

УДК 519.6+004.942+536+534.1

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПРО ВІБРАЦІЙНУ ТЕРМОЧУТЛИВІСТЬ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

О. М. Горечко¹, Р. Р. Горечко²

¹Національний університет «Львівська політехніка»,
вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна

²Українська академія друкарства,
вул. Під Голоском, 19, Львів, 79020, Україна

Розглянуто задачу визначення власних частот попередньо навантажених внаслідок нагрівання пружних елементів конструкцій. Подано постановку задач визначення вібраційних характеристик пружних елементів конструкцій при моделюванні їх за теорією пластин та тривимірного пружного тіла. Обґрунтовано необхідність використання пакетів мультифізичного моделювання для дослідження таких задач. Проведено перевірку точності обчислення власних частот для використаних моделей пружних тіл на відомих з літератури прикладах початково ненапружених пластин та окремих прикладах напружених пластин, що мають точний розв'язок. За допомогою обчислювального експерименту в тривимірній постановці досліджено задачу нагрівання плоскої панелі, зацімленої по чотирьох отворах, а також проаналізовано вплив її нагрівання на зміну власних частот коливань. Показано однакову залежність зміни основної частоти зі зміною температури для цієї задачі та зацімленої по усіх краях панелі.

Ключові слова: теплообмін, вібрація, термопружність, метод скінченних елементів, комп'ютерне моделювання.

Постановка проблеми. При проектуванні складних пристроїв, як правило, проводиться побудова термомеханічних математичних моделей та аналіз в них полів температури та напружень. Задачі лінійної термопружності належать до класичних задач механіки суцільного середовища, однак для реальних конструкцій складність часто полягає в геометрії конкретної конструкції. У таких випадках доводиться застосовувати числові методи розв'язування задач математичної фізики.

До елементів конструкцій часто висуваються вимоги щодо дії динамічних навантажень. Переважно це просто вимоги відсутності резонансів, які передаються на панелі від механізмів безпосередньо або через навкружні елементи конструкцій. Значний вплив на вібраційні характеристики має попередній натяг (стиск) прямокутних панелей у їх площині. Дослідження зміни динамічних характеристик пластин, які виникають при наявності початкових напружень внаслідок дії температурних полів, проводились в роботах [1, 2]. Поширення таких досліджень на складніші конструкції вимагає застосування сучасних пакетів мультифізичного моделювання.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Важливим етапом проектування конструкцій і технологій є числове моделювання фізичних процесів, які описуються за допомогою диференціальних рівнянь в частинних похідних. Крім того, у реальних конструкціях поєднуються різні фізичні моделі. Окремі з таких задач можуть розв'язуватись у середовищі САПР [3], але значного поширення набули універсальні пакети мультифізичного моделювання. Останнім часом при моделюванні інженерних конструкцій та пристроїв електроніки використовують засоби скінченно-елементного аналізу задач фізики та інженерії з можливостями моделювання зв'язаних (мультифізичних) задач [3]. Найпоширенішими комерційними продуктами числового аналізу таких задач є Ansys (<http://www.ansys.com/>) та COMSOL Multiphysics (<http://www.comsol.com/>). З вільно поширюваних пакетів аналогічного призначення можна назвати Salome-Meca (<http://www.salome-platform.org/>) та Elmer (<http://www.csc.fi/english/pages/elmer>).

Резонансні частоти пружних елементів конструкцій суттєво залежать від їх попереднього натягу (стиску), що неминуче відбувається при нагріванні окремих складових пружних систем. Суттєвий вплив температурних напружень на вібраційні характеристики зацімленої прямокутної пластини показаний у праці [1]. В роботі [2] розглянута постановка задачі динаміки прямокутних пластин, що складають основу пружної системи, при зміні температури однієї з них. При моделюванні поля температур в конструкції використаний наближений підхід розбиття системи на складові з однорідною температурою. Досліджений вплив нагрівання однієї з пластин конструкції на зміну власних частот пластин системи.

Мета статті – використання моделі лінійної теорії пружності з початковими напруженнями для аналізу зміни власних частот механічних коливань в інженерних конструкціях внаслідок їхнього нагрівання/охолодження та перевірка можливості застосування програмного забезпечення для скінченно-елементного мультифізичного моделювання таких задач.

Виклад основного матеріалу дослідження. Якщо пружна конструкція перебуває під дією динамічних навантажень, то для опису коливань можуть бути використані різні моделі поведінки матеріалів. Зокрема, в роботах [1, 2] нормальні до площини пластин деформації описані в наближенні Кірхгофа за допомогою рівнянь:

$$D\Delta^2 w - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad (1)$$

де $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – циліндрична жорсткість пластини, E , ν , ρ , h – модулі Юнга,

Пуассона, густина, товщина пластини, N_{xx} , N_{xy} , N_{yy} – зусилля в площині пластини. У випадку спричинення початкових зусиль N_{xx}^0 , N_{xy}^0 , N_{yy}^0 у площині пластини температурним полем вони визначаються з розв'язків плоскої задачі термопружності.

Аналогічною є постановка задачі для складних елементів конструкцій у загальному тривимірному випадку [4]. Нехай ε_{ij}^0 – тензор деформації початкових напружень. Закон Гука з врахуванням їх наявності в тілі має вигляд:

$$G_{ij} = 2\mu(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0) + \lambda\delta_{ij}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0).$$

Підстановка цього співвідношення разом з виразами тензора малих деформацій через переміщення у рівняння руху приводить до системи рівнянь у переміщеннях вигляду:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)u_{j,ji} + X_i - \rho \ddot{u}_i = 2\mu\varepsilon_{ij}^0 + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{ij}^0. \quad (2)$$

Розв'язок системи рівнянь (2) має будуватися при класичних граничних умовах теорії пружності або умовах контакту окремих елементів конструкцій.

Таким чином, йдеться про послідовне розв'язування двох задач: задачі термопружності [4] для знаходження початкових деформацій та задачі пошуку інших полів чи характеристик, пов'язаних з початковими напруженнями і деформаціями.

Слід зазначити, що в сучасних пакетах мультифізичного моделювання часто нема необхідності описувати ускладнені рівняння для знаходження полів, пов'язаних з початковими навантаженнями. Достатньо вказати, що у досліджуваній моделі потрібно врахувати початкові напруження чи деформації, вказані явно або як результат попереднього аналізу іншої задачі, здійсненого у цьому ж пакеті на попередньому кроці дослідження. У COMSOL Multiphysics, наприклад, такий підхід передбачено для широкого кола моделей лінійної теорії пружності від загального тривимірного випадку до моделей теорії пластин, оболонок, мембран, балок тощо.

Коректно кажучи, перевірка точності обчислень при числовому аналізі власних частот навіть при моделюванні за теорією пластин (1) може проводитись лише для вільно опертої прямокутної пластини. Тільки при цьому способі кріплення вдається записати точний вираз для власних частот при різних формах власних коливань:

$$f_{mn} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{D}{\rho h} \left[\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{12(1-\nu^2)\alpha T}{\pi^2 h^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \right]}. \quad (3)$$

Вираз (3) записаний при умові неподатливості кріплень на краях $x = 0$, $x = a$ та $y = 0$, $y = b$ у припущенні, що вздовж осей діють зусилля $N_{xx} = N_{yy} = -EahT$ (α – коефіцієнт теплового розширення, h – товщина пластинки, T – перегрів пластинки). $N_{xy} = 0$.

Всі інші варіанти кріплення вимагають застосування числових методів хоча б для знаходження коренів нелінійних рівнянь. Для таких пластин ще з середини минулого століття існують наближені значення кількох перших власних частот [5].

Числове моделювання проводилося при наступних значеннях фізико-механічних констант: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0,3$, $\rho = 7800$ кг/м³, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ град⁻¹ для квадратної пластинки зі стороною $a = b = 100$ мм. Порівняння власних частот f_{plate} [Гц], отриманих за допомогою числового моделювання, з їхніми точними значеннями f_{exact} [Hz], обчисленими згідно із співвідношенням (3), подано в табл.

При інших варіантах кріплення реально порівняти точність моделювання лише для власних частот в ненапруженому стані. Наприклад, для зацімленої по усім краям пластинки отримано значення основної частоти 872.55 Гц, тоді як з наближених співвідношень у [5] – 881.139 Гц (відносна похибка 0,98 %). У літературі надаються також співвідношення для обчислення власних частот пластинок, опертих у точках.

Наприклад, в [6] у таблиці 11–6 подані співвідношення для двох перших власних частот власних коливань прямокутної пластинки, опертої по чотирьох кутах. При вказаних характеристиках пластинки ці співвідношення дають значення 173.64 Гц та 385.33 Гц. В результаті числового моделювання отримані значення 173.07 Гц та 383.06 Гц, які відрізняються від довідкових менш ніж на відсоток.

Таблиця

Порівняння результатів для опертої пластини з точним розв'язком

m-n	T=-10 [K]			T=0 [K]			T=10 [K]		
	f _{plate}	f _{exact}	%	f _{plate}	f _{exact}	%	f _{plate}	f _{exact}	%
1-1	620.34	620.96	0,1	480.62	481.4	0,2	277.81	279.11	0,5
1-2	1349.7	1354	0,3	1198.8	1204	0,4	1026	1031	0,5
2-1	1349.7	1354	0,3	1198.9	1204	0,4	1026	1031	0,5
2-2	2068.1	2079	0,5	1913.6	1926	0,6	1745.6	1759	0,8
1-3	2544.6	2562	0,7	2388.7	2407	0,8	2222	2242	0,9
3-1	2544.6	2562	0,7	2388.8	2407	0,8	2222.1	2242	0,9

Однак дисторсія $\varepsilon_{ij}^0 = \alpha_i \delta_{ij} T$ [4], загалом кажучи, не задовільняє умови сумісності, тому в тілі виникають напруження, які необхідно попередньо знайти. У тривимірній постановці моделювання проводилось для випадку тонкої ($h = 1$ мм) панелі, що нагрівається внутрішніми джерелами тепла. При рівномірному нагріванні панелі на 10° К значення основної частоти, отримане для рівномірних температурних напружень, склало 628.22 Гц, тоді як більш коректне моделювання – 709.25 Гц.

Використання моделей пластин, оболонок чи тривимірних пружних тіл дає можливість моделювати більшість елементів конструкцій. Як приклад розглянемо випадок пружної панелі, зацімленої по кутових отворах. Фізико-механічні властивості матеріалу панелі тотожні наведеним вище. При моделюванні задачі теплопровідності використано значення коефіцієнтів теплопровідності 44.5 Вт/м·К, теплоємності 475 Вт/кг·К, тепловіддачі з поверхонь 5 Вт/м²·К. Розміри панелі 100*100*1 мм, а центри отворів діаметром 5 мм зміщені від країв на 10 мм. Моделювання проводилось для тривимірного випадку.

Як і слід сподіватись, у таких задачах поле температурних напружень нерівномірне. На рис. подане зображення поля напружень σ_{xx} при рівномірному перегріванні панелі на 10° К. Вигляд панелі стилізовано здеформований внаслідок температурних деформацій. Внаслідок того, що більша частина країв панелі податлива, максимальні значення напружень досягаються в околі зафіксованих отворів, тоді як середина панелі майже не навантажена.

Однак відносно слабка навантаженість панелі в її площині не вплинула на суттєву залежність основної частоти від температури. Значення основної частоти, яке найбільше залежить від зміни температури, при нульовому перегріванні панелі складає 575.54 Гц, тоді як при перегріваннях -10° К та 10° К – відповідно 638.7 Гц

та 504.33 Гц. Це нижче ніж відповідні цифри для зацімленої по чотирьох сторонах панелі: 1070.3 Гц, 880.09 Гц та 628.22 Гц. Однак, якщо порівнювати відносну зміну частоти температурно навантаженої та не навантаженої панелей, то отримуємо значення 11–15 % при 10 градусах охолодження/перегрівання для обох варіантів кріплення. Для власних коливань з вищими частотами ця зміна зменшується і для шостої власної частоти складає 3–6 %.

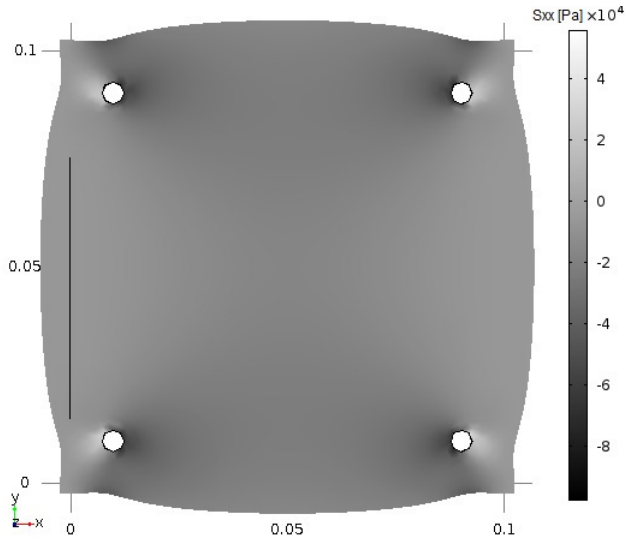


Рис. Поле напружень в площині панелі

Висновки. Отже, використаний нами підхід мультифізичного моделювання дозволяє провести аналіз впливу температури на власні частоти достатньо складних конструкцій. Проведений аналіз задачі в стаціонарному і нестаціонарному випадках дозволив виявити якісні і кількісні залежності зміни основної частоти власних коливань пластин конструкції від комбінації матеріалів у ній, а також характеристик теплообміну всередині конструкції та із зовнішнім середовищем.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Горечко О. М., Горечко Н. О. Вплив температури на вібраційні характеристики прямокутної панелі. Наукові записки [Української академії друкарства]. 2003. Вип. 6. С. 111–114.
2. Горечко О. М., Горечко Р. Р. Наближений розв’язок задачі про вібраційну термочутливість прямокутної панелі. Наукові записки [Української академії друкарства]. 2010. № 2 (18). С. 62–70.
3. Козлова О. С., Гоменюк С. І. Сучасні тенденції розвитку САПР у механіці. Вісник Запорізького національного університету. 2014. № 1. С. 38–51.
4. Nowacki W. Teoria sprężystości. Warszawa : Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1970. 769 p.
5. Warburton G. B. Vibration of Rectangular plates. *Proc. Inst. Mech. Engrs.* 1956. № 12 (168). Pp. 371–384.

6. Blevins R. *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*. New York : Van Nostrand Reinhold Co, 1979. 492 p.

REFERENCES

1. Horechko, O. M., & Horechko, N. O. (2003). Vplyv temperatury na vibratsiini kharakterystyky priamokutnoi paneli: Naukovi zapysky [Ukrainskoi akademii druzarstva], 6, 111–114 (in Ukrainian).
2. Horechko, O. M., & Horechko, R. R. (2010). Nablyzhenyi rozv'iazok zadachi pro vibratsiinu termochutlyvist priamokutnoi paneli: Naukovi zapysky [Ukrainskoi akademii druzarstva], 2 (18), 62–70 (in Ukrainian).
3. Kozlova, O. S., & Homeniuk, S. I. (2014). Suchasni tendentsii rozvytku SAPR u mekhanitsi: Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu, 1, 38–51 (in Ukrainian).
4. Nowacki, W. (1970). *Teoria sprężystości*. Warszawa : Państwowe Wydawnictwo Naukowe (in Polish).
5. Warburton, G. B. (1956). Vibration of Rectangular plates: *Proc. Inst. Mech. Engrs*, 12 (168), 371–384 (in English).
6. Blevins, R. (1979). *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*. New York : Van Nostrand Reinhold Co (in English).

doi: 10.32403/1998-6912-2022-1-64-41-47

SOLVING PROBLEMS ABOUT VIBRATION HEAT SENSITIVITY OF STRUCTURAL ELEMENTS

O. M. Horechko¹, R. R. Horechko²

¹*Lviv Polytechnic National University,
12, S. Bandera St., Lviv, 79013, Ukraine*

²*Ukrainian Academy of Printing,
19, Pid Holoskom St., Lviv, 79020, Ukraine
oleksandr.m.horechko@lpnu.ua
romanagor@gmail.com*

Structural elements fixed in the construction are often exposed to thermal factors, as a result of which they have initial stresses and strains that affect their static and dynamic characteristics change. In this work, the research of influence of temperature initial loading on elastic structural elements on their eigenfrequencies is carried out. The formulation of problems for determining the elastic elements of structure vibrational characteristics in their modeling by the theory of plates and three-dimensional elastic body is presented. The real elements of complex geometry structures, even in an elastic formulation, do not have an analytical solution of these problems. The necessity of using multiphysics modeling packages for the research of such problems is substantiated.

The accuracy of the natural frequencies calculation for used elastic bodies models on the known from the literature examples is checked. For unstressed bodies, such examples are the results of eigenfrequencies calculation in rectangular plates with different boundary conditions variants at the edges and at separate points. For initially stressed bodies, an example of the exact analytical solution of the vibration problem of a rectangular plate supported on all edges is used for this purpose. The problem of heating a flat panel clamped by four holes is studied in a three-dimensional formulation with the computational experiment help. The influence of its heating on the change of eigenfrequencies is analyzed. The same dependence of the change of first natural frequency with the temperature change for this task and the panel clamped on all edges is shown. The obtained results make it possible to conclude the temperature stresses significant influence on the fundamental frequency of structural elements. This effect decreases on higher oscillations with increasing frequency.

Keywords: *heat transfer, vibration, thermoelasticity, finite element method, computer simulation.*

Стаття надійшла до редакції 15.02.2022.

Received 15.02.2022.