

УДК 519.6+004.942+536

НАБЛИЖЕНИЙ ПІДХІД ДО ЗАДАЧ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНОГО ТЕПЛООБМІНУ

О. М. Горечко

*Українська академія друкарства,
вул. Під Голоском, 19, Львів, 79020, Україна*

Розглянуто задачі складного теплообміну в інженерних конструкціях та їх аналіз в середовищі спеціалізованих пакетів мультифізичного моделювання. На основі скінчено-елементного аналізу задач теплообміну запропоновано наближений підхід, який істотно зменшує витрати комп'ютерних ресурсів під час аналізу таких задач.

***Ключові слова:** теплообмін, метод скінченних елементів, комп'ютерне моделювання.*

Постановка проблеми. Під час проектування складних пристроїв зазвичай проводять побудову їх математичних моделей та аналіз полів і явищ в них. Однією з найчастіше розв'язуваних задач у процесі проектування є теплофізичний аналіз конструкції. Складність часто полягає не тільки в геометрії конкретної конструкції, але й в необхідності найчастіше сумісного аналізу полів температури в твердих тілах і газах з врахуванням теплопередачі кондукцією (для твердих тіл іноді ще й з врахуванням анізотропії), тепловим випроміненням та конвекцією, що перетворює задачу на нелінійну за граничними умовами та рівняннями гідродинаміки.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Проектуючи інженерні конструкції та пристрої електроніки, використовують цілу низку універсальних та спеціалізованих систем автоматизованого проектування (САПР) [1,2]. У процесі проектування доводиться також досліджувати фізику явищ і процесів, які виникають під час функціонування приладів і пристроїв. Останнім часом для цього використовують засоби скінчено-елементного аналізу задач фізики та інженерії з можливостями моделювання зв'язаних (мультифізичних) задач. Окремі з таких задач можна розв'язувати в середовищі САПР, але широкого поширення набули універсальні пакети мультифізичного моделювання. Найпоширенішими комерційними продуктами серед них є Ansys (<http://www.ansys.com/>) та Comsol (<http://www.comsol.com/>), а вільно поширюваними аналогами, наприклад, Salome-Meca (<http://www.salome-platform.org/>) та Elmer (<http://www.csc.fi/english/pages/elmer>).

Класичні інженерні підходи до аналізу таких задач, які давно увійшли до підручників [3,4], не втратили, звичайно, актуальності. Однак сьогодні вони можуть вважатись лише наближеними та й тоді часто потребують використання комп'ютерних розрахунків із залученням числових методів математики.

Мета статті — спрощення математичної моделі теплообміну в інженерних конструкціях з метою економії комп'ютерних ресурсів та перевірка можливості

застосування вільно поширюваного програмного забезпечення для скінчено-елементного мультифізичного моделювання таких процесів.

Виклад основного матеріалу дослідження. Найпростішою задачею моделювання теплообміну в конструкції є аналіз кондуктивної теплопередачі в її елементах. Це лінійна задача, описується рівняннями теплопровідності [3] для системи твердих тіл:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + q_v, \quad (1)$$

де ρ — густина матеріалу, C_p — теплоємність, λ — коефіцієнт теплопровідності, T — температура, t — час, ∇ — оператор Гамільтона (векторний диференціальний оператор першого порядку), q_v — об'ємна густина теплового потоку.

Граничні умови для системи рівнянь виду (1) містять умови контакту між окремими тілами. У разі потреби врахування теплообміну випроміненням задача для системи рівнянь виду (1) стає нелінійною.

Математична модель теплообміну в конструкції суттєво ускладнюється у разі потреби врахування внутрішнього чи зовнішнього теплообміну з газом чи рідиною. Тоді окрім рівняння теплопровідності (1) доводиться розв'язувати рівняння теплопровідності в газах сумісно з рівняннями гідродинаміки [5]. Система рівнянь для опису процесу теплообміну в газі має такий вигляд:

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) T \right) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + q_v, \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) - 2\mu \nabla \cdot \vec{\varepsilon} + \frac{2}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) + \nabla p = \rho \vec{F}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \rho + \rho (\nabla \cdot \vec{u}) = 0, \quad (4)$$

де \vec{u} — вектор швидкості, $\vec{\varepsilon}$ — тензор швидкостей деформації, μ — в'язкість, p — тиск, пов'язаний з густиною та температурою рівнянням стану $\rho = p / (RT)$, \vec{F} — вектор масових сил, що діють на рідину чи газ.

Рівняння теплопровідності (2) для рідин та газів, рівняння руху (3), рівняння нерозривності (4) є нелінійними і навіть у простішому випадку нестисливої рідини для системи (2)–(4) не вдається побудувати аналітичного розв'язку. Тому одним з підходів для аналізу таких задач став підхід скінчено-елементного моделювання, для проведення якого тепер розроблено достатньо багато програмного забезпечення. Ускладнення математичної моделі фізичних процесів у реальній конструкції навіть за простої її геометрії призводить до серйозного зростання необхідних комп'ютерних ресурсів за числового моделювання. Тому спрощення математичної моделі без суттєвої втрати точності особливо на ранніх етапах проектування, коли ще не ухвалені остаточні конструкторські рішення, дає змогу оперативно проводити аналіз та оптимізувати основні параметри конструкції.

Далі на прикладі аналізу теплообміну в електронному блоці, де дуже часто доводиться враховувати усі вищезгадані види теплопередачі, ілюструється наближений підхід до аналізу теплового режиму реальних конструкцій, який забезпечує достатню для інженерної практики точність.

Геометрія і дані для ідеалізованої конструкції

Розглянемо найпростіший плоский варіант блока з закріпленою всередині платою (рис.1). Геометричні характеристики конструкції очевидні з ескізу, поданому на рис. 1 у міліметрах.

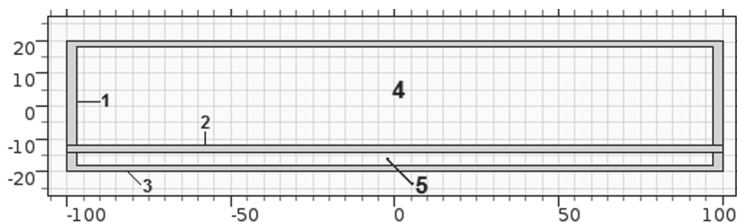


Рис. 1. Геометрія ідеалізованої конструкції: 1, 3 — корпус, 2 — плата, 4, 5 — повітря

Корпус 1, 3 конструкції вважався алюмінієвим ($C_p = 900$ Дж/(кг·К), $\lambda = 238$ Вт/(м·К), $\rho = 2700$ кг/м³), плата 2 — багатошаровою, а тому анізотропною з теплопровідності. Для теплоємності та густини плати ухвалювали значення $C_p = 1369$ Дж/(кг·К), $\rho = 1900$ кг/м³, коефіцієнт теплопровідності по товщині приймався $\lambda = 0,3$ Вт/(м·К), а вздовж плати — $\lambda = 2$ Вт/(м·К). Коефіцієнт теплопровідності вздовж плати обрано значно вищим від матеріалу FR4 та на порядок нижчим від максимальних значень для багатошарових друкованих плат. Теплофізичні характеристики повітря 4,5 обирались для кімнатної температури: $C_p = 1005$ Дж/(кг·К), $\lambda = 0,0257$ Вт/(м·К), $\rho = 1,205$ кг/м³.

Вважалося, що теплообмін конструкції із зовнішнім середовищем описується законом Ньютона з коефіцієнтом тепловіддачі $\alpha = 10$ Вт/(м²·К) за температури зовнішнього середовища 273,15 К. Контакт між матеріалами конструкції вважався ідеальним, хоча в більшості пакетів математичного моделювання передбачена можливість моделювання неідеального теплового контакту через задання на поверхнях контакту тонкого шару зі своїми теплофізичними характеристиками. Під час моделювання теплообміну випроміненням для коефіцієнта чорноти усіх поверхонь ухвалювали значення 0,4. Джерела тепла вважались рівномірно розподіленими по платі 2. В нестационарному випадку значення питомої потужності вважалося 10⁵ Вт/м³ (52,6 Вт/кг).

Числові результати

Під час числового моделювання згідно з рівняннями (1) і врахуванням тільки ідеальної теплопередачі через зони контакту твердих тіл задача потребує мінімум комп'ютерних ресурсів навіть розбиваючи складові 3D-сіткою. Приймаючи достатньо велику тепловіддачу з зовнішньої поверхні блока, корпус практично не нагрівається, а найвища у центрі плати температура в стаціонарному випадку досягає значень понад 240 °С. Зауважимо, що під час моделювання плати ізотропним матеріалом FR4 ($\lambda = 0,3$ Вт/(м·К)), температура в центрі досягала б значень 1600 °С. У нестационарному випадку на сотій секунді температура сягає всього 3,9 °С.

При ускладненні фізики моделі врахуванням інших видів теплообміну між елементами всередині конструкції — теплового випромінення, теплопровідності повітря, конвекції у повітрі — температура на платі суттєво знижується.

Візуалізація поля температур і швидкостей у повітрі для нестационарного випадку в момент часу 800 с подана на рис. 2.

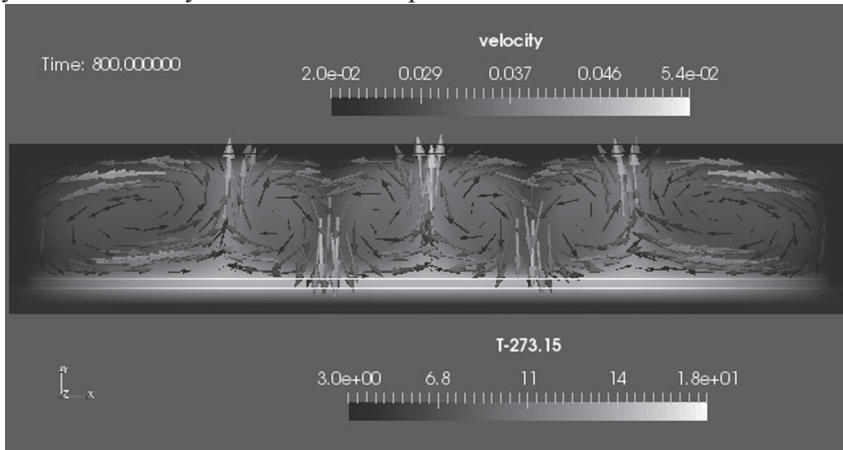


Рис. 2. Візуалізація полів температур та швидкостей повітря при $t = 800$ с

На наведеній візуалізації, окрім стандартного подання тоном температури, стрілки показують величину (довжина стрілок та їх тон) і напрямок швидкості повітря у повітрі. За результатами моделювання можна не тільки наочно бачити розподіл температур у твердих тілах і повітрі, але й визначати області, в яких розвивається конвекція (тут понад платою) та де її немає (під платою).

У розглядуваній модельній задачі потреба оперативної пам'яті зростає майже вдвічі, а тривалість рахунку — майже на порядок. Моделюючи реальні інженерні конструкції, які за геометрією, кількістю матеріалів є набагато складнішими від зображеної на рис. 1, розрахунки теплового режиму доводиться проводити багаторазово, щоб обрати оптимальний варіант. Основним теплофізичним параметром, який цікавить конструктора під час проектування є температура у характерних точках конструкції, яку здебільшого потрібно мінімізувати.

У [3] висвітлюється підхід до моделювання багатокомпонентних конструкцій, що ґрунтується на складанні рівнянь теплового балансу для усіх компонент у припущенні однорідності температури кожної з них. За цим підходом фактично ігнорується розподіл температури кожної з компонент моделі. Розбиття ж компонент на елементи суттєво ускладнює процес підготовки даних та розрахунків. Та й з візуалізацією результатів тут виникають додаткові проблеми.

Тому для моделювання таких конструкцій в середовищі пакетів мультифізичного моделювання в умовах обмежених обчислювальних ресурсів запропоновано теплообмін поза твердими тілами враховувати наближено, а теплопровідність в твердих тілах — точно, згідно з рівняннями теплопровідності (1).

Наближені співвідношення для оцінки тепловіддачі випромінюванням та конвекцією між канонічними поверхнями залежно від віддалі між ними та їх орієнтації в просторі відомі в літературі [3, 4, 6]. В єдиному уніфікованому вигляді тепловий потік від поверхні i до поверхні j можна подати так:

$$Q_{ij} = \alpha_{ij} \cdot S \cdot (T_i - T_j),$$

де α_{ij} — сумарний коефіцієнт тепловіддачі між поверхнями, S — площа поверхонь, T_i — температура відповідної поверхні. Загалом сумарний коефіцієнт тепловіддачі є сумою коефіцієнтів тепловіддачі кондукції α_{ijm} , конвекції α_{ijk} та випромінення α_{ijp} , які, наприклад [3], для одного з варіантів теплообміну між плоскопаралельними поверхнями можна записати так:

$$\alpha_{ijm} = \frac{\lambda_a}{\delta}, \quad \alpha_{ijk} = 0,45 \cdot \sqrt[4]{\frac{|T_i - T_j|}{\delta}}, \quad \alpha_{ijp} = \left(\frac{1}{\varepsilon_i} + \frac{1}{\varepsilon_j} - 1 \right)^{-1} \sigma_0 \frac{T_i^4 - T_j^4}{T_i - T_j},$$

де λ_a — коефіцієнт теплопровідності повітря, δ — віддаль між поверхнями, ε_i — коефіцієнт чорноти відповідної поверхні, σ_0 — стала Стефана-Больцмана.

Такі співвідношення і використано під час оцінки коефіцієнтів тепловіддачі з поверхонь всередині блока. Зокрема, для опису процесу теплообміну між платою і нижньою кришкою приймалось значення коефіцієнта тепловіддачі $7 \text{ Bm}/\text{m}^2\text{K}$ за температури плати $17,5^\circ\text{C}$ і температури кришки $4,7^\circ\text{C}$, а між платою і верхньою кришкою — $5,3 \text{ Bm}/\text{m}^2\text{K}$ за температури плати $17,5^\circ\text{C}$ і температури кришки $3,2^\circ\text{C}$. Візуалізація температур у твердих тілах конструкції у момент часу 800 c за такого моделювання подана на рис. 3.

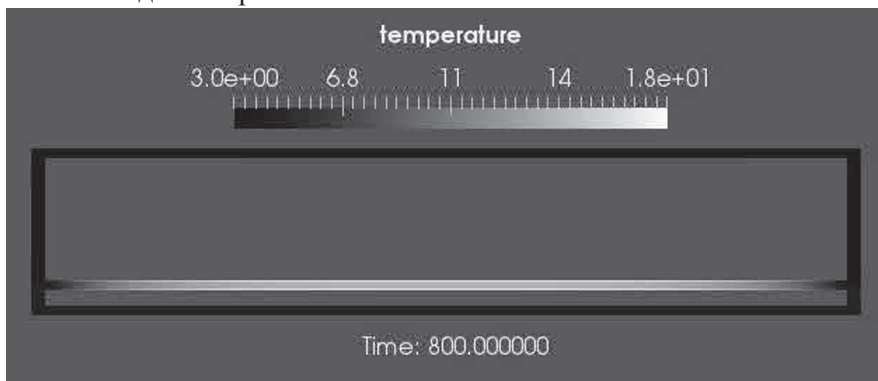


Рис. 3. Візуалізація поля температур для спрощеної моделі при $t=800 \text{ c}$

Точніше оцінити характеристики точності наближення можна на графіках залежності температури в центрі плати залежно від часу за різних моделях задачі, зображених на рис. 4.

Різниця результатів наближеного та «точного» моделювання була у межах 6 % для достатньо широкого діапазону зміни часу коли процес теплообміну з перехідного процесу переходить у стаціонарний. Зауважимо, що похибка для температури корпусу у запропонованого наближення була ще меншою.

Зазначимо, що наведені у цій роботі результати, зокрема у вигляді візуалізацій, отримані за допомогою вільно розповсюджуваних пакетів Elmer та ParaView (<http://www.paraview.org/>). Окремі розрахунки для модельної задачі проводились і в пакеті Comsol. Зауважимо, що хоча у результатах для швидкостей потоків було

отримано помітну різницю, яка у результатах для температур перебувала у межах 1–5 % похибки.

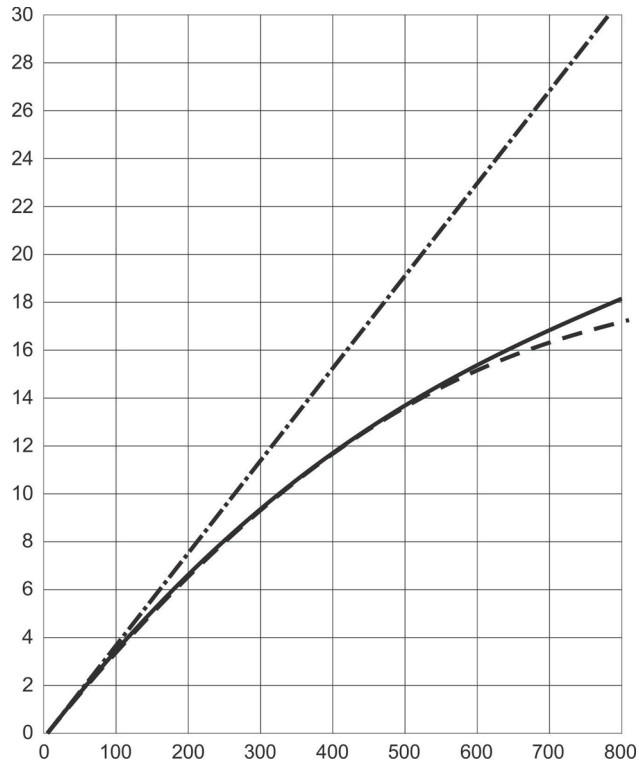


Рис. 4. Залежності температури в центрі плати від часу (штрих-пунктир — відсутність внутрішнього теплообміну, штрих — наближений теплообмін всередині блока, суцільна — точне моделювання)

Висновки. Отже, запропонований в цій роботі підхід дає можливість провести повноцінний аналіз достатньо складних конструкцій. Проведений аналіз задачі в стаціонарному і нестационарному випадках дозволив виявити якісні та кількісні залежності характеристик теплообміну всередині конструкції і з зовнішнім середовищем. Проведені числові експерименти показали, що пакети мультифізичного моделювання з відкритим кодом під час залучення відкритих пре- та постпроцесорів можуть успішно конкурувати з комерційними пакетами в задачах теплообміну та термопружності для реальних інженерних конструкцій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Козлова О. С., Гоменюк С. І. Сучасні тенденції розвитку САПР у механіці. Вісник Запорізького національного університету. 2014. № 1. С. 38–51.
2. Матюхин С. И., Маркулевский Г. Р., Деев О. В. Современное программное обеспечение для моделирования в электронике. Информационные системы и технологии. 2014. № 2 (82). С. 58–71.

3. Дульнев Г. Н. Тепло- и массообмен в радиоэлектронной аппаратуре: учеб. для вузов по специальности «Конструирование и производство радиоаппаратуры». Москва : Высшая школа, 1984. 247 с.
4. Уонг Х. Основные формулы и данные по теплообмену для инженеров: справочник. Москва : Атомиздат, 1979. 216 с.
5. Бетчелор Дж. Введение в динамику жидкости. Москва : Мир, 1973. 758 с.
6. Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением. Москва : Мир, 1975. 935 с.

REFERENCES

1. Kozlova, O. S., & Homeniuk, S. I. (2014). Suchasni tendentsii rozvytku SAPR u mekhanitsi: Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu, 1, 38–51 (in Ukrainian).
 2. Matiukhin, S. I., Markulevskii, & G. R., Deev, O. V. (2014). Sovremennoe programmnoe obespechenie dlia modelirovaniia v elektronike: Informatcionnye sistemy i tekhnologii, 2 (82), 58–71 (in Russian).
 3. Dulnev, G. N. (1984). Teplo- i massoobmen v radioelektronnoi apparature: ucheb. dlia vuzov po spetsialnosti «Konstruirovaniie i proizvodstvo radioapparatury». Moskva : Vysshaia shkola (in Russian).
 4. Uong, Kh. (1979). Osnovnye formuly i dannye po teploobmenu dlia inzhenerov. Moskva : Atomizdat (in Russian).
 5. Betchelor, Dzh. (1973). Vvedenie v dinamiku zhidkosti. Moskva : Mir (in Russian).
 6. Zigel, R., & Khauell, Dzh. (1975). Teploobmen izlucheniem. Moskva : Mir (in Russian).
- doi: 10.32403/1998-6912-2018-1-56-93-100

APPROXIMATE APPROACH TO THE PROBLEMS OF COMPLEX HEAT EXCHANGE SIMULATING

O. M. Horechko

*Ukrainian Academy of Printing,
19, Pid Holoskom St., Lviv, 79020, Ukraine
alexgnom@ukr.net*

The problems of complex heat exchange in engineering constructions and their analysis in the framework of specialized packages of multiphysics modelling have been considered. The mathematical model of heat exchange in the construction becomes more complicated if it is necessary to model the internal or external heat exchange with gas or liquid. If it is necessary to take into account heat exchange by radiation, the problem for the system of equations of thermal conductivity in the elements of the structure becomes nonlinear. It is impossible to construct an analytical solution for such problems, even for the simplest tasks in geometry.

On the basis of finite-element analysis of heat transfer problems, an approach has been suggested that essentially reduces the cost of computer resources for analysing such problems. For example, the modelling of a sealed electronic unit with a board inside has been carried out. The board has been considered as a source of heat. Heat exchange with

the environment has been described by Newton's law. Inside the unit, the heat exchange between the board and the case have been described by the thermal conductivity of the contact surfaces, convection in the air in the internal volume of the unit and the thermal radiation between the internal surfaces of the unit. In this formulation, the task has been modelled using COMSOL and Elmer multiphysical simulation packages. In the case of modelling by the Elmer package, the results visualization has been performed in the ParaView package. The suggested approximated approach consists in an approximate estimation of the heat exchange coefficients of the internal surfaces of the unit for convection and thermal radiation processes. In this case, the problem is reduced to the solution of the system of thermal conductivity equations for solids forming a block design. It becomes linear and in calculations using the same packages it requires much less computer resources. In the paper, the modelling error for describing the problem in the framework of the suggested approach has been analysed.

Keywords: *heat exchange, finite elements method, computer simulation.*

Стаття надійшла до редакції 30.04.2018.

Received 30.04.2018.