выполнения домашних заданий дома). В статье подчеркивается важность физкультминуток для сохранения физического и психологического здоровья детей. Физкультминутки могут быть оздоровительными, когнитивными, креативными, антистрессовыми, двигательно-речевыми либо синтетическими. Они способны восстановить работоспособность школьников, улучшить настроение, предупредить нарушения осанки и зрения, приучить их к здоровому образу жизни, сформировать определенное мировоззрение, основанное на понимании необходимости сохранения собственного здоровья. Физкультминутки должны соответствовать возрастным и психологическим особенностям учеников, быть разнообразными, интересными и простыми, вписываться в общий ход урока. Лучший воспитательный, оздоровительный и развивающий эффект имеют именно синтетические физкультминутки.

Ключевые слова: *здоровье, оздоровительные технологии, младшая школа, физкультурно-оздоровительная работа, инновация, физкультминутка, физкультпауза.*

SALIVON A., KINISHENKO N. Athletic minutes at initial school as an important element of lesson and athletic-health work.

The article is sanctified to research of value, kinds and functions of athletic minutes as one of health technologies at junior school. Experience of teachers of initial classes is analyzed. The innovative going is studied near realization of athletic-health work at school. It is suggested to plug athletic minutes and athletic pauses in the daily of students (at the beginning of working day before lessons, during lessons, during implementation of homework of house) routine. In the article importance of athletic minutes is underlined for maintenance of physical and psychological health of children.Athletic minutes can be health, cognitive, creative, anti-stress, motor-speech or synthetic. They are able to restore the work capacity of schoolchildren, improve mood, prevent violations of posture and vision, accustom them to a healthy lifestyle, form a certain worldview, based on the understanding of the need to preserve their own health. Physical minutes should correspond to the age and psychological characteristics of students, be diverse, interesting and simple, and fit into the general course of the lesson. The best educational, health and developmental effect is precisely synthetic physical minutes.

Keywords: *health, health technologies, junior school, athletic-health work, innovation, athletic minute, athletic pause.*

УДК 378.147: 517

Сдвижкова О. О., Щербаков П. М., Тимченко С. Є.

МЕТОД МАТЕМАТИЧНОГО ВІДКРИТТЯ ПРИ ВИВЧЕННІ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Запропоновано метод активації уваги учнів на заняттях з математики, зокрема при вивченні числової послідовності і її границі. Інтрига полягає в тому, що послідовності, прийняті в якості об’єктів нових означень і досліджень, складені за алгоритмом покрокового запису виразів тих середніх величин, на основі яких Піфагор зробив цікаве відкриття, назване тетрадою. Нескладний аналіз наведених прикладів дозволив зробити припущення про те, що числові послідовності середніх арифметичних і середніх гармонійних прагнуть до однієї і тій же границі, яка дорівнює середньому геометричному їх відповідних членів. На цьому припущенні сформульовано математичне відкриття, яке здатне зацікавити учнів своїм змістом і перспективою стати його співавторами. У творчій обстановці доказу *прогнозованого відкриття викладені найважливіші поняття теорії границі послідовності. З метою забезпечення більш глибокого розуміння теми, процес наближення збіжної послідовності до своєї границі, її монотонність і обмеженість показані на рисунку у вигляді переміщення точок вздовж числової вісі. Зроблено висновок про перспективу застосування методу при поясненні диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами.*

Ключові слова: *числова послідовність, тетрада, середнє арифметичне, середнє гармонійне, середнє геометричне, границя.*

Інтенсивний розвиток інформаційних засобів і технологій змінив ставлення учнів до математики не в її користь. Робота з комп'ютером, безумовно, відкриває простір до творчої діяльності, вона, як правило, закінчується задоволенням, тому що отриманий результат може розглядатись у вигляді відкриття, нехай скромного, але зробленого безпосередньо самим користувачем. Така нагорода за свою працю, як важливий психологічний фактор, природно, викликає в учнів бажання поглибити та систематизувати свої знання в найбільш захоплюючий для них сфері пізнання. Ситуація, що склалася для кращого вивчення предметів, які знаходяться поза конкуренцією з математикою по рейтингу інтересів, створює очевидну проблему, ефективність вирішення якої багато в чому визначається рівнем вдосконалення застосовуваних методів навчання.

Незаперечне визнання педагогічною громадськістю отримали методики підвищення активності учнів на заняттях, що використовують інтригу доказу прогнозованих ними результатів. Так, наприклад, заслуговує на особливу увагу виправдавше себе правило "найкращий спосіб вивчити що-небудь – це відкрити самому" [1]. Такої ж думки дотримувався Т. Лейбніц: "Я намагався писати так, щоб вивчаючим завжди міг бачити внутрішню основу досліджуваних ним речей, щоб він міг виявити джерело відкриття і, отже, у всьому розібратися так, як би він це придумав сам" [2]. В даний час позитивно зарекомендував себе у вищій школі метод прямого діалогу лектора зі студентами при поясненні нових теоретичних положень [3]. Однак, він не дозволяє загострити їх увагу реальною перспективою зробити математичне відкриття. Головною тезою, що випливає з зазначених робіт, є створення таких умов, при яких з'явиться в учнів можливість здогадатися, а потім довести передбачене. Саме так робляться відкриття, що стимулюють навчання і наукові звершення.

За переказами Піфагор (VI в. до н.е.) зробив цікаве відкриття. Воно полягало в тому, що разом зі струною завдовжки $12l$, зливаючись з нею, звучать струни того ж натягу, з довжинами $6l$ (вище на октаву), $8l$ і $9l$ (вище на квінту і на кварту відповідно). При цьому $9l$ є середнє арифметичне $6l$ і $12l$ ($\frac{6+12}{2}l = 9l$), а $8l$ він визначив як середнє гармонійне цих чисел ($\frac{2}{\frac{1}{6l}+\frac{1}{12l}} = 8l$).Це співзвуччя називалося тетрадой і передбачалося, що тетрада є та гамма, по якій співають сирени.

Завдання полягає в тому, щоб використати інформацію про тетраду для створення творчої обстановки на занятті і залучити на цій основі увагу учнів до інших, також цікавим співвідношень між деякими математичними поняттями, які базуються на правилах обчислення середніх величин, що визначають довжини струн однакового звучання. Причому, учні самі повинні зробити висновок про можливе існування таких співвідношень, а доказ правомірності їх припущень слід виконати на використанні і докладном поясненні тих математичних положень, які відповідають плану даного заняття.

Скористаємося відомими визначеннями середніх величин для двох дійсних чисел a і b:

середнє арифметичне $\frac{a+b}{2}$,

середнє гармонійне $\frac{2}{\frac{2}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2ab}{a+b}$, (1)

середнє геометричне $\sqrt{ab}$.

Нагадаємо, що середнє геометричне є середнім пропорційним, тому що рівність $c=\sqrt{ab}$ рівносильна пропорції $\frac{a}{c}=\frac{c}{b}$. Неважко переконатися, що для цих середніх справедливо наступна подвійна нерівність:

$$\frac{2ab}{a+b}\le\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}, \tag{2}$$

Знаки рівності при $a=b$.

Тепер з безлічі додатних чисел довільно візьмемо два числа a_1 і b_1, причому $a_1>b_1$. Згідно (1) запишемо для них середнє арифметичне і середнє гармонійне відповідно:

$$a_2=\frac{a_1+b_1}{2},\ \ b_2=\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}.$$

Виконуючи з a_2 і b_2 такі ж дії, як з a_1 и b_1, отримаємо

$$a_3=\frac{a_2+b_2}{2},\ \ b_3=\frac{2a_2b_2}{a_2+b_2}.$$

За цим правилом для будь-яких $n\in N$ маємо

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\ \ b_n=\frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}.$$

На основі виконаних дій ми отримали впорядковану множину по кожній середній величині.

Визначення 1. Якщо кожному числу з натурального ряду чисел 1, 2, 3, … n, … поставлено у відповідність дійсне число x_n, то отримана за таким принципом впорядкована множина дійсних чисел $x_1,\ x_2,\ x_3, ..., x_n, ...$ називається **числовою послідовністю** (або просто **послідовністю**) і позначається $\{x_n\}$, де $x_1,\ x_2,\ x_3, ..., x_n, ...$ члени цієї послідовності, а x_n - загальний її член. Таким чином, ми отримали дві наступні послідовності:

$$\{a_n\}=a_1, a_2, a_3, ... a_n, ...\ \{b_n\}=b_1, b_2, b_3, ... b_n, ... \qquad (3)$$

Послідовність вважається заданою, якщо зазначений спосіб отримання будь-якого її члена. Однак, в даному випадку не представляється можливим його знайти, тому скористаємося рекурентним способом, при якому задається один або кілька перших членів послідовності, а решта її членів визначається по деякому правилу через попередні. Використовуючи його, для прийнятих чисел a_1 і b_1 запишемо послідовності (3) в загальному вигляді:

$$\{a_n\}=a_1,...\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},...\ \{b_n\}=b_1,...\frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}},... \qquad (4)$$

Приклад № 1. З точністю до шостого знака після коми, записати числові послідовності (4), якщо a_1 = 40 і b_1 = 10.

$\{a_n\}$= 40; 25; 20,5; 20,006097; 20,000001;…

$\{b_n\}$= 10; 16; 19,512195; 19,993904; 19,999998;… (5)

Приклад № 2. Для умови прикладу 1 записати числову послідовність $\{c_n\}$, складену за принципом обчислення середніх геометричних значень (1), тобто $\{c_n\}=\sqrt{a_1b_1},...,\sqrt{a_nb_n},...$

Маємо: $\{c_n\}$ = 20; 20; 19,99999; 19,99999; …

Виявляється, що обидві послідовності, отримані в прикладі № 1, наближаються (кажуть "прямують") до одного і того ж числа, рівному 20, причому значення членів послідовності $\{a_n\}$ зменшуються, залишаючись весь час більше 20, а послідовності $\{b_n\}$ – зростають, залишаючись менше цього числа. Кожен член послідовності $\{c_n\}$, наведеної в прикладі № 2, взагалі прагне зберегти своє значення, також рівне 20 або близьке до нього в залежності від точності обчислень. Такий результат заохочує перспективою зробити математичне відкриття, якщо зможемо його довести для загального випадку.

Доведення. Звернемося до числових послідовностей (4). Якщо $a_1 > b_1$, то, згідно з (2) справедливо

$$a_2 > b_2, a_3 > b_3, ... a_n > b_n \tag{6}$$

В свою чергу

$$\begin{aligned} a_1 > a_2 > a_3 > ... > a_n \\ b_1 < b_2 < b_3 < ... < b_n \end{aligned} \tag{7}$$

Об'єднаймо нерівності (6) і (7).

$$(a_1 > a_2 > a_3 > .... > a_n) > (b_1 < b_2 < b_3 < ... < b_n) \tag{8}$$

Для кращого розуміння цього запису, скористаємося його графічним представленням у вигляді розташування (переміщення) відповідних точок на числовій вісі *l* (рис. 1)

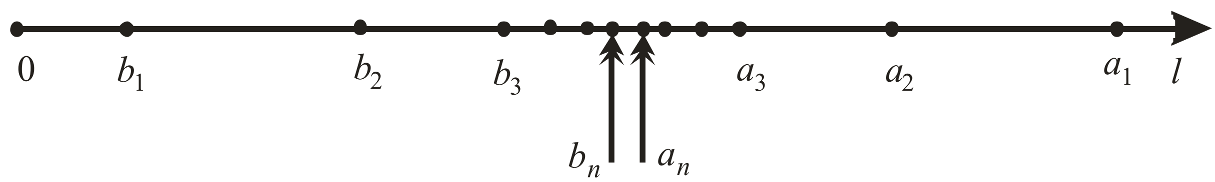

Рис. 1. Розташування точок на числовій вісі l згідно нерівностям (8) Як видно з рисунка, обидві послідовності прямують назустріч одина одний, отже при $n \to \infty$ вони приймуть значення дуже близькі за величиною, зберігаючи співвідношення $b_n < a_n$.

Визначення 2. Послідовність $\{ x_n \}$ називається обмеженою зверху (знизу), якщо існує число *M* (число *m*), таке що для всіх x_n цієї послідовності виконується умова $x_n \le M$ ($x_n \ge m$). Це визначення можна записати скорочено за допомогою кванторів: $(\exists M)(\forall x_n) : x_n \le M$, послідовність $\{x_n\}$ обмежена зверху,

$(\exists m)(\forall x_n) : x_n \ge m$, послідовність $\{x_n\}$ обмежена знизу.

Подібні записи зробимо для нашого випадку з урахуванням нерівностей (8) і рис.1.

$(\exists a_n)(\forall b_n) : b_n \le a_n$, послідовність $\{b_n\}$ обмежена зверху (9)

$(\exists b_n)(\forall a_n) : a_n \ge b_n$, послідовність $\{a_n\}$ обмежена знизу.

Визначення 3. Зростаюча (спадна) послідовність називається **монотонною.**

Визначення 4. Монотонна обмежена послідовність називається **збіжної** (часто говорять "**має границю**"). Факт існування границі послідовності $\{x_n\}$ записують наступним чином:

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$ або $x_n \to A$, якщо $n \to \infty$, де lim – читається "ліміт", є скорочення латинського слова limes – границя. А – значення границі.

Послідовності $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, що розглядаються нами монотонні ($\{a_n\}$ – спадна, $\{b_n\}$ – зростаюча) і обмежені. Значить кожна з них має границю. Таким чином ми довели, що ці послідовності збіжні. На наступному етапі досліджень характерних особливостей послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ постараємося довести правомірність наших припущень, що вони прагнуть до однієї границі.

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ (10)

Послідовність $\{a_n\}$ запишемо так: $\{a_n\}= a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, a_{n+1}, \ldots$, де a_{n+1} - член послідовности, який розташований відразу після a_n.

На границю збіжної послідовності не впливає порядковий номер, з якого розглядається її загальний член, тому

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha \tag{11}$$

З урахуванням (4) запишемо (n+1)-й член $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$

Перейдемо до границі при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2}$$

Властивість 1. Границя суми послідовностей дорівнює сумі границь цих послідовностей.

Властивість 2. Постійний множник можна виносити за знак границі.

На підставі наведених властивостей запишемо:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{2}(\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n)$$

Підставами в цей вираз значення границь з (10), тоді $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$ і, згідно (11), маємо $\alpha = \dfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$, звідки $\alpha = \beta$ або

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \tag{12}$$

Рівність границь послідовностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ доведено, тепер необхідно переконатися в існуванні співвідношень, що виходять з прикладів № 1 і № 2. Розглянемо границю добутку $a_n b_n$ при $n \to \infty$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n)$.

Властивість 3. Границя добутку послідовностей дорівнює добутку границь цих послідовностей.

Отже $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (13)

Замість границь, що стоять в правій частині цього виразу, підставимо їх значення згідно (12), тоді

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \alpha \cdot \alpha = \alpha^2 \qquad (14)$$

Далі виконаємо наступні перетворення:

$a_{n+1}b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \cdot \dfrac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = a_n b_n$, тобто $a_n b_n = a_{n+1}b_{n+1}$.

Запишемо цю рівність більш докладно:

$$a_1 b_1 = a_2 b_2 = a_3 b_3 = ... = a_n b_n = a_{n+1}b_{n+1} \qquad (15)$$

Звідси випливає, що величина $a_n b_n$ для послідовностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ є величина постійна.

Властивість 4. Границя постійної величини при будь-якому значенні n, є сама ця постійна величина.

Значить $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = a_n b_n$ (16)

Підставим значення границі з (16) в ліву частину виразу (14) $a_n b_n = \alpha^2$, звідки $\alpha = \sqrt{a_n b_n}$. Замість α робимо заміну згідно (12)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{a_n b_n}$$

Остаточно доведено, що числові послідовності, складені на основі середнього арифметичного і середнього гармонійного, прагнуть до однієї і той ж границі, яка дорівнює середньому геометричному їх відповідних членів. Дослідження цих закономірностей, сформульованих у вигляді математичного відкриття, виконані таким чином, щоб учні змогли максимально зосередити свою увагу на вивченні первинних понять числової послідовності, та її границі, що складають доказову базу. Використання отриманих результатів в подальшому дозволить підвищити ефективність пояснень інших, більш складних, визначень теорії границь.

Висновки.

1. Інформація про тетраду, як про дуже цікаве відкриття Піфагора, представлена для того, щоб привернути увагу учнів до числових послідовностей, отриманих за правилами обчислення таких же середніх, за якими визначені довжини струн однакового співзвуччя.

2. Нескладний аналіз числових послідовностей, наведених в прикладах № 1 і № 2, дозволив сформулювати передбачуване математичне відкриття, перспектива доказу якого забезпечить творчу обстановку на занятті.

3. Доказ прогнозованого відкриття, якій стимулює увагу учнів, виконано на основі найпростіших пояснень первинних понять границі числової послідовності. При цьому монотонність і обмеженість послідовностей додатково представлені графічно, що сприяє їх кращому розумінню.

4. Визначення збіжної послідовності за ознакою її монотонності і

обмеженості створює передумови до більш глибокого вивчення теорії границі послідовності, а потім і границі функції.

5. В перспективі звернемося до цікавої задачі про різницю границь послідовностей, складених на основі середнього арифметичного і середнього геометричного. Її розв'язок, який належить німецькому математику К. В. Борхарту, використаємо для підвищення активності учнів при розгляді лінійних неоднорідних диференційних рівнянь з постійними коефіцієнтами.

Використана література:

1. *Пойа Д.* Математическое открытие / Д. Пойа. – Москва : Наука, 1975. – 290 с.
2. Избранные отрывки из математических сочинений Лейбница // Успехи матем. наук 3. – № 1. – 1948. – С. 165-204.
3. *Бугрим О. В.* Применение методов активного обучения при изучении высшей математики / О. В. Бугрим, А. С. Иванов // Стратегия качества в промышленности и образовании : материалы VIII Международной конференции (8-15 июня 2012, г. Варна, Болгария) – С. 193-196.

References:

1. *Poya D.* Matematicheskoe otkrytie / D. Poya. – Moskva : Nauka, 1975. – 290 s.
2. Izbrannye otryvki iz matematicheskikh sochineniy Leybnitsa // Uspekhi matem. nauk 3. – № 1. – 1948. – S. 165-204.
3. *Bugrim O. V.* Primenenie metodov aktivnogo obucheniya pri izuchenii vysshey matematiki / O. V. Bugrim, A. S. Ivanov //Strategiya kachestva v promyshlennosti i obrazovanii : materialy VIII Mezhdunarodnoy konferentsii (8-15 iyunya 2012, g. Varna, Bolgariya) – S. 193-196.

Сдвижкова Е. А., Щербаков П. Н., Тимченко С. Е. Метод математического открытия при изучении числовых последовательностей.

Предложен метод активации внимания учащихся на занятиях по математике, в частности при изучении числовой последовательности и ее предела. Интрига состоит в том, что последовательности, принятые в качестве объектов новых определений и исследований, составлены по алгоритму пошаговой записи выражений тех средних величин, на основе которых Пифагор сделал интересное открытие, названное тетрадой. Несложный анализ приведенных примеров позволил сделать предположение о том что числовые последовательности средних арифметических и средних гармонических стремятся к одному и тому же пределу, равному среднему геометрическому их соответствующих членов. На этом предположении сформулировано математическое открытие, способное заинтересовать учащихся своим содержанием и перспективой стать его соавторами. В творческой обстановке доказательства прогнозируемого открытия изложены важнейшие понятия теории предела последовательности. С целью обеспечения более глубокого понимания темы, процесс приближения сходящейся последовательности к своему пределу, ее монотонность и ограниченность показаны на рисунке виде перемещения точек вдоль числовой оси. Сделан вывод о перспективе применения метода при объяснении дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Ключевые слова: *числовая последовательность, тетрада, среднее арифметическое, среднее гармоническое, среднее геометрическое, предел.*

Sdvizhkova E., Shcherbakov P., Tymchenko S. Method of the mathematical opening at the study of numerical sequences.

The method to activate learners' attention in maths classes is offered, in particular, while studying the numerical sequence and its limit. The plot consists in the idea that sequences accepted as *objects of new definitions and research are set up by the algorithm of step-by-step recording of half value equations, which were used by Pythagoras to discover a tetrad. A simple analysis of the given examples let assume that the numerical sequences of arithmetic average and harmonic mean tend to reach the same limit being equal to geometric mean of their corresponding members. This assumption let formulate the mathematical finding which content and the perspective to become a co-author have raised the learners' interest. The most important concepts of the theory of the sequential limit are formulated in a creative atmosphere during the process of proving predicted finding. To ensure in-depth subject understanding, the process of approaching convergent sequence to the limit, its monotony and limitation are shown in the diagram in the form of points moved along a numerical axis. The prospects of applying this method while presenting the differential equations of the second order with constant coefficients are concluded.*

Keywords: *numerical sequence, tetrad, arithmetic average, average harmonic, geometric mean, limit.*

УДК: 37.035.6-057.884

Сігова А. Г.

ФОРМУВАННЯ ГРОМАДЯНСЬКОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ ПОЧАТКОВИХ КЛАСІВ

Стаття присвячена актуальній проблемі громадянського виховання учнів початкових класів, їх інтеграція в сучасному суспільстві та формування активної громадянської позиції. У статті розглядається сукупність педагогічних умов, що впливають на ефективність формування громадянської компетентності учнів початкових класів, запропонована теоретична модель громадянської позиції особистості. Розглянуто пріоритетні форми громадянського виховання у навчально-виховній роботі, проаналізовано їх можливості в контексті досліджуваної проблеми. Стаття представляє дослідження проблеми формування громадянської самосвідомості підростаючого покоління. Актуальність її дослідження обумовлена побудовою демократичної держави і необхідністю створення нової системи громадянської освіти учнівської молоді, що базуватиметься на ідеї розвитку самосвідомості особистості в незалежній державі.

Ключові слова: *громадянське виховання, формування громадянської компетенції, громадянська позиція, громадська самосвідомість.*

У нашій державі проблема розвитку громадянськості і патріотизму сьогодні набуває досить гостру актуальність, зокрема, у справі формування громадянської компетенції школярів. Сьогодні молодому поколінню нелегко адекватно визначитися зі своїми соціально-громадянськими установками, відповідно широкого розповсюдження набуло явище соціальній пасивності, небажання приймати участь в житті школи, класу, свого міста. Відбувається помітне переважання цінностей грошей над культурними ш моральними цінностями.

Громадянське виховання школярів – це вимога часу; воно полягає у формуванні громадянськості як інтегрованого якості, яке дає можливість