мають нижчий порядок, ніж вихідні диференціальні рівняння теорії надпровідності. Такі рівняння в теорії надпровідності називають квазікласичним.

Побудовано квазікласичні рівняння для теорії струмових станів у надпровідникових структурах.

Робота виконана за сприянням Міністерства освіти і науки України (держбюджетна тема № 0113U002220).

Джерела та література

1. Боголюбов Н. Н. О новом методе в теории сверхпроводимости / Н. Н. Боголюбов // ЖЭТФ. − 1958. − Т. 34. − С. 58−65.
2. Свідзинський А. В. Мікроскопічна теорія надпровідності : у 2-х ч. Ч. 1 / А. В. Свідзинський. − Луцьк : РВВ «Вежа» Волин. держ. ун-ту ім. Лесі Українки, 2001. − 256 с.
3. Kamerlingh Onnes H. The superconductivity of mercury / H. Kamerlingh Onnes // Proc. R. Acad. Amsterdam. − 1911. − Vol. 11. − P. 168.
4. London F. On the Bose-Einstein Condensation / F. London // Phys. Rev. − 1938. − Vol. 54. − P. 947.

Шигорин Павел. Квазиклассические уравнения в теории токовых состояний в сверхпроводящих структурах. В работе анализируются уравнения микроскопической теории сверхпроводимости, принимая во внимание малость отношения критической температуры к фермиевской. Описывается идеология квазиклассического приближения в теории сверхпроводимости. Сконструированы квазиклассические уравнения применимые к рассчету токовых состояний в сверхпроводящих структурах.

Ключевые слова: сверхпроводимость, квазиклассические уравнения, критическая температура.

Shygorin Pavlo. Quasiclassical Equations for Theory of the Current States in Superconducting Structures. In this work has been analyzed on theoretical level the equations of microscopic theory of superconductivity with respect to assumption about small ratio critical temperature to Fermi-temperature. We described the ideology of the quasiclassical approximation in the theory of superconductivity. Quasiclassical equations that are applicable to computation of the current states in superconducting structures have been constructed.

Key words: superconductivity, quasiclassical equations, critical temperature.

Стаття надійшла до редколегії
16.12.2014 р.

УДК 538.9

Ірина Дмитрук
Павло Шигорін

Нульовий звук у конденсованому газі Бозе

У роботі теоретично досліджено нульовий звук у конденсованому бозе-газі. Для цього розглянуто беззіткневу динаміку атомарного конденсованого бозе-газу за відмінних від нуля температур. Отримано та проаналізовано вираз для швидкості поширення нульового звуку. Схарактеризовано можливості теоретичного дослідження затухання Ландау в конденсованому бозе-газі.

Ключові слова: нульовий звук, конденсований бозе-газ, беззіткнева динаміка.

Постановка наукової проблеми та її значення. Одне з найцікавіших завдань статистичної механіки − дослідження динаміки колективних мод. У випадку рідин і газів колективні моди мають гідродинамічну природу і проявляються у вигляді звукових хвиль. Особливо розмаїті гідродинамічні моди у квантових рідинах і газах. Наприклад, у надплинному гелії-4, крім звичайних звукових хвиль (першого звуку), можуть поширюватися температурні хвилі (другий звук) [5]. Поява в надплинному гелії поряд із першим звуком другого звуку пов’язана із дворідинною структурою гідродинамічних рівнянь, що, своєю чергою, відбиває наявність у системі бозе-айнштайнівського конденсату. Мовою дворідинної моделі перший звук відповідає синфазним коливанням нормальної та надплинної компонент, другий – протифазним. Іншим прикладом багаточастинкової системи за наявності квантового виродження зі зламом симетрії є атомарний конденсований бозе-газ, охолоджений до ультранизької температури (порядку десяток нанокельвінів) і утримується в магнітній пастці. Як показує теоретичний розрахунок [4], у такій системі можуть поширюватися перший і другий звук, а також теплова релаксаційна мода. На відміну від надплинного гелію-4, у якого через сильну взаємодію між атомами розділення нормальної та надплинної компоненти є неможливе, у конденсованому бозе-газі перший звук асоціюється з коливаннями густини атомів надконденсату, а другий звук – коливання густини конденсатних атомів.

У теорії фермі-рідини Ландау [2; 3] було передбачено особливий тип колективних коливань, пов'язаних із коливаннями фермі-сфери. Через те, що такі коливання можуть відбуватися за абсолютного нуля температур, відповідна колективна мода отримала назву нульовий звук. Колективні коливання, які мають подібні до нульового звуку властивості, виникають у плазмі в беззіткневому режимі, коли можна знехтувати зіткненнями між частинками, тобто коли інтеграл зіткнень дорівнює нулеві [1]. Поява такого колективного руху пов'язана з далекодією кулонівських сил.

У цій роботі досліджується нульовий звук в атомарному конденсованому бозе-газі. Для цього розглядаємо беззіткневу кінетику цього виродженого квантового газу.

Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів дослідження. Динаміку конденсованого бозе-газу за відмінних від нуля температур описуємо на основі рівнянь руху для двох величин: вігнерівської функції розподілу атомів над конденсату $f = f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ і макроскопічної хвильової функції конденсату $\Phi = \Phi(\mathbf{r},t).$ Відповідна система рівнянь побудована в роботах [6; 7]. Вони мають вигляд:

$$\begin{gathered}\frac{\partial n_c}{\partial t} + \nabla\left(n_c \boldsymbol{\upsilon}_c\right) = R[f],\\ m\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\upsilon}_c \nabla\right)\boldsymbol{\upsilon}_c = -\nabla \mu_c,\end{gathered} \tag{1}$$

$$\frac{\partial f\left(\mathbf{p},\mathbf{r},t\right)}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\nabla f\left(\mathbf{p},\mathbf{r},t\right) - \nabla V_{eff}\left(\mathbf{r},t\right)\cdot\nabla_{\mathrm{p}} f\left(\mathbf{p},\mathbf{r},t\right) = C_{22}\left[f\right] + C_{12}\left[f,\Phi\right], \tag{2}$$

де

$$f = f\left(\mathbf{p},\mathbf{r},t\right),\quad f_i = f\left(\mathbf{p}_i,\mathbf{r},t\right),\quad \tilde{\varepsilon}_c = \mu_c + \frac{m\upsilon_c^2}{2},\quad \tilde{\varepsilon}_{p_i} = \frac{p_i^2}{2m} + V_{eff},\ n_c = \left|\Phi\left(\mathbf{r},t\right)\right|^2.$$

У правій частині рівняння (2) фігурує інтеграл зіткнень, який складається з двох доданків: $C_{22}\left[f\right]$ та $C_{12}\left[f,\Phi\right]$.

$$\begin{aligned}C_{12}\left[f,\Phi\right] = {} & \frac{2g^2 n_c}{\left(2\pi\right)^2 \hbar^4}\int d\mathbf{p}_1\int d\mathbf{p}_2\int d\mathbf{p}_3 \delta\left(m\boldsymbol{\upsilon}_c + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3\right)\delta\left(\tilde{\varepsilon}_c + \tilde{\varepsilon}_{p1} - \tilde{\varepsilon}_{p2} - \tilde{\varepsilon}_{p3}\right)\times,\\ & \times\left[\delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1\right) - \delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}_2\right) - \delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}_3\right)\right]\left[\left(1+f_1\right) f_2 f_3 - f_1\left(1+f_2\right)\left(1+f_3\right)\right],\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}C_{22}\left[f\right] = {} & \frac{2g^2}{\left(2\pi\right)^5 \hbar^7}\int d\mathbf{p}_2\int d\mathbf{p}_3\int d\mathbf{p}_4 \delta\left(\mathbf{p} + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4\right)\delta\left(\tilde{\varepsilon}_p + \tilde{\varepsilon}_{p2} - \tilde{\varepsilon}_{p3} - \tilde{\varepsilon}_{p4}\right)\times\\ & \times\left[\left(1+f\right)\left(1+f_2\right) f_3 f_4 - f f_2\left(1+f_3\right)\left(1+f_4\right)\right],\end{aligned} \tag{4}$$

Інтеграл зіткнень (4) описує двочастинкові зіткнення між збудженими атомами надконденсату, а (3) описує зіткнення між атомами надконденсату, які «захопили» один атом конденсату. Обидва інтеграли забезпечують виконання законів збереження енергії та імпульсу. Інтеграл зіткнень $C_{22}[f]$ водночас забезпечує збереження числа атомів у конденсаті, $C_{12}[f,\ \Phi]$ описує взаємодію атомів конденсату та надконденсату, тобто можливі переходи з конденсату в теплову хмарину, і навпаки.

Для опису нульового звуку маємо розглянути беззіткневу динаміку. Таким чином маємо покласти інтеграли зіткнень рівними нулеві. Отож будемо виходити з наступної системи рівнянь:

$$\frac{\partial n_c}{\partial t} + \nabla\left(n_c \boldsymbol{\upsilon}_c\right) = R[f],\qquad m\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\upsilon}_c \nabla\right)\boldsymbol{\upsilon}_c = -\nabla \mu_c, \tag{5}$$

$$\frac{\partial f\left(\mathbf{p},\mathbf{r},t\right)}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\nabla f\left(\mathbf{p},\mathbf{r},t\right) - \nabla V_{eff}\left(\mathbf{r},t\right)\cdot\nabla_{\mathrm{p}} f\left(\mathbf{p},\mathbf{r},t\right) = 0. \tag{6}$$

Перейдемо до побудови дисперсійного співвідношення між частотою і хвильовим числом. Звукову хвилю вважаємо процесом поширення періодичного збурення густини. Розглядаючи малі відхилення від стану рівноваги, який характеризується параметрами: n_{c0}, $\tilde{n}_0$ − рівноважні густини конденсату й теплової хмарини; $\boldsymbol{\upsilon}_{c0} = 0$ − швидкість конденсату; $f_0 = \dfrac{1}{e^{c^2+\beta g n_{c0}} - 1}$ − рівноважна функція розподілу. Покладемо

$$n_c(\mathbf{r},t) = n_{c0} + \delta n_c \exp(ikz - i\omega t), \qquad f(\mathrm{r},\mathbf{p},t) = f_0 + f_0[1+f_0]h_0(\mathbf{p})\exp(ikz - i\omega t). \tag{7}$$

При цьому треба вважати, що відхилення від рівноваги малі, тобто виконуються співвідношення $|\delta n_c| << n_{c0}, |h_0| << f_0$.

Підставляючи співвідношення (7) в рівняння (5) і (6) та проводячи процедуру лінеаризації, отримуємо рівняння

$$c_z k\left[h_0(\mathbf{c}) + 2A\delta\tilde{n}_0(\mathbf{c})\right] - \omega_0 h_0(\mathbf{c}) = 0, \tag{8}$$

де $A = \dfrac{\beta g \dfrac{\omega_0^2}{k^2} + \dfrac{\beta^2 g^2 n_{c0}}{2}}{\dfrac{\omega_0^2}{k^2} - \dfrac{\beta g n_{c0}}{2}}$, $\mathbf{c} = (\beta / 2m)^{1/2}\mathbf{p}$.

З урахуванням співвідношення $\delta\tilde{n}_0(\mathbf{c}) = \dfrac{1}{\pi^{3/2}\Lambda^3}\int d\mathbf{c} f_0(1+f_0)h_0(\mathbf{c})$, рівняння (8) набуде вигляду:

$$c_z k\left[h_0(\mathbf{c}) + 2A\frac{1}{\pi^{3/2}\Lambda^3}\int d\mathbf{c} f_0(1+f_0)h_0(\mathbf{c})\right] - \omega_0 h_0(\mathbf{c}) = 0. \tag{9}$$

Ми отримали інтегральне рівняння для визначення відхилення функції розподілу від рівноважної.

Перепишемо (9) в іншому вигляді:

$$\left(\frac{\omega_0}{ck} - \cos\theta\right)h_0(\mathbf{c}) = 2A\frac{1}{\pi^{3/2}\Lambda^3}\cos\theta\int d\mathrm{c} f_0(1+f_0)h_0(\mathbf{c}). \tag{10}$$

Це рівняння подібне до добре відомого дисперсійного співвідношення для нульового звуку в теорії Ландау фермі-рідини [2]. Розв'язок цього рівняння визначає поправку h до локально-рівноважної функції розподілу f_0, а також швидкість поширення нульового звуку.

Висновки. У роботі досліджено беззіткневу динаміку слабко-взаємодіючого бозе-газу за наявності в ньому конденсату. Показано, що наявність бозе-айнштайнівського конденсату приводить до появи гідродинамічної моди в спектрі колективних коливань, яка не зникає за $T \to 0$. Така мода відома як нульовий звук. Побудовано дисперсійне співвідношення між частотою та хвильовим числом нульового звуку. Це співвідношення має форму інтегрального рівняння Фредгольма.

Роботу виконано за сприяння Міністерства освіти і науки України (держбюджетна тема № 0113U002220).

Джерела та література

1. Климонтович Ю. Л. Фізика бесстолкновительной плазмы / Ю. Л. Климонтович // УФН. − 1997. − № 1.− С. 23−55.
2. Ландау Л. Д. Теория ферми-жидкости / Л. Д. Ландау // ЖЭТФ. − 1956. − Т. 30. − С. 1058−1072.
3. Ландау Л. Д. Колебания ферми-жидкости / Л. Д. Ландау // ЖЭТФ. − 1957. − Т. 32. − С. 59−67.
4. Шигорін П. П. Дисперсійне співвідношення для хвиль першого та другого звуків у конденсованих атомарних бозе-газах / П. П. Шигорін, Ю. М. Лящук // Наук. вісн. Волин. нац. ун-ту ім. Лесі Українки. Фізичні науки. – 2010. – № 6. – С. 58−63.
5. Nozieres P. Theory of quantum liquids: superfluid Bose liquids / P. Nozieres, D. Pines. – Addison-Wesley, 1990. – 180 p.
6. Shygorin P. Equations of coupled condensate and non-condensate dynamics in a trapped Bose gas / P. Shygorin, A. Svidzynskyj // Ukr. J. Phys. – 2010. – Vol. 55, No. 5. – P. 554−559.
7. Zaremba E. Dynamics of trapped Bose gas at finite temperatures [Text] / E. Zaremba, T. Nikuni, A. Griffin // Journ. Low Temp. Phys. − 1999. − Vol. 116. − P. 277−298.

Дмитрук Ирина, Шигорин Павел. Нулевой звук в конденсированном газе Бозе. В работе исследуется нулевой звук в конденсированном газе Бозе. Для этого рассмотрена бесстолкновительная динамика атомарного конденсированного газа Бозе при отличных от нуля температурах. Получены и проанализированы выражения для скорости распространения нулевого звука. Охарактеризированы возможности теоретического исследования затухания Ландау в конденсированном газе Бозе.

Ключевые слова: нулевой звук, конденсированный газ Бозе, бесстолкновительная динамика.

Dmytruk Iryna, Shygorin Pavlo. Zero Sound in a Condensed Bose Gas. In this article the theoretical investigation of a zero sound in a condensed Bose gas has been conducted. For this goal has been considered a collisionless dynamics of a condensed atomic Bose gas at finite temperatures. The expression for velocities of a zero sound has been derived and analyzed. The possibility of theoretical investigation of a Landau damping in the condensed Bose gas is discussed too.

Key words: zero sound, condensed Bose gas, collisionless dynamics.

Стаття надійшла до редколегії
22.12.2014 р.

УДК 517.9:958

Лілія Музика

Побудова точних розв'язків узагальненого рівняння тонких плівок

У статті методом додаткових породжуючих умов знайдено анзаци, які дають змогу провести редукцію узагальненого рівняння тонких плівок. На основі отриманих анзаців побудовано нові неліївські точні розв'язки цього рівняння.

Ключові слова: узагальнене рівняння тонких плівок, метод додаткових породжуючих умов, анзац, точний розв'язок, система нелінійних звичайних диференціальних рівнянь.

Постановка наукової проблеми та її значення. Диференціальні рівняння із частинними похідними (ДРЧП) моделюють абсолютну більшість явищ і процесів, притаманних живій та неживій природі. Відомо, що класичні методи інтегрування *лінійних* ДРЧП, зазвичай, непридатні для застосування до *нелінійних* ДРЧП і їх систем. Тому розвиток нових підходів до розв'язання нелінійних ДРЧП та побудова широких класів точних розв'язків таких рівнянь − актуальна проблема сучасної математичної фізики.

У роботі розглядаємо нелінійне диференціальне рівняння четвертого порядку вигляду:

$$u_t = -[K(u)u_{xxx}]_x + [D(u)u_x]_x + F(u), \tag{1}$$

де K, D і F − довільні гладкі функції, а індекси t і x означають диференціювання за цими змінними. Рівняння (1) узагальнює низку відомих рівнянь, які трапляються для опису різних процесів фізики та хімії. Зокрема, за $K = 0$ отримуємо добре відоме рівняння реакції-дифузії

$$u_t = [D(u)u_x]_x + F(u), \tag{2}$$

яке є класичною математичною моделлю багатьох фізико-хімічних процесів, і його дослідженню присвячено величезну кількість робіт([7] та цитована там література).

Надалі будемо враховувати, що $K \neq 0$, тобто розглядатимемо рівняння саме четвертого порядку. При $D = 0$ та $F = 0$ отримується рівняння, яке описує динаміку тонких плівок в'язкої рідини. Зокрема, рівняння

$$u_t = -u^{\gamma}[u_{xxx}]_x \tag{3}$$

де γ − деякий дійсний параметр, запропоноване у відомій роботі [14]. У науковій літературі рівняння (3) називається ***рівнянням тонких плівок*** і інтенсивно вивчається різними математичними методами ([4–6; 11] та цитована там література). Природне узагальнення (3) вигляду:

$$u_t = -u^{\gamma}[u_{xxx}]_x + d[u^{\mu}u_x]_x \tag{4}$$

де μ та d – деякі невід'ємні сталі, називають ***узагальненим рівнянням тонких плівок*** (УРТП). Спеціальний випадок рівняння (4) при $\gamma = 0$ виникає як деякий граничний випадок класичної моделі Кана–Гілліарда, тому часто називається рівнянням Кана–Гілліарда[15].