} + \frac{s}{v_2} \right] \chi_0 + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^3 \cos(\gamma_k h) [\tilde{A}_k^* n_1 I_0(\gamma_k v_1 R \rho) + s n_2 I_0(\gamma_k v_2 R \rho)] - \right. \\
 & - \frac{\mu_k^4 \varepsilon \omega_2}{R^4 n_1} J_0(\mu_k \rho) \left[\frac{1}{v_1} \left(E_k^* \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{R v_1} \right) + \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{R v_1} \right) \right) + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{s}{v_2} \left(N_k^* \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{R v_2} \right) + M_k^* \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{R v_2} \right) \right) \right] F_k^* \right\} \chi_k \Bigg\rangle, \\
 & \left(M_k^* = -n_2 \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \cdot \left(n_1 s_0 \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_2} \right) \right)^{-1} \right).
 \end{aligned}$$

Проінтегруємо рівність (14) по $\rho J_0(\mu_n \rho) d\rho$:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \rho J_0(\mu_n \rho) \int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta d\rho = \frac{R}{s - s_3} \left\langle \frac{\varepsilon J_1(\mu_n)}{h \theta_6 \mu_n} \left[\frac{1}{v_1} + \frac{s}{v_2} \right] \chi_0 + \right. \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^3 \cos(\gamma_k h) J_0(\mu_k) \left[\frac{\tilde{A}_k^* \gamma_k v_1^3 R I_1(\gamma_k v_1 R)}{\mu_n^2 + \gamma_k^2 n_1 R^2} + \frac{s \gamma_k v_2^3 R I_1(\gamma_k v_2 R)}{\mu_n^2 + \gamma_k^2 n_2 R^2} \right] + \right. \\
 & + \frac{\mu_k^4 \varepsilon \omega_2}{2 R^4 n_1} J_0^2(\mu_k) \left[\frac{1}{v_1} \left(E_k^* \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{R v_1} \right) + \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{R v_1} \right) \right) + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{s}{v_2} \left(N_k^* \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{R v_2} \right) + M_k^* \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{R v_2} \right) \right) \right] F_k^* \right\} \chi_k \Bigg\rangle,
 \end{aligned}$$

та врахувавши інтеграли:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} \psi(\eta, \mu_k) J_1(\eta) d\eta = \int_0^1 \rho J_0(\mu_k \rho) \int_0^{\infty} \eta J_0(\eta \rho) d\eta d\rho = \psi(0, \mu_k), \\
 & \int_0^{\infty} \psi(\eta, 0) J_1(\eta) d\eta = 1, \quad \int_0^{\infty} \eta \psi(\eta, \mu_k) \int_0^1 \rho J_0(\mu_n \rho) J_0(\eta \rho) d\rho d\eta = \psi(\mu_n, \mu_k).
 \end{aligned}$$

Отримаємо нескінченну систему для відшукування невідомих χ_0, χ_k , що входять до (2), (9), (13) та (14):

$$\tilde{\alpha}_k \chi_k + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\alpha}_{kn} \chi_n = \tilde{\beta}_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\tilde{\alpha}_0 = \varepsilon \left(\frac{R(v_2 + s)}{2 h v_1 v_2 \theta_6 (s - s_3)} - \frac{2 \omega_2}{\pi n_1} \right); \quad \tilde{\alpha}_{00} = 0; \right. \\
 & \tilde{\alpha}_{k0} = \frac{2 \varepsilon \omega_2}{\pi n_1} \psi(0, \mu_k); \quad \tilde{\beta}_0 = -\frac{2 \varepsilon \omega_2}{\pi n_1}; \quad \tilde{\beta}_k = -\frac{2 \varepsilon \omega_2}{\pi n_1} \psi(0, \mu_k); \\
 & \left. \tilde{\alpha}_k = \sum_{k=1}^{\infty} F_k^* \frac{\mu_k}{R} \left[\frac{m_1}{n_1} \left(\operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{R v_1} \right) + E_k^* \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{R v_1} \right) \right) + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m_2}{n_2} \left(N_k^* \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{Rv_2} \right) + M_k^* \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{Rv_2} \right) \right) \psi(0, \mu_k); \\
\tilde{\alpha}_{0n} = & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \gamma_n^4 \cos(\gamma_n h) R J_0(\mu_n) \left[\frac{\tilde{A}_n^* v_1^3 I_1(\gamma_n v_1 R)}{\mu_n^2 + \gamma_n^2 n_1 R^2} + \frac{sv_2^3 I_1(\gamma_n v_2 R)}{\mu_n^2 + \gamma_n^2 n_2 R^2} \right] + \right. \\
& + \frac{\mu_n^4 \varepsilon \omega_2}{2R^4 n_1} J_0^2(\mu_k) \left[\frac{1}{v_1} \left(E_n^* \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_n h}{Rv_1} \right) + \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_n h}{Rv_1} \right) \right) + \right. \\
& \left. \left. + \frac{s}{v_2} \left(N_n^* \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_n h}{Rv_2} \right) + M_n^* \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_n h}{Rv_2} \right) \right) \right] F_n^* \right\}; \\
\tilde{\alpha}_{kn} = & - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F_n^* \frac{\mu_n}{R} \psi(\mu_k, \mu_n) \left[\frac{m_1}{n_1} \left(E_n^* \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_n h}{Rv_1} \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_n h}{Rv_1} \right) \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{m_2}{n_2} \left(N_n^* \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_n h}{Rv_2} \right) + M_n^* \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_n h}{Rv_2} \right) \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Відмітимо, що коефіцієнти системи залежать від величин, що визначають структуру пружного потенціалу та висоту пружного штампa H .

Використавши умову рівноваги (8), встановимо зв'язок між осіданням та рівнодіючою навантаження P у вигляді

$$P = \frac{\pi \varepsilon R^2 C_{44} (1 + m_1) l_1 (v_2 + sv_1)}{v_2 v_1 h \theta_6}.$$

Розв'язавши нескінченну систему (16), можна визначити невідомі сталі χ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$), що дозволить обчислити компоненти переміщень та напружень як у пружних півпросторах, так і у пружному штампі за формулами (9) та (11).

5. Висновок. Отже, в рамках лінеаризованої теорії пружності у статті представлено аналітичні розв'язки контактної задачі про тиск двох попередньо напружених півпросторів на циліндричний пружний штамп з початковими (зашишковими) напруженнями без врахування сил тертя. Ці розв'язки представлені у вигляді рядів через нескінченну систему констант χ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$), які визначаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь (16) методом редукції.

Список використаної літератури

1. Грилицкий Д. В., Кизыма Я. М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости Львов: Вища школа. 1981. 136 с.
2. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Глухов Ю. П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. Германия, Saarbrücken LAPLAMBERT Academic Publishing. 2015. 468 с.
3. Гузь А. Н., Рудницкий В. Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. Хмельницький, вид. ПП Мельник. 2006. 710 с.
4. Yaretskaya N. A. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. 2018. Vol. 54. No. 5. P. 539–543. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0906-y>
5. Yaretska N. O. Mathematical model and solution of spatial contact problem for prestressed cylindrical punch and elastic layer. Innovative paradigm of the development of modern physical-mathematical sciences: Collective monograph. Riga, Latvia : "Baltija Publishing". 2022. P. 261–295. DOI: <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-200-5-10>

6. Babich S. Yu., Yaretska N. O. Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. 2021. Vol. 57. No. 3. P. 297–305. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01081-7>
7. Babich S. Yu., Glukhov Yu. P. On One Dynamic Problem for a Multilayer Half-Space with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*. 2021. Vol. 57. No. 1. P. 43–52.
8. Bagno O. M. Effect of Finite Initial Strains on the Wave Process in the System of an Incompressible Half-Space and an Ideal Liquid Layer. *International Applied Mechanics*. 2021. Vol. 57. No. 6. P. 644–654. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01114-9>
9. Guz A. N., Bagno A. M. Influence of Prestresses on Normal Waves in an Elastic Compressible Half-Space Interacting with a Layer of a Compressible Ideal Fluid. *International Applied Mechanics*. 2019. Vol. 55. No. 6. P. 585–595.
10. Guz A. N., Bagno A. M. Influence of Prestresses on Quasi-Lamb Modes in Hydroelastic Waveguides. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56. No. 1. P. 1–12.
11. Guz A. N. On General List of References to the Monograph “Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics”. *International Applied Mechanics*. 2022. Vol. 58. No. 1. P. 1–29. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01131-8>
12. Rudnitsky V. B., Dikhtyaruk N. N. Interaction Between an Infinite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem. *International Applied Mechanics*. 2017. Vol. 53. No. 2. P. 149–155.

Babich S. Yu., Yaretska N. O., Lazar V. F., Shchekan N. P. Analytical solutions of the static problem on the pressure of pre-tensioned half-spaces and an elastic cylinder with initial stresses.

The article is devoted to the solution of the contact problem for a prestressed cylindrical die and two elastic half-spaces with initial stresses in an analytical form without taking into account frictional forces. We will assume that the surfaces outside the contact boundary remain free from the influence of external forces, and at the contact boundary displacements and stresses are continuous. The problem is solved in the case of unequal roots of the defining equation. The study is presented in a general form for the theory of large initial strains and two variants of the theory of small initial strains within the linearized theory of elasticity with an arbitrary structure of the elastic potential. It is assumed that the initial states of the elastic cylindrical die and the elastic bases (half-spaces) are homogeneous and equal. The research is carried out in the coordinates of the initial deformed state, which are related to the Lagrangian coordinates (of the natural state). In addition, the influence of the cylindrical stamp causes small perturbations of the corresponding values of the basic stress-strain state. It is also assumed that the elastic cylindrical die and the elastic half-spaces are made of different isotropic, transversally isotropic or composite materials. In the case of orthotropic bodies, we will assume that the elastically equivalent directions coincide with the direction of the coordinate axes in the deformed state. General solutions of the basic differential equations of the linearized theory of elasticity in the case of axisymmetric deformation for a finite cylindrical region are given. As a result, the solutions of the given problem are presented in the form of infinite series, the coefficients of which are determined from an infinite system of algebraic equations. Note that the coefficients of the system depend on the values that determine the structure of the elastic potential and the height of the elastic stamp. The article also establishes the relationship between settlement and the equivalent load. Therefore, with the help of the obtained solutions, it is possible to study the influence of initial (residual) stresses in two elastic half-spaces and an elastic cylindrical stamp on the distribution of contact stresses in the contact area.

Keywords: initial stresses, stress-strain state, linearized theory of elasticity, half-space, cylindrical die.

References

1. Grilickij, D. V., & Kizyma, Ja. M. (1981). *Osesimmetrichnye kontaktnye zadachi teorii uprugosti i termouprugosti*. L'vov: Vishha shk.

2. Guz', A. N., Babich, S. Ju., & Gluhov, Ju. P. (2015). *Smeshannyye zadachi dlja uprugogo osnovaniya s nachal'nymi naprjazhenijami*. Germanija. Saarbrücken LAPLAMBERT Academic Publishing.
3. Guz', A. N., & Rudnickij, V. B. (2006). *Osnovy teorii kontaktnogo vzaimodejstviya uprugih tel s nachal'nymi (ostatochnymi) naprjazhenijami*. Hmel'nic'kij, vid. PP Mel'nik.
4. Yaretskaya, N. A. (2018). Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*, 54(5), 539–543. <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0906-y>
5. Yaretska, N. O. (2022). Mathematical model and solution of spatial contact problem for prestressed cylindrical punch and elastic layer. Innovative paradigm of the development of modern physical-mathematical sciences: Collective monograph. *Riga, Latvia : "Baltija Publishing"*, 261–295. <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-200-5-10>
6. Babich, S. Yu., & Yaretska, N. O. (2021). Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. 57(3), 297–305. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01081-7>
7. Babich, S. Yu., & Glukhov, Yu. P. (2021). On One Dynamic Problem for a Multilayer Half-Space with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*, 57(1), 43–52.
8. Bagno, O. M. (2021). Effect of Finite Initial Strains on the Wave Process in the System of an Incompressible Half-Space and an Ideal Liquid Layer. *International Applied Mechanics*, 57(6), 644–654. <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01114-9>
9. Guz, A. N., & Bagno, A. M. (2019). Influence of Prestresses on Normal Waves in an Elastic Compressible Half-Space Interacting with a Layer of a Compressible Ideal Fluid. *International Applied Mechanics*, 55(6), 585–595.
10. Guz, A. N., & Bagno, A. M. (2020). Influence of Prestresses on Quasi-Lamb Modes in Hydroelastic Waveguides. *International Applied Mechanics*, 56(1), 1–12.
11. Guz, A. N. (2022). On General List of References to the Monograph "Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics". *International Applied Mechanics*, 58(1), 1–29. <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01131-8>
12. Rudnitsky, V. B. & Dikhtyaruk, N. N. (2017). Interaction Between an Infinite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem. *International Applied Mechanics*, 53(2), 149–155.

Одержано 12.10.2022