

УДК 378.510

МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ЕЛЕКТИВНОГО КУРСУ "ФРАКТАЛИ"

Конопля В. О., Бурчак С. О.

У публікації висвітлено методику організації і проведення елективного курсу "Фрактали" для студентів вищих навчальних закладів. У процесі розробки методики викладання курсу "Фрактали" було підібрано такі задачі, які найбільш доречні з точки зору формування відповідних умінь студентів з урахуванням їх вікових особливостей. Доведено, що даний курс сприяє розвитку аналітичного мислення і уяви студентів, розвиває міжпредметні зв'язки між математикою та інформатикою.

Ключові слова: фрактали, елективний курс, міжпредметні зв'язки.

В публикации освещены методика организации и проведения элективного курса "Фракталы" для студентов высших учебных заведений. В процессе разработки методики преподавания курса "Фракталы" были подобраны такие задачи, которые наиболее уместны с точки зрения формирования соответствующих умений студентов с учетом их возрастных особенностей. Доказано, что данный курс способствует развитию аналитического мышления и воображения студентов, развивает межпредметные связи между математикой и информатикой.

Ключевые слова: фракталы, элективный курс, межпредметные связи.

The publication covers methods of organizing and conducting the elective course "Fractals" for students in higher education. In the process of working out the teaching methods for this course there were selected such tasks that are most appropriate for forming students' skills taking into account age-specific peculiarities. This course proved to be conducive to development of analytical thinking and imagination and to increase interdisciplinary connections between mathematics and information science.

Key words: fractals, elective course, межпредметные связи.

Постановка проблеми, її зв'язок з важливими завданнями. У сучасній літературі висвітлено багато матеріалів про нові відкриття і розробки в галузі фракталів. Вважаємо за необхідне ознайомити з ними студентів вищих навчальних закладів, оскільки, на нашу думку, студенти повинні знати про сучасні розробки в галузі науки, особливо такої важливої і перспективної галузі математики, як фрактали, яка активно розвивається в наш час. На даний момент ще немає єдиного бачення розв'язання проблеми ознайомлення студентів із фракталами. Тому в статті запропоновано методичне забезпечення елективного курсу "Фрактали".

Загальний аналіз останніх досліджень і публікацій з проблеми із зазначенням нерозв'язаних питань і аспектів. Загальні теоретичні відомості наукових досліджень стосовно застосування фракталів у дослідженні сингулярних розподілів, класифікації сингулярних розподілів залежно від властивостей спектра, вивчення аномально фрактальних і суперфрактальних об'єктів, фрактальних множин, функцій, розподілів висвітлено в роботах М. В. Працьовитого [3; 4; 5; 6] та А. Ф. Турбина [6].

У праці В. Г. Бевз [1] фракталам приділено окрему увагу, де описуються деякі основні приклади фракталів і детально наведена послідовність дослідження теорії фракталів в Україні за останні близько 20 років.

В. Ф. Челомбітько у своїй роботі [7] детально розглядає алгоритми побудови фракталів у середовищі програмування Pascal, наводить приклади програм з детальними описами алгоритмів побудови зіркоподібних і драконоподібних фракталів.

К. В. Власенко наводить приклади розв'язання завдань на застосування теорії фракталів, розглядаються способи побудови деяких із них, властивості та фрактальна розмірність, але, на наш погляд, недостатньо методичних рекомендацій [2].

Все вищевказане спонукало нас розробити методичне забезпечення елективного курсу "Фрактали" з метою полегшення роботи викладачів у процесі ознайомлення студентів з дуже важливою темою – "Теорія фракталів".

Мета публікації. Розробити методичне забезпечення та методику проведення елективного курсу "Фрактали" для студентів вищих навчальних закладів.

Виклад основного матеріалу дослідження. Елективний курс розрахований на студентів вищих навчальних закладів. Матеріал також може бути використано для позакласної роботи з математики в технікумах, училищах, коледжах та в школах для учнів 11-х класів з поглибленим вивченням математики.

Зауважимо, що у процесі розробки методики викладання елективного курсу "Фрактали" однією з основних проблем є добір задач, які найбільш доречні з точки зору формування відповідних умінь учнів з урахуванням їхніх вікових особливостей. Таким чином, постає проблема створення системи задач, відповідної сучасним вимогам навчання.

Елективний курс "Фрактали" розрахований на 28 годин, охоплює теми: 1) Введення поняття фракталів (2 год.); 2) Трикутник Серпінського. Губка Серпінського (2 год.); 3) Канторова досконала множина. Крива Пеано. Сніжинка Коха (4 год.); 4) Властивості фракталів (4 год.); 5) Фрактальна розмірність (2 год.); 6) Алгоритми побудови фракталів за допомогою програмних засобів (4 год.); 7) Алгоритми побудови зіркоподібних фракталів (4 год.); 8) Алгоритми побудови драконоподібних фракталів (2 год.); 9) Захист студентських проектних робіт (4 год.).

Коротко схарактеризуємо основний зміст занять елективного курсу.

Введення поняття фракталів. На перших заняттях проводиться вступна лекція, на якій студенти отримують початкові уявлення про фрактали, причому значна увага приділяється зацікавленню і мотивації навчальної діяльності студентів у процесі вивчення курсу "Фрактали".

Викладач розповідає, де зустрічаються фрактали, наводить приклади з природи, навколишнього світу та обґрунтовує необхідність вивчення фракталів.

На перших заняттях не рекомендується давати наукове означення фрактала. Якщо відразу запропонувати студентам означення, яке дає Мандельброт, то вони його можуть не зрозуміти. Краще розпочати з розгляду конкретних прикладів, і тільки в кінці вивчення теми, після набуття учнями певних знань, можна сформулювати означення фрактала.

На етапі первинного закріплення нового матеріалу розглядається приклад гри "Хаос", який демонструє один з методів побудови фракталів (побудову трикутника Серпінського (рис. 1)) [2, с. 1].

Трикутник Серпінського. Губка Серпінського. На заняттях доцільно дати студентам можливість самостійно здійснити побудову, проводити заняття у формі постійного спілкування та обговорення кожного кроку побудови.

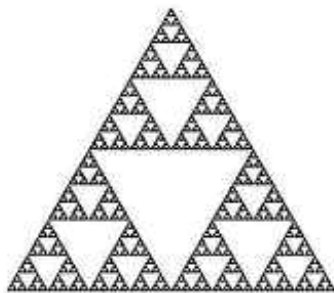


Рис. 1. Трикутник Серпінського

Починаючи з 2–3 ітерації, студенти самі зможуть описувати дії, які потрібно зробити наступними, що викличе в них задоволення, захоплення, підвищить зацікавленість.

Кожне зображення наступної ітерації доцільно демонструвати на екрані за допомогою проектора, але лише після побудови його на дошці. Це потрібно для підтвердження правильності побудови і для демонстрації студентам більш точного та якісного зображення, оскільки побудова на дошці за допомогою крейди може мати значні похибки та неточності.

Рекомендується розглянути такі завдання [2, с. 1, 4]:

1. Зобразити фрактал, що називається трикутником Серпінського (рис. 1).
2. Побудувати трикутник Серпінського на основі трикутника Паскаля.
3. Розглянути побудову губки Серпінського.

Канторова досконала множина. Крива Пеано. Сніжинка Коха. На цьому етапі студенти уже володіють певними початковими знаннями про особливості побудови фракталів, тому можна розповідати лише основні принципи при зображенні Канторової досконалої множини. Побачивши першу ітерацію, студенти в змозі аналогічно продовжувати процес побудови самостійно. Тому викладачу не варто витратити на це багато часу на занятті.

У процесі побудови кривої Пеано (рис. 2) у студентів можуть виникнути певні труднощі. Рекомендуємо викладачеві приділити більше часу і детально розбирати зі студентами кожен крок побудови.

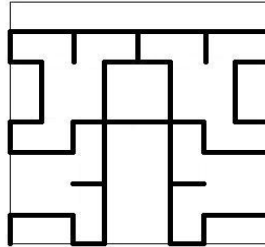


Рис. 2. Крива Пеано (4 ітерація)

З метою більш глибокого розуміння даного матеріалу студентам слід запропонувати вдома розробити інший, але аналогічний спосіб побудови замкненої кривої без самоперетинів, а потім означити утворену геометричну фігуру.

Побудова сніжинки Коха (рис. 3) не викликає в студентів складнощів, тому, пояснивши основний принцип, можна викликати до дошки студента, який зрозумів алгоритм побудови, а решті дозволити виконувати побудову цього фрактала самостійно під наглядом викладача.

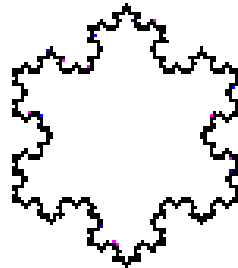


Рис. 3. Сніжинка Коха

Рекомендується розглянути такі завдання [2, с. 4–5]:

1. Зобразити фрактал, який називається Канторовою досконалою множиною.
2. Щоб переконатися, що фрактали є геометричними фігурами, накреслити криву Пеано (рис. 2).
3. Зобразити фрактал, який називається сніжинкою Коха (рис. 3). Цей об'єкт теж є результатом нескінченного "дроблення" і добудов.

Властивості фракталів. Під час пояснення властивостей фракталів доцільно роз'яснювати їх на прикладах простих, добре відомих і близьких студентам геометричних фігур: відрізка, квадрата, кола, прямокутника.

Всі розглядувані на цьому занятті задачі мають подібну ідею розв'язування. Вона спирається на використання прийомів перебору та індукції. Основний підхід пояснюється на прикладі задачі 1, тому доцільно приділити їй більше уваги, щоб студенти зрозуміли хід розв'язування. Тоді студенти не матимуть проблем при розв'язуванні і більш складних задач 2 і 3 аналогічним способом.

Задача 3 є багатогранною, вона детально досліджує сніжинку Коха (рис. 3), вивчає її властивості з різних сторін (знаходяться периметри і площі при різних кількостях ітерацій). Для кращої наочності пропонується побудувати таблицю і вносити знайдені значення до відповідних її комірок, щоб студентам було зручніше простежити процес зміни периметра і площі та їх залежність від кількості ітерацій.

Рекомендується розглянути такі задачі [2, с. 5]:

Задача 1. Чому дорівнює сума довжин відкинутих відрізків у Канторовій досконалій множині?

Задача 2. Розглянемо трикутник Серпінського (рис. 1). Яка частина трикутника залишилася незафарбованою після 1-го кроку? Яка частина трикутника не буде зафарбованою після 2-го кроку? Яка частина трикутника залишиться незафарбованою після 4-го кроку? Яка частина трикутника не буде зафарбованою після n -го кроку?

Задача 3. Нехай периметр початкового трикутника під час побудови сніжинки Коха (рис. 3) дорівнює 9. Чому дорівнюють периметри фігур після кожного кроку? У скільки разів збільшується периметр фігури порівняно з попередньою? Скільки аналогічних кроків (ітерацій) необхідно зробити, щоб отримати периметр не більший, ніж 100? Якщо вважати, що процес зображення сніжинки Коха нескінченний, то чи матиме границю значення периметра? Що станеться з площею сніжинки Коха?

Фрактальна розмірність. На етапі актуалізації опорних знань рекомендуємо велику увагу приділити запитанню про поняття розмірності, оскільки саме на його основі буде формуватися поняття фрактальної розмірності. У процесі розв'язування задачі 1 доцільно наголосити, що частини (трикутники), які утворюються після ітерацій, рівні між собою і подібні початковій фігурі (є її зменшеними в n разів копіями). Це полегшить студентам розуміння поняття фрактальної розмірності. В подальшому бажано щоразу проговорювати, що означають змінні, також демонструвати зображення досліджуваних фігур на екрані через проектор.

Рекомендується підкреслити при розв'язуванні задачі 3, що розмірність трикутника і куба виражається цілими числами, а розмірність фракталів завжди дробова.

На даному етапі студенти уже володіють достатнім запасом знань, тому при узагальненні і систематизації знань відповіді студентів повинні бути повними й ґрунтованими.

Рекомендується розглянути такі задачі [2, с. 5]:

Задача 1. Чи є самоподібним трикутник Серпінського (рис. 1)? Скільки є копій початкового трикутника, для яких відношення сторони початкового трикутника до внутрішнього дорівнює 2:1; 4:1; 8:1?

Задача 2. Чи є якась закономірність між розмірністю та кількістю копій? Знайдіть цю закономірність та обчисліть розмірність трикутника Серпінського (рис. 1).

Задача 3. За допомогою малюнків і формули знайдіть розмірність трикутника, куба, сніжинки Коха (рис. 3), Канторової досконалої множини, губки Серпінського.

Алгоритми побудови зіркоподібних фракталів. На даному етапі доцільно ознайомити студентів з більш точним і науковим означенням фрактала, оскільки початкові знання у них уже є і студенти спроможні його зрозуміти. А також це їм допоможе при вивченні зіркоподібних фракталів, для кращого розуміння їхньої структури, а отже, і логічного алгоритму утворення та побудови.

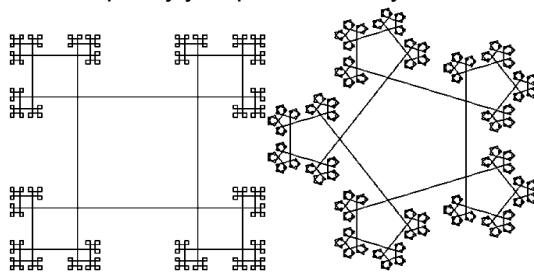


Рис. 4. Приклади зіркоподібних фракталів

Під час першого знайомства з зіркоподібними фракталами (рис. 4) зацікавленість в основному ґрунтується на їхньому простому для розуміння зовнішньому вигляді.

Логічний алгоритм утворення бажано розглянути детально, щоб у подальшому студенти могли самостійно розібратися у структурі програми для побудови зіркоподібного фрактала. Після виконання основної програми доцільно змінити параметри з метою отримання квадратного зіркоподібного фрактала та інші. Розглянута практична реалізація побудови зображень фракталів на прикладі зіркоподібних фракталів дозволяє пояснити їх графічну природу та розробити програми їх подальшої модифікації.

На даних заняттях розвиваються міжпредметні зв'язки між математикою та інформатикою. На прикладі зіркоподібних фракталів: спочатку вони розглядаються з точки зору математики як геометричні об'єкти, а потім з точки зору інформатики у вигляді завдання написати програми для побудови фракталів на комп'ютері у середовищі програмування Pascal ABC.

Рекомендується розглянути таку задачу [7].

Учні будують зіркоподібний фрактал на комп'ютері у середовищі програмування Pascal ABC.

Алгоритми побудови драконоподібних фракталів. Драконоподібний фрактал (рис. 5) дуже цікава за своїм зовнішнім виглядом геометрична фігура, тому в студентів виникає стійкий інтерес у детальному вивченні цього фрактала.

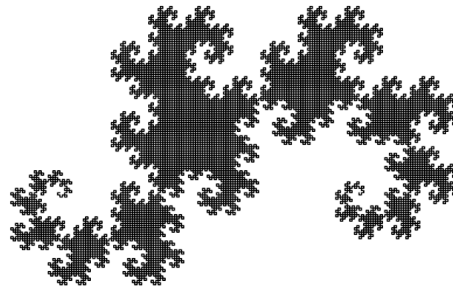


Рис. 5. Драконоподібний фрактал Хартера-Хейтуея

Смужки паперу для виготовлення драконоподібної ламаної рекомендуємо підготувати заздалегідь. Для цієї мети достатньо розрізати вздовж аркуш А4 на смужки завширшки приблизно 1,5 сантиметри.

При згинанні смужок паперу викладачу бажано проробляти всі операції паралельно зі студентами, а потім показати результат, щоб студенти наочно переконались, що вони повинні отримати, потім продемонструвати відповідну картинку на слайді.

При роботі з програмою в середовищі програмування Pascal ABC зі студентами спочатку розглядається логічний алгоритм, а потім пропонується реалізувати програму на комп'ютері.

Розглянута практична реалізація побудови зображень фракталів на прикладі драконоподібних фракталів дозволяє пояснити їх графічну природу.

На даних заняттях розвиваються міжпредметні зв'язки між математикою та інформатикою. На прикладі драконоподібних фракталів: спочатку вони розглядаються з точки зору математики як геометричні об'єкти, а потім з точки зору інформатики у вигляді завдання написання програми для побудови фракталів на комп'ютері у середовищі програмування Pascal ABC.

Рекомендується розглянути таку задачу [7]:

Написати програму побудови драконоподібної фрактальної кривої на комп'ютері у середовищі програмування Pascal ABC.

Захист студентських проектних робіт. На останніх заняттях студенти доповідають за темами своїх проектів.

Висновки. У публікації висвітлено методику організації і проведення елективного курсу "Фрактали" для студентів вищих навчальних закладів. Запропоновано добірку задач і вправ, які найдоречніше використати на заняттях. Даний курс розширює уявлення майбутніх учителів математики про фрактали, сприяє розвитку їх аналітичного мислення і уяви, допомагає під час підготовки до олімпіад з математики та інформатики, сприяє розвитку міжпредметних зв'язків між вищевказаними дисциплінами.

Література

1. Бевз В. Г. Практикум з історії математики : навч. посіб. для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів / В. Г. Бевз. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2008. – 312 с.
2. Власенко К. В. Фрактал / К. В. Власенко // Математика. – 2002. – № 14. – С. 1, 4–5.

3. Працьовитий М. В. Аномально фрактальні і суперфрактальні об'єкти / М. В. Працьовитий // Наук. зап. КДПІ імені М. П. Драгоманова. – К. : КДПІ, 1992. – С. 309–310.
4. Працевитый Н. В. Классификация сингулярных распределений в зависимости от свойства спектра / Н. В. Працевитый // Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи. – К. : Ин-т математики АН Украины, 1992. – С. 77–83.
5. Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М. В. Працьовитий. – К. : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
6. Турбин А.Ф. Фрактальные множества, функции, распределения / А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый. – К., 1992. – 208 с.
7. Челомбiтько В. Ф. Алгоритми побудови зіркоподібних і драконоподібних фракталів / В. Ф. Челомбiтько. – Х. : Харківський національний університет радіоелектроніки, Вип. 4, т. 47. – С. 148–155.