УДК 519.7
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).148-153

А. Ю. Брила[1], О. І. Кузка[2], О. О. Погоріляк[3]

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри системного аналізу та теорії оптимізації,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
andrii.bryla@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2518-9877

[2] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри системного аналізу та теорії оптимізації,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
oleksandr.kuzka@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7556-3057

[3] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
oleksandr.pohoriliak@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0501-4861

ЗАДАЧА ЛЕКСИКОГРАФІЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З АЛЬТЕРНАТИВНИМИ КРИТЕРІЯМИ ТА ІНТЕРВАЛЬНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ ДОПУСТИМОСТІ

Розглядається лексикографічна задача багатокритеріальної оптимізації, у якій на деякі з критеріїв накладено додаткові умови допустимості як умови знаходження значення критерію в одному з наперед заданих інтервалів. Для розв'язання такого роду задач запропоновано підхід до знаходження оптимальних розв'язків шляхом зведення їх до задач скалярної оптимізації з використанням відповідних коефіцієнтів зваженої згортки критеріїв.

Ключові слова: багатокритеріальна оптимізація, задача лексикографічної оптимізації, альтернативні критерії, умови допустимості критеріїв.

1. Вступ. Багато задач прийняття рішень можуть бути описані з використанням деяких критеріїв, які задають особи, що приймають рішення. Наявність критеріїв дозволяє описувати конфігурації взаємозв'язків субординацій, визначених на множині критеріїв, і отримувати відповідні задачі багатокритеріальної оптимізації ([1]). Розглянемо задачу прийняття рішень, де множину допустимих розв'язків $X \subset \mathbb{R}^n$ задано з використанням системи лінійних рівнянь і нерівностей

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1}$$

$$x_j \ge \rho_j,\ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

$$\rho_1 \ge 0,\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Прийняття рішень здійснюється з використанням однорідних критеріїв κ^i, $1 \le i \le q$ з лінійними критеріальними функціями

$$c_i(x) = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \ldots + c_{in}x_n,\ i = 1, 2, \ldots, q, \tag{4}$$

та шкалою з введеним на ній порядком віддачі переваги «більше». Тобто згідно з критерієм κ^i альтернатива $x \in X$ є кращою за альтернативу $y \in Y$, якщо і тільки якщо $c_i(x) > c_i(y)$. Не зменшуючи загальності міркувань будемо вважати, що

$$c_i(x) \geq 0, \ i = 1, 2, \ldots, q. \tag{5}$$

2. Задача лексикографічної оптимізації. Нехай на множині критеріїв κ^i, $1 \leq i \leq q$ згідно з певними правилами задано субординацію строгого ранжування Rg. Будемо вважати, що відносна важливість критерію κ^i є більшою за відносну важливість критерію κ^j тоді і тільки тоді, коли $i < j$. Тоді згідно з [1] одержуємо задачу лексикографічної оптимізації

$$\max{}^L c(x), \ x \in X, \tag{6}$$

κ^i, $1 \leq i \leq q$ де

$$c(x) = (c_1(x), c_2(x), \ldots, c_q(x)).$$

Дана задача є всебічно вивченою ([1]), і для неї існує ряд ефективних методів розв'язання, тому зведення до такого роду задач завжди призводить до спрощення підходів знаходження множини оптимальних розв'язків.

3. Задача лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями. Нехай у задачі (5) на критерії κ^i, $1 \leq i \leq q$ введено так звані умови допустимості ([2]), що ґрунтуються на введенні додаткового мінімального значення для критеріальної функції m_i, при досягненні якого критерій залишається допустимим

$$c_i(x) \geq m_i, \ i = 1, 2, \ldots, q. \tag{7}$$

При порушенні даної умови критерій є недопустимим і повинен бути виключеним з розгляду. Якщо на деякий з критеріїв κ^l додаткової умови не накладено, то відповідне обмежуюче значення $m_l = 0$.

Задача знаходження оптимального розв'язку з додатковими обмеженнями допустимості і вимогою знаходження оптимального розв'язку, який дозволяє знаходити максимально можливе значення допустимого критерію якнайбільшого рангу, є задачею лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями ([2]). Тобто задачею

$$\max{}^L c(x), \ x \in \overline{X}, \tag{8}$$

де $\overline{X}$ — це множина допустимих розв'язків X доповнена обмеженнями допустимості критеріїв.

У [2] доведено, що задача лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями (8) може бути зведена до задачі максимізації

$$z(x) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i c_i(x) \to \max, \tag{9}$$

на допустимій множині, що задається обмеженнями

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{10}$$

$$x_j \geq \rho_j,\ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{11}$$

$$c_i(x) \geq m_i y_i,\ i = 1, 2, \ldots, q. \tag{12}$$

$$\alpha_i = \overline{\alpha}_i y_i,\ i = 1, 2, \ldots, q, \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{q} y_i = 1, \tag{14}$$

$$y_i \in \{0, 1\},\ i = 1, 2, \ldots, q. \tag{15}$$

Тут числа $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_q$ вибрано згідно з правилами [2–4] так, що функціонал

$$f(x) = \overline{\alpha}_1 c_1(x) + \overline{\alpha}_2 c_2(x) + \ldots + \overline{\alpha}_q c_q(x), \tag{16}$$

задає лексикографічний порядок віддачі переваги на множині крайніх точок допустимої множини X і розв'язок задачі

$$\max f(x),\ x \in X, \tag{17}$$

є розв'язком задачі лексикографічної оптимізації (6).

Зміст змінних $y_j,\ j = 1, 2, \ldots, q$ задається так

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{якщо вибираємо } j\text{-товий критерій}, \\ 0, & \text{якщо не вибираємо } j\text{-товий критерій}, \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, q. \tag{18}$$

4. Задача лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями та інтервальними обмеженнями допустимості. Розглянемо випадок, коли, на відміну від задачі лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями з умовами допустимості (7), на деякі критерії $\kappa^i,\ i \in H$, накладаються умови допустимості, що можуть містити декілька інтервалів

$$p_l^i \leq c_i(x) \leq h_l^i,\ i \in H,\ l = 1, 2, \ldots, q_i, \tag{19}$$

де

$$p_l^i, h_l^i \geq 0,\ i \in H,\ l = 1, 2, \ldots, q_i. \tag{20}$$

Тобто, критерій $\kappa^i,\ i \in H$ вважається допустимим, якщо виконується одна з умов (19). Якщо не виконується жодна з умов (19), то критерій вважається недопустимим і повинен бути виключений з подальшого розгляду.

Задачу знаходження оптимального розв'язку з додатковими обмеженнями допустимості (19) і вимогою знаходження оптимального розв'язку, який дозволяє знаходити максимально можливе значення допустимого критерію якнайбільшого рангу, назвемо задачею лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями з інтервальними обмеженнями допустимості. Позначимо таку задачу

$$\max{}^{L_{alt}} c(x),\ x \in \overline{\overline{X}}, \tag{21}$$

де $\overline{\overline{X}}$ — множина допустимих розв'язків Xдоповнена обмеженнями допустимості (19).

Нехай числа $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_q$, як і раніше вибрано згідно з правилами [2] так, що функціонал (16) задає лексикографічний порядок віддачі переваги на множині крайніх точок допустимої множини X. Змінні $y_j,\ j=1,2,\ldots,q$ задаються, як у (18).

Розглянемо задачу

$$g\left(x\right)=\alpha_1 c_1\left(x\right)+\alpha_2 c_2\left(x\right)+\ldots+\alpha_q c_q\left(x\right)\to\max, \tag{22}$$

на допустимій множині, що задається обмеженнями

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\le b_i,\ i=1,2,\ldots,m, \tag{23}$$

$$x_j\ge\rho_j,\ j=1,2,\ldots,n, \tag{24}$$

$$p_l^i y_l^i\le c_i\left(x\right)\le h_l^i y_l^i+(1-y_l^i)c_i^{\sup},\ i\in H,\ l=1,2,\ldots,q_i, \tag{25}$$

$$y_i\le\sum_{l=1}^{q_i} y_l^i,\ i\in H, \tag{26}$$

$$\alpha_i=\overline{\alpha}_i y_i,\ i=1,2,\ldots,q, \tag{27}$$

$$\sum_{i=1}^{q} y_i=1, \tag{28}$$

$$y_i\in\left\{0,1\right\},\ i=1,2,\ldots,q, \tag{29}$$

$$y_l^i\in\left\{0,1\right\},\ i\in H,\ l=1,2,\ldots,q_i. \tag{30}$$

Величини $c_i^{\sup}$, $i\in H$ — верхня межа значень критеріальної функції критерію κ^i на множині допустимих розв'язків X.

Теорема 1. *Розв'язок задачі* (22)–(30) *є розв'язком задачі* (21).

Доведення. Проведемо доведення методом від супротивного. Нехай x^* — оптимальний розв'язок задачі (22)–(30) і він відповідає допустимому критерію κ^{l^*} зі значенням критеріальної функції $\hat{c}_{l^*}$. Припустимо, що він не розв'язком задачі лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями з інтервальними обмеженнями допустимості (21). Тобто існує такий допустимий критерій κ^k з оптимальним розв'язком $\hat{x}^k\in X$ і значенням $\hat{c}_k$, що $k<l^*$ (тобто ранг критерію κ^k є вищим за критерій κ^{l^*}).

Якщо x^* є оптимальним розв'язком, то відповідне значення $y_{l^*}=1$ і $\alpha_{l^*}=\overline{\alpha}_{l^*}$. А отже, враховуючи обмеження (25)–(30), одержуємо, що

$$g\left(x^*\right)=\overline{\alpha}_{l^*}c_{l^*}\left(x^*\right).$$

Аналогічно, якщо припустити, що критерій κ^k є допустимим у $\hat{x}^k\in X$, то $y_k=1$ і $\alpha_k=\overline{\alpha}_k$. Тоді

$$g\left(\hat{x}^k\right)=\overline{\alpha}_k c_k\left(\hat{x}^k\right).$$

Враховуючи вибір коефіцієнтів $\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha}_q$, одержуємо

$$g\left(\hat{x}^k\right)>g\left(x^*\right).$$

Одержане протиріччя доводить теорему.

За умови, коли потрібно знайти оптимальний розв'язок з використанням r допустимих критеріїв якнайвищого рангу, обмеження (28) повинно бути замінено обмеженням

$$\sum_{i=1}^{q} y_i = r. \tag{31}$$

У випадку, коли обмеження ставиться тільки на допустимість критеріїв, а не на їх кількість, то обмеження (28) повинно бути виключено з розгляду.

5. Висновки. У роботі розглянуто один з випадків, коли у задачі лексикографічної оптимізації на деякі з критеріїв накладено умови допустимості з інтервальними обмеженнями. Наявність такого роду обмежень не дозволяє застосувати відомі ефективні методи лексикографічної оптимізації. Для знаходження розв'язків запропоновано підхід, заснований на використанні коефіцієнтів додатної лінійної згортки критеріїв, які дозволяють будувати скалярні згортки критеріїв, що наводять порядок віддачі переваги, еквівалентний лексикографічному на множині крайніх точок допустимої множини. Такий підхід дозволяє зводити розглядувану задачу до задачі скалярної оптимізації і застосувати відомі ефективні методи.

Список використаної літератури

1. Червак Ю. Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір. Ужгород : УжНУ, 2002. 312 с.
2. Брила А. Ю. Про одну задачу лексикографічної оптимізації з інтервальними оцінками. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: «Математика і інформатика».* 2018. Вип. 1, № 32. С. 54–60. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.1(34).60–68
3. Брила А. Ю. Достижимость оптимальных решений линейной задачи многокритериальной оптимизации по взвешенной сумме критериев разной важности в транзитивной субординации. *Кибернетика и системный анализ.* 2008. № 5. С. 135–138.
4. Сергиенко И. В., Шило В. П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. Киев : Наукова думка, 2003. 264 с.
5. Сергієнко І. В., Шило В. П., Рощин В. О. Дискретна оптимізація. Алгоритми та їхнє ефективне використання. Київ : Наукова думка, 2020. 144 с.
6. Сергиенко И. В., Лебедева Т. Т., Семенова Н. В. О существовании решений в задачах векторной оптимизации. *Кибернетика и систем. анализ.* 2000. № 6. С. 39–46.
7. Семенова Н. В., Колєчкіна Л. М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи дослідження та розв'язання. Київ : Наукова думка, 2009. 266 с.
8. Семенова Н. В., Колечкіна Л. Н., Нагорная А. Н. Многокритериальные задачи лексикографической оптимизации с линейными целевыми функциями на нечетком множестве альтернатив. *Information science & Computing.* Sofia : Institute of Information Theories and Applications FOI ITHEA, 2009. P. 139–148.
9. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. Москва : Наука, 1982. 256 с.
10. Подиновский В. В., Гаврилов В. М. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. Москва : Сов. радио, 1975. 192 с.

Bryla A. Yu., Kuzka O. I., Pohoriliak O. O. The Lexicographic Optimization Problem with alternative criteria and interval admissibility conditions.

The Lexicographic Multi-Criteria Optimization Problem with additional criteria's admissibility conditions is considered. The admissibility conditions are satisfied if the criterion's value belongs to one of the predetermined intervals. To solve the problem an approach of finding optimal solutions by reducing them to scalar optimization problems using the appropriate coefficients of the weighted convolution of criteria is proposed.

Keywords: Multi-Criteria Optimization Problem, Lexicographic Optimization Problem, alternative criteria, criterion's admissibility conditions.

References

1. Chervak, Yu. Yu. (2002). *Optymizaciya. Nepokrashuvanij vybir* [Optimization. Unbeatable selection]. Uzhhorod: UzhNU [in Ukrainian].
2. Brila A. Yu. (2018). On solving a Lexicographic Optimization Problem with interval coefficients and alternative criteria. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series: Mathematics and Informatics,* 1(32), 54–60. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.1(34).60-68 [in Ukrainian].
3. Bryla, A. Yu. (2008). Dostizhimost optimalnyh reshenij linejnoj zadachi mnogokriterialnoj optimizacii po vzveshennoj summe kriteriev raznoj vazhnosti v tranzitivnoj subordinacii [Achievement of optimal solutions of the linear problem of multicriteria optimization on a weighted sum of criteria of different importance in transitive subordination]. *Cybernetics and system analysis,* 5, 135–138 [in Russian].
4. Sergienko, I. V., & Shilo, V. P. (2003). *Problems of discrete optimization: problems, methods of solution, research.* Kyiv: Naukova Dumka [in Ukrainian].
5. Sergienko, I. V., Shilo, V. P., & Roschyn, V. O. (2020). *Discrete optimization. Algorithms and their effective use.* Kyiv: Naukova dumka [in Ukrainian].
6. Sergienko, I. V., Lebedeva, T. T., & Semenova, N. V. (2000). On the existence of solutions in vector optimization problems. *Cybernetics and systems. analysis,* 6. 39–46 [in Ukrainian].
7. Semenova, N. V., & Kolechkina, L. M. (2009). *Vector problems of discrete optimization on combinatorial sets: research and solution methods.* Kyiv: Naukova dumka [in Ukrainian].
8. Semenova, N. V., Kolechkina, L. N., & Nagornaya A. N. (2009). Multicriteria lexicographic optimization problems with linear objective functions on a fuzzy set of alternatives. In *Information science & Computing.* (139–148). Sofia: Institute of Information Theories and Applications FOI ITHEA [in Ukrainian].
9. Podinovskiy, V. V., & Nogin, V. D. (1982). *Pareto-optimal'nyye resheniya mnogokriterial'nykh zadach.* Moscow: Nauka [in Russian].
10. Podinovskij, V. V., & Gavrilov, V. M. (1975). *Optimizaciya po posledovatelno primenyaemym kriteriyam* [Optimization by successive criteria]. Moscow: Soviet Radio [in Russian].

Одержано 04.05.2023