

рації та прирівняні до них рисунки й формати публікації, у другому — формати паперу і шпальти сторінки верстання.

Формалізація вихідних вимог стосовно правил структурування сторінок і дотримання законів композиції при верстанні складних видань, експертні дані щодо кількості та напрямів зв'язків між критеріями, що ідентифікують композиційні вимоги, забезпечують досить високу достовірність отриманих результатів [1, 2]. Графічні моделі (рис. 2, 4) розміщення композиційних критеріїв на певних рівнях ієрархії є об'єктивним результатом застосування математичних моделей ієрархії при розв'язанні нового інформаційного завдання в традиційній поліграфічній технології; можуть мати практичне застосування в роботі художніх редакторів і дизайнерів книжкового виробництва. Вони наочно демонструють пріоритетність у послідовності дій і процедур, що виконуються на етапі додрукарської підготовки видань, виступають суттєвим доповненням до відомих технологічних засобів забезпечення якості друкованої продукції.

Таким чином, методологія системного аналізу уможливила формалізацію подання зв'язків між описовими вимогами, що стосуються вирішення технологічних завдань творення композиційних моделей різних видів друкованої продукції, та встановлення упорядкованої пріоритетності для їх реалізації. Програмне вирішення поданого алгоритму забезпечить більш ефективне та оптимальне його використання у видавничій діяльності.

1. Андріїв І. В., Піх І. В., Сеньківський В. М. Оптимізація процесу верстання сторінок книжкових видань з використанням графів // Наукові записки УАД. 2003. Вип. 6. С. 79–84.
2. Дурняк Б. В., Піх І. В., Сеньківський В. М. Системний аналіз та оптимізація параметрів книжкових видань: Моногр. Львів, 2006.
3. Козак Р. О. Узагальнена модель системи проектування книжкових видань // Наукові записки УАД. 2004. Вип. 7. С. 63–66.
4. Куликовский Н. Ф., Мотов В. В. Теоретические основы информационных процессов. М., 1987.
5. Лямец В. І., Тевяшев А. Д. Системний аналіз. Вступний курс. 2-е вид., перероб. та допов., Х., 2004. (Рос. мовою).
6. Месарович М., Мако Д., Такахара І. Теория иерархических многоуровневых систем. М., 1973.
7. Молчанов А. А. Моделирование и проектирование сложных систем. К., 1988.
8. Романычева Э. П., Яцюк О. Г. Дизайн и реклама // Компьютерные технологии. М., 2000.

УДК 681.62:539.3

*Я. Ю. Коляно, Т. С. Сасс, І. Г. Юнгер*  
*Українська академія друкарства*

## **НЕСТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ НЕОБМЕЖЕНОЇ ПЛИТИ ЩОДО СУШІННЯ ПОЛІГРАФІЧНОЇ ПРОДУКЦІЇ**

*На основі розв'язання нестационарної задачі теплопровідності для нескінченної плити пропонується підхід до вивчення в часі процесів сушіння чи акліматизації поліграфічних матеріалів і напівфабрикатів, який дає можливість оптимізувати ці теплові процеси. Даний підхід може бути використаний в інших поліграфічних технологічних процесах, де використовується тепла енергія.*

*On the basis of non-stationary thermal conductivity task of the infinite plate, the approach to studying of drying and acclimatization processes of printing materials and semi-finished products in time has been suggested, which gives the possibility to optimize these thermal processes. This approach can be used in other printing technologic processes where thermal energy is used.*

Температурні поля різної інтенсивності широко застосовуються в технологічних процесах виготовлення друкарської продукції. Наприклад: 1) при сушінні поліграфічних матеріалів і напівфабрикатів (брошур, аркушів паперу, книжкових блоків, палітурних кришок) [7]; 2) при акліматизації паперу; 3) при дослідженні і виготовленні друкарських форм, декелів [2] тощо. За останні роки вартість теплової енергії у виготовленні друкарської продукції значно зросла, тому в запропонованій роботі дотично розглядається питання оптимізації розглянутого процесу сушіння.

Враховуючи, що найбільш розповсюдженим конструктивним елементом у різноманітних пристроях і приладах є плити чи пластини, а також здійснення в них термообробки, приходимо до фізичної постановки задачі: розглядається необмежена плита товщиною  $h$ , початкова температура якої  $T_n$ ; у початковий момент часу  $t = 0$  її верхня поверхня  $z = h$ , що взаємодіє з навколишнім середовищем згідно із законом Ньютона (конвективний теплообмін), піддається миттєвому охолодженню температурою  $T_c$ , а нижня поверхня  $z = 0$  нагрівається тепловим потоком  $q$  (рис. 1). Потрібно: 1) знайти розподіл температури в довільній точці плити залежно від часу; 2) визначити величину поверхневої густини теплового потоку  $q$ , для якої стаціонарне значення температури на верхній поверхні  $z = h$  дорівнюватиме  $+5^\circ\text{C}$  (тобто  $T_{cm}(h) = +5^\circ\text{C}$ ); 3) визначити час, через який температура на верхній поверхні  $z = h$  досягне стаціонарного значення  $T_{cm}(h) = +5^\circ\text{C}$ .

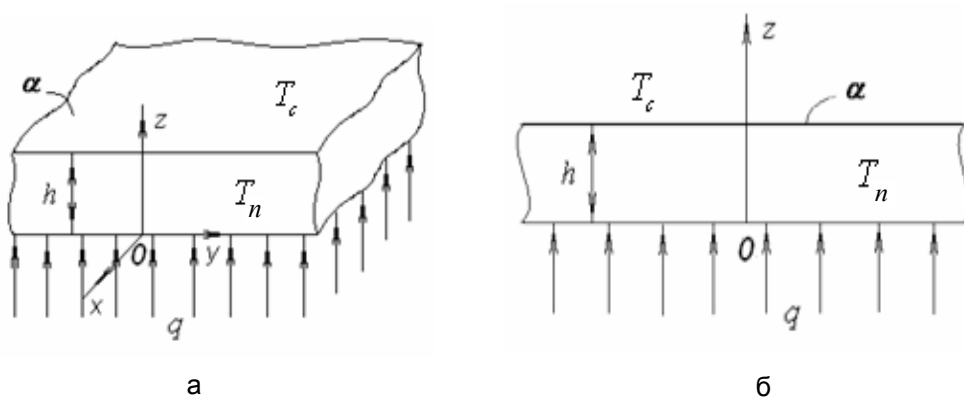


Рис. 1. Схема перерізу плити, що підігрівается знизу тепловим потоком:  
а — тривимірна; б — двовимірна

Математична постановка, здійснена згідно з класичною теорією нестационарної теплопровідності В. А. Ликова [5], розглядається у вигляді нестационарної початково-крайової задачі для температури  $T(z, t)$ :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}; \quad T(z, t) = T_n \quad \text{при} \quad t = 0;$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} + \alpha(T - T_c) = 0 \quad \text{при} \quad z = h; \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial z} = -qS_+(t) \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Цю задачу обезрозмірюємо з метою незалежності в чисельних обрахунках від теплофізичних параметрів матеріалу, з якого виготовлена плита:

$$\frac{\partial \theta^2}{\partial \gamma^2} = \frac{\partial \theta}{\partial Fo}, \quad (1)$$

$$\theta(\gamma, Fo) = 0 \quad \text{при} \quad Fo = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \gamma} + Bi(\theta - \theta_c) = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = 1, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \gamma} = -QS_+(Fo) \quad \text{при} \quad \gamma = 0, \quad (4)$$

де  $T_c$ ,  $T_n$  — задані величини,  $\theta = T - T_n$ ,  $\theta_c = T_c - T_n$ ;  $a$ ,  $\alpha$ ,  $\lambda$  — відповідно коефіцієнти теплопровідності, теплообміну і теплопровідності,  $\gamma = \frac{z}{h}$ ,

$Fo = \frac{at}{h^2}$ ,  $Bi = \frac{\alpha h}{\lambda}$ ,  $Q = \frac{qh}{\lambda}$ ;  $S_+(Fo) = \begin{cases} 1, & Fo > 0, \\ 0, & Fo \leq 0, \end{cases}$  — асиметрична функція

Хевісайда [6];  $q$  — величина поверхневої густини теплового потоку.

До обезрозміреної задачі (1)–(4) застосовуємо інтегральне перетворення Лапласа по часу [1] й отримуємо крайову задачу:

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{d\gamma^2} = s\bar{\theta}, \quad (5)$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{d\gamma} + Bi(\bar{\theta} - \frac{\theta_c}{s}) = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = 1, \quad (6)$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{d\gamma} = -\frac{Q}{s} \quad \text{при} \quad \gamma = 0, \quad (7)$$

де  $s$  — параметр перетворення Лапласа [1];  $\bar{\theta}(\gamma, s)$  — трансформанта функції  $\theta(\gamma, Fo)$  у просторі зображень. Розв'язком рівняння (5) є вираз

$$\bar{\theta}(\gamma, s) = Ach\sqrt{s\gamma} + Bsh\sqrt{s\gamma},$$

коефіцієнти А та В в якому знаходимо з крайових умов (6), (7):

$$A = \frac{Bi\theta_c \sqrt{s} + Q(\sqrt{s}ch\sqrt{s} + Bish\sqrt{s})}{s\sqrt{s}(\sqrt{s}sh\sqrt{s} + Bi ch\sqrt{s})}, \quad B = -\frac{Q}{s\sqrt{s}}.$$

Тоді загальний розв'язок задачі (5)–(7) матиме вигляд

$$\bar{\theta}(\gamma, s) = \frac{1}{\Delta(s)} \left\{ Bi\theta_c ch\sqrt{s}\gamma + Q \left[ ch\sqrt{s}(1-\gamma) + Bi \frac{sh\sqrt{s}(1-\gamma)}{\sqrt{s}} \right] \right\} = \frac{\Phi(s)}{\Psi(s)}, \quad (8)$$

де  $\Delta(s) = s(\sqrt{s}sh\sqrt{s} + Bi ch\sqrt{s})$ ;  $\Phi(s)$ ,  $\Psi(s)$  — відповідно чисельник і знаменник.

Для знаходження оригіналу  $\theta(\gamma, Fo)$  трансформанти  $\bar{\theta}(\gamma, s)$  використовуємо теорему розкладу Ващенко–Захарченка [5], згідно з якою маємо формулу обернення

$$\theta(\gamma, Fo) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{\theta}(\gamma, s) e^{sFo} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Phi(s)}{\Psi(s)} e^{sFo} ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(s_n)}{\Psi'(s_n)} e^{s_n Fo}, \quad (9)$$

де  $s_n$  — корені знаменника  $\Psi(s)$  у виразі (8), тобто розв'язки рівняння

$$s(\sqrt{s}sh\sqrt{s} + Bich\sqrt{s}) = 0. \quad (10)$$

Звідси знаходимо:

$$1) s = 0 \text{ (нульовий корінь);} \quad 2) \sqrt{s}sh\sqrt{s} + Bich\sqrt{s} = 0.$$

З останнього рівняння, після заміни  $chx = \cos ix$ ,  $shx = -i \sin ix$ , отримуємо  $-i\sqrt{s} \sin i\sqrt{s} + Bi \cos i\sqrt{s} = 0$ . Якщо в цьому рівнянні ввести заміну  $i\sqrt{s} = \mu$ , то  $s_n = -\mu_n^2$ , а  $\mu_n$  визначаємо з наступного характеристичного рівняння

$$ctg \mu = \mu / Bi. \quad (11)$$

Тепер знайдемо оригінал  $\theta(\gamma, Fo)$ , використовуючи формулу обернення (9). Для першого (нульового) кореня  $s = 0$  будемо мати

$$\frac{\Phi(0)}{\Psi'(0)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Phi(s)}{\Psi'(s)} = \theta_c + \frac{Q}{Bi} [1 + Bi(1-\gamma)].$$

Для останніх коренів знаходимо

$$\Psi'(s) = (...) + \frac{\sqrt{s}}{2} (sh\sqrt{s} + \sqrt{s}ch\sqrt{s} + Bi sh\sqrt{s}),$$

де (...) означає вираз, який стоїть у круглих дужках рівняння (10). Цей вираз дорівнює нулю при  $s = s_n$ . Тоді

$$\Psi'(s_n) = \lim_{s \rightarrow s_n} \Psi'(s) = -\frac{\mu_n}{2} (\sin \mu_n + \mu_n \cos \mu_n + Bi \sin \mu_n).$$

Звідси завдяки рівнянню (11) маємо

$$\Psi'(s_n) = -\frac{Bi(\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n)}{2 \sin \mu_n},$$

$$\begin{aligned} \Phi(s_n) &= \lim_{s \rightarrow s_n} \Phi(s) = \lim_{s \rightarrow s_n} \left\{ Bi\theta_c \cos i\sqrt{s}\gamma + Q \left[ \cos i\sqrt{s}(1-\gamma) + Bi \frac{\sin i\sqrt{s}(1-\gamma)}{i\sqrt{s}} \right] \right\} = \\ &= Bi\theta_c \cos \mu_n \gamma + Q \left[ \cos \mu_n (1-\gamma) + Bi \frac{\sin \mu_n (1-\gamma)}{\mu_n} \right]. \end{aligned}$$

Таким чином, розв'язок задачі (1)–(4) згідно з формулою (9) набуде

$$\begin{aligned} \text{вигляду } \theta(\gamma, Fo) &= \theta_c + \frac{Q}{Bi} [1 + Bi(1-\gamma)] - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left\{ \theta_c \cos \mu_n \gamma + \frac{Q}{Bi} \left[ \cos \mu_n (1-\gamma) + \frac{Bi \sin \mu_n (1-\gamma)}{\mu_n} \right] \right\} e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (12) \end{aligned}$$

де  $A_n = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}$ ;  $\mu_n$  — корені характеристичного рівняння (11). Не

важко переконатися безпосередньою підстановкою, що розв'язок (12) повністю задовольняє рівняння (1) й умови (3), (4). Зауважимо, що при  $Fo \rightarrow \infty$  з останнього рівняння отримуємо стаціонарне значення температурного поля

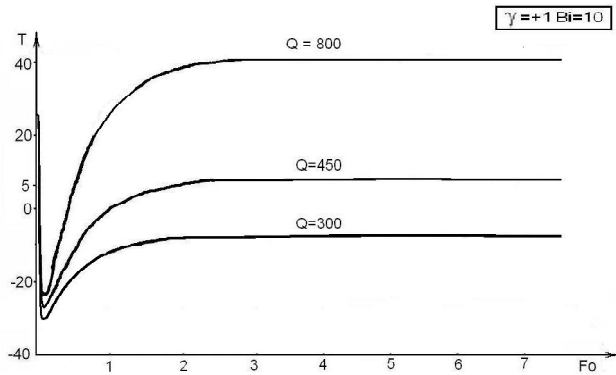
$$\theta_{\infty}(\gamma) = \lim_{Fo \rightarrow \infty} \theta(\gamma, Fo) = \theta_c + \frac{Q}{Bi} [1 + Bi(1-\gamma)]. \quad (13)$$

При потребі розв'язок (12) можна переписати в розмірному вигляді:

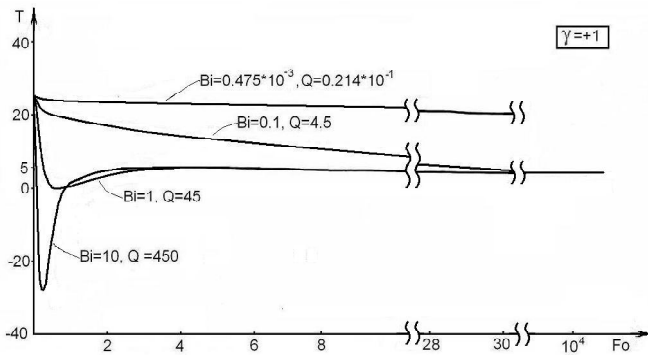
$$\begin{aligned} T(z, t) &= T_c + \frac{q}{\alpha} \left[ 1 + \frac{\alpha}{\lambda} (h-z) \right] - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left\{ (T_c - T_n) \cos \mu_n \frac{z}{h} + \frac{q}{\alpha} \left[ \cos \mu_n \frac{h-z}{h} + \frac{\alpha h}{\lambda} \frac{\sin \mu_n \frac{h-z}{h}}{\mu_n} \right] \right\} e^{-\mu_n^2 \frac{at}{h^2}} \quad (14) \end{aligned}$$

**Аналіз графіків температури.** Згідно з формулою (12) на мові FORTRAN проведено числові розрахунки й отримано графіки температури залежно від часу (рис. 2). На рис. 2а наведено графіки температури на верхній поверхні плити  $z = h$  ( $\gamma = +1$ ) залежно від безрозмірного часу  $Fo$  для температури зовнішнього середовища  $T_c = -40^\circ\text{C}$ , початкової температури плити  $T_n = +25^\circ\text{C}$ , критерію  $Bi = 10$  при різних значеннях безрозмірного потоку  $Q$ . Як видно з графіків, щоб  $T_{cm}(h) = +5^\circ\text{C}$ , потрібно, аби значення теплового потоку  $Q = 450$  одиниць. Зі збільшенням теплового потоку  $Q$  зростає  $T_{cm}$ . На рис. 2б зображено графіки температури на верхній поверхні плити  $z = h$  ( $\gamma = +1$ ) для різних

значень коефіцієнта теплообміну  $Bi = 10; 1; 0,1$  і відповідних значень теплового потоку  $Q = 450; 45; 4,5$ , для яких стаціонарне значення  $T_{cm}(h) = +5^\circ\text{C}$ . Як бачимо, зі зменшенням числа  $Bi$  зменшуються відповідні значення теплового потоку  $Q$ , а час виходу температури на стаціонарне значення збільшується. Це означає, що зі зменшенням теплообміну між верхньою поверхнею плити  $z = h$  ( $\gamma = +1$ ) і навколишнім середовищем для досягнення  $T_{cm}(h) = +5^\circ\text{C}$  потрібно затратити меншу кількість теплової енергії.



а



б

Рис. 2. Графіки розподілу температури на верхній поверхні плити залежно від безрозмірного часу  $Fo$ :

а — при  $Bi = 10$  і різних значеннях  $Q$ ; б — при різних значеннях  $Bi$  та  $Q$

Наприклад, прийемо, що пластина виготовлена з алюмінію ( $\lambda = 210 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^\circ\text{C}}$ ,  $a = 0,91 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$  [3]) товщиною  $h = 2 \text{ мм}$  при  $\alpha \approx 50 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{C}}$

( $Bi \approx 0,475 \cdot 10^{-3}$ ,  $Q \approx 0,0214^\circ C$ ). Тоді, згідно з відповідним графіком (рис. 2б), знаходимо  $Fo \approx 10^4$ . Звідки  $t = (Foh^2)/a \approx 440$  с. Тобто для алюмінієвої пластини товщиною  $h = 2$  мм при її початковій температурі  $T_n = +25^\circ C$  і температурі навколишнього середовища  $T_c = -40^\circ C$ , яка підігрівається через нижню поверхню тепловим потоком  $q = 2250 \text{ Вт/м}^2$ , встановлено, що час виходу температури на верхній поверхні пластини на стаціонарне значення  $T_{cm}(h) = +5^\circ C$  дорівнює  $440$  с  $\approx 7$  хвилин.

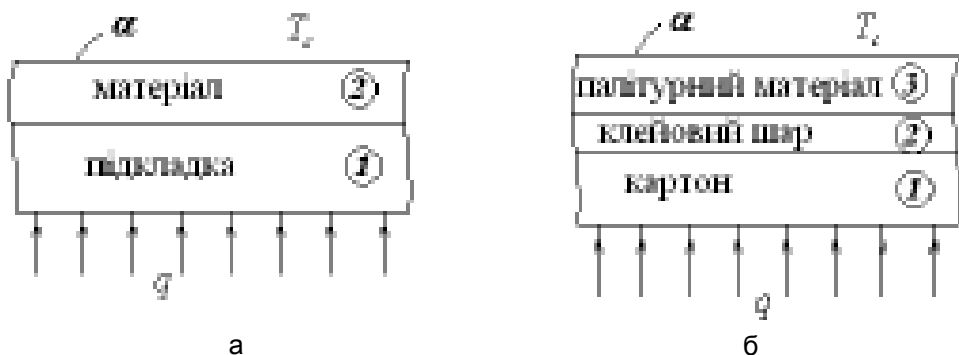


Рис. 3. Схема перерізу:

- а — плити і підкладки, що підігріваються знизу тепловим потоком;  
 б — палітурної кришки, що підігрівається знизу тепловим потоком

**Висновки.** 1) Для збільшення часу виходу температури в розглянутій плиті (пластині) на стаціонарне значення можна використати підкладку (рис. 3а). Матеріал її повинен мати низькі теплофізичні параметри, щоб довше затримувати тепло (наприклад, як у чайнику з подвійним дном). Регулювати час виходу температури на стаціонарне значення можна за допомогою зміни товщини підкладки. Це дозволить економити теплову енергію, бо її можна періодично вимикати.

2) Розглянута задача корисна для вивчення процесу сушіння чи акліматизації поліграфічної продукції, коли підвід тепла здійснюється конвективним, контактним або променевим способом [7]. Наприклад, сушіння книжкових блоків, брошур, аркушів паперу тощо.

3) Корисними такого класу задачі будуть і для визначення нестационарного температурного поля чи напружень у композитах, наприклад, у палітурних кришках. Палітурна кришка — це плоске тришарове тіло, що складається з шарів палітурного і клейового матеріалу та картону (рис. 3б). Наслідком різниці теплофізичних і фізико-механічних параметрів цих шарів при сушінні є жолоблення, відшарування або навіть розтріскування палітурного матеріалу чи картону. Надлишкова волога в палітурній кришці, особливо в клейовому шарі, також призводить до її пліснявіння [7].

4) Вивчення розповсюдження в часі температури в різних точках плити є важливим, оскільки зіставлення температурних кривих різних точок плити дає можливість встановити напрямок градієнта температури. Це дозволяє: керувати даним тепловим процесом, особливо при локальному нагріві [4]; вибрати оптимальний режим сушіння, тобто такий режим, який дає можливість отримувати високоякісний поліграфічний матеріал при мінімальних часі видалення вологи і затратах енергії.

1. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., 1974. 2. Дуб Я. І., Огірко І. В., Ясінський М. Ф. Математичне моделювання друкарських форм. Львів, 1994. 3. Дьюли У. Лазерная технология и анализ материалов. М., 1986. 4. Коляно Я. Ю. Нестационарна задача термопружності для шару при локальній дії концентрованого потоку тепла // Матеріали VII міжнар. наук. конф. «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур». Львів, 2006. Т.1. С. 200–203. 5. Лыков В. А. Теория теплопроводности. М., 1967. 6. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М., 1984. 7. Шот Р. І., Стрпко І. Т. Теплові процеси в поліграфії: Навч. посіб. Львів, 1998.

УДК 512.546

**Н. М. Пирч**

*Українська академія друкарства*

## **М-ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ І НЕСКІНЧЕННІ ОБ'ЄДНАННЯ ТИХОНОВСЬКИХ ПРОСТОРІВ**

*Розглядається застосування методу паралельних ретрактів, запропонованого О. Г. Окуневим, до ізоморфної класифікації вільних топологічних груп просторів, які є нескінченними диз'юнктними об'єднаннями своїх підпросторів.*

*We consider applications of the parallel retracts method, proposed by O. G. Okunev, to isomorphic classification of the free topological groups of the spaces which are infinite disjoint sum of its subspaces.*

М-еквівалентність двох тихоновських просторів означає ізоморфність їхніх вільних топологічних груп у сенсі Маркова [2]. У цій роботі розглянемо застосування методу паралельних ретрактів до класифікації вільних топологічних груп просторів, що є нескінченними диз'юнктними об'єднаннями своїх підпросторів. Позначимо через  $N$  множину натуральних чисел з дискретною топологією. Для топологічного простору  $X$  через  $X^+$  будемо позначати простір, утворений додаванням до простору однієї ізольованої точки. Відношення М-еквівалентності є адитивним, тобто з  $X_1 \sim^M Y_1$  і  $X_2 \sim^M Y_2$  випливає, що  $X_1 \oplus X_2 \sim^M Y_1 \oplus Y_2$ .

У праці [4] запропоновано поняття паралельних ретрактів. Ретракції  $r_1$  і  $r_2$  топологічного простору  $X$  називаються паралельними, якщо виконано умови  $r_1 \circ r_2 = r_1$  і  $r_2 \circ r_1 = r_2$ . Образи простору  $X$  при паралельних ретракціях іменуються