УДК 316.5

ЖОРСТКІ І М'ЯКІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

І. В. Огірко, М. Ф. Ясінський, Л. М. Ясінська-Дамрі
Українська академія друкарства,
вул. Підголоско, 19, Львів, 79020, Україна

Однією з важливих наукових проблем природознавства є вирішення задачі передбачення поведінки досліджуваного об'єкта в часі і просторі на основі певних знань про його початковий стан. Ця задача зводиться до знаходження закону, який дозволяє за наявною інформацією про об'єкт у початковий момент часу t_0 у точці простору x_0 визначити його майбутнє в будь-який момент часу $t>t_0$. Залежно від ступеня складності самого об'єкта даний закон може бути детермінованим або ймовірнісним, описувати еволюцію об'єкта тільки в часі й просторі, а може описувати просторово-часову еволюцію. Під динамічною системою розуміють будь-який об'єкт або процес, для якого однозначно визначено поняття стану як сукупності деяких величин у даний момент часу і задано закон, що описує зміну (еволюцію) початкового стану в часі. Математична модель динамічної системи вважається заданою, якщо введено параметри (координати) системи, котрі визначають однозначно її стан, і зазначено закон еволюції. Залежно від ступеня наближення одній і тій самій системі можуть бути поставлені у відповідність різні математичні моделі.

Ключові слова: *система***,** *динамічні системи, м'які системи, жорсткі системи, лінійний оператор.*

Постановка проблеми. Теорія систем затребувана широким спектром наук — фізикою, біологією, механікою і, звичайно, економікою. Вона дозволяє не тільки визначити можливий напрямок розвитку досліджуваного об'єкта, а й розробити комплекс адаптивних впливів на систему для коригування даного напрямку [4–13].

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Вивченням динамічних систем займалися такі вітчизняні та зарубіжні вчені, як Хайрер, Аніщенко, Вержбицький, Аносов. Водночас у теорії динамічних систем залишається актуальною проблема розв'язання жорстких задач, пов'язана з паралельними обчисленнями. Академік В. І. Арнольд у своїй праці «Жорсткі» і «м'які» математичні моделі» порушує питання про застосування теорії диференціальних рівнянь в таких науках, як екологія, економіка, соціологія. Прикладом жорсткої моделі є таблиця множення. Можливості корисної математичної теорії м'яких моделей відкриті відносно недавно. Ця теорія може застосовуватись в економічних, екологічних і соціологічних моделях [14–23].

Мета статті. На основі проведеного аналізу літературних джерел встановити можливість використання різних систем для дослідження технічних об'єктів.

Виклад основного матеріалу дослідження. ***Поняття динамічної системи.*** Однією з важливих наукових проблем природознавства є вирішення задачі передбачення поведінки досліджуваного об'єкта в часі і просторі на основі певних знань про його початковий стан. Задача зводиться до знаходження деякого закону, який дозволяє за наявною інформацією про об'єкт у початковий момент часу t_0 у точці простору x_0 визначити його майбутнє в будь-який момент часу $t>t_0$. Залежно від ступеня складності самого об'єкта цей закон може бути детермінованим або ймовірнісним, описувати еволюцію об'єкта тільки в часі й просторі, може окреслювати просторово-часову еволюцію. Під динамічною системою розуміють будь-який об'єкт або процес, для котрого однозначно визначено поняття стану як сукупності деяких величин у даний момент часу і задано закон, що описує зміну початкового стану в часі. Закон дозволяє за початковим станом прогнозувати майбутній стан динамічної системи, його називають законом еволюції. Динамічні системи — це механічні, фізичні, хімічні та біологічні об'єкти, обчислювальні процеси та процеси перетворення інформації, що здійснюються відповідно до конкретних алгоритмів. Описи динамічних систем також різні: за допомогою диференціальних рівнянь, дискретних відображень, теорії графів, теорії марковських ланцюгів і т. ін. Вибір одного із способів опису задає конкретний вид математичної моделі відповідної динамічної системи. Математична модель динамічної системи вважається заданою, якщо введено параметри (координати) системи, що визначають однозначно її стан, і зазначений закон еволюції. Залежно від ступеня наближення одній і тій самій системі можуть бути поставлені у відповідність різні математичні моделі. Дослідження реальних систем зводиться до вивчення математичних моделей, удосконалення і розвиток яких визначаються аналізом експериментальних і теоретичних результатів при їх зіставленні. У зв'язку з тим під динамічною системою ми розумітимемо саме її математичну модель. Досліджуючи одну й ту ж динамічну систему (наприклад, коливання цін), залежно від ступеня обліку різних чинників отримаємо різні математичні моделі [2–13].

Класифікація динамічних систем. Динамічні системи можна класифікувати залежно від виду оператора відображення та структури фазового простору. Якщо оператор передбачає виключно лінійні перетворення початкового стану, то він називається лінійним. Лінійний оператор має властивість суперпозиції: $T [x (t) + y (t)] = Tx (t) + Ty (t)$. Якщо оператор нелінійний, то й відповідна динамічна система іменується нелінійною. Розрізняють неперервні і дискретні оператори і, відповідно, системи з безперервним і дискретним часом. Системи, для яких відображення $x(t)$ за допомогою оператора T може бути визначено для будь-яких $t>t_0$, називають також потоками. Якщо оператор відображення визначений на дискретній множині значень часу, то відповідні динамічні системи мають назву каскадів або систем з дискретним часом. Динамічні системи іменуються автономними, якщо не піддаються дії зовнішніх сил, змінних у часі.

Жорсткі динамічні системи. Задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь можна умовно розділити на наступні: м'які, жорсткі, погано обумовлені і швидко осцилюючі. Для кожного типу характерні специфічні вимоги до чисельних методів.

До жорстких систем відносяться завдання хімічної кінетики, нестаціонарні процеси в складних радіоланцюгах, системи, що виникають при вирішенні рівнянь теплопровідності та дифузії методом прямих, і багато інших. Жорсткі системи досить важкі для чисельного рішення. Класичні явні методи типу Адамса і Рунге–Кутта вимагають для них неприйнятно дрібного кроку.

Класифікація систем. *Прості* системи характеризуються малим числом внутрішніх зв'язків і легкістю математичного опису. При виході з ладу елементів система або повністю втрачає свою роботоздатність або продовжує виконувати задані функції в повному обсязі. *Складні* системи мають розгалужену структуру, велику різноманітність зв'язків і безліч станів роботоздатності. Це все технічні системи. *Надскладні* системи — це людино-машинні системи. До них відносяться всі технологічні, економічні, соціальні та організаційні системи. *Детерміновані* системи функціонують за заздалегідь заданими правилами з раніше визначеним результатом. Для *стохастичних* (ймовірних) систем властиві важко передбачувані вхідні впливи і вихідні результати. На практиці елемент випадковості зазвичай вводиться в аналіз системи, коли в дослідника є велике число змінних впливу на поведінку системи або вони настільки складні для аналізу, що не залишається іншого виходу, як вивчати систему, піддану впливу випадковості. *М'які* системи характеризуються високою чутливістю до зовнішніх впливів. Унаслідок цього володіють слабкою стійкістю. Прикладами м'яких систем можуть служити курс долара, котирування цінних паперів і т. д. *Жорсткі* системи — це авторитарні, засновані на високому професіоналізмі невеликої групи керівників, організації. Мають високу стійкість до зовнішніх впливів. *Абстрактні* системи включають як елементи поняття, пов'язані між собою певними відносинами із заданими властивостями. *Матеріальні* системи як елементи включають матеріальні об'єкти.

Технічні системи вирішують завдання за програмами, складеними людиною. Однак сама людина не є результатом даної системи.

Технологічні системи являють собою набір правил і норм, що визначають послідовність операцій у процесі виробництва продукції або надання послуг. *Організаційна* система — це комплекс елементів або підсистем. Забезпечує взаємодію технічної, технологічної, економічної та соціальної підсистем. Включає також інформаційне, математичне, програмне й інше забезпечення.

В основі теорії організацій лежить теорія систем. Система — це ціле, створене з частин та елементів цілеспрямованої діяльності, що володіє новими властивостями, відсутніми в елементів і частин, які його утворюють; об'єктивна частина світобудови, що включає схожі і сумісні елементи, котрі утворюють ціле, яке взаємодіє із зовнішнім середовищем. Допустимі й багато інших визначень. Спільним у них є те, що система є деяке правильне поєднання найбільш важливих, істотних властивостей досліджуваного об'єкта. Ознаками системи є безліч складових її елементів, єдність головної мети для всіх елементів, наявність зв'язків між ними, цілісність і єдність елементів, наявність структури та ієрархічності, відносна самостійність і наявність управління цими елементами. Термін «організація» в одному зі своїх лексичних значень означає також «систему», але не будь-яку, а в певній мірі впорядковану, організовану. Система може включати великий перелік елементів, і її доцільно розділити на ряд підсистем. Підсистема — набір елементів, що являють собою автономну у середині системи область (організаційна, технічна підсистеми). Великі системи (БС) — системи, що подаються сукупністю підсистем постійно зменшуваного рівня складності аж до елементарних підсистем, які виконують у рамках даної великої системи базові елементарні функції.

Система має низку властивостей. Властивості системи — це якості елементів, що дають можливість кількісного опису системи, вираження її в певних величинах. Базові властивості систем зводяться до наступного. Система прагне зберегти свою структуру, має потребу в управлінні. У системі формується складна залежність від властивостей елементів і підсистем, що входять до неї. Крім перерахованих властивостей, великі системи мають властивості синергічності і мультиплікативності. Синергічність — одна з первинно-фундаментальних властивостей великих систем, що означає односпрямованість дій у системі, яка приводить до посилення кінцевого результату. Мультиплікативність — одна з первинно-фундаментальних властивостей великих систем, що означає як позитивні, так і негативні ефекти; у БС наявна властивість множення.

Кожна система має вхідний вплив, систему обробки, кінцеві результати і зворотний зв'язок. Класифікація систем може бути проведена за різними ознаками, проте основною є угрупування їх у трьох підсистемах: технічній, біологічній та соціальній. *Технічна* підсистема включає верстати, обладнання, комп'ютери й інші роботоздатні вироби, що мають інструкції для користувача. Набір рішень у технічній системі обмежений, і наслідки рішень зазвичай зумовлені. Серед видатних особистостей, які працювали з технічною підсистемою, гідне місце займають І. Кеплер (1571–1630) — німецький астроном; І. Ньютон (1643–1727) — англійський математик, механік, астроном і фізик; П. С. Лаплас (1749–1827) — французький математик, фізик; А. Ейнштейн (1879–1955) — фізик-теоретик, один із засновників сучасної фізики; С. П. Корольов (1906–1966) — конструктор та ін.

Штучні системи створюються за бажанням людини чи якого-небудь суспільства для реалізації намічених програм або цілей (наприклад, конструкторське бюро), а *природні* — природою або суспільством. Наприклад, система світобудови, стратегія розвитку світової економіки. Відкриті системи характеризуються широким набором зв'язків із зовнішнім середовищем, сильною залежністю від неї (приміром, комерційні фірми, засоби масової інформації, органи місцевої влади), *закриті* — головним чином внутрішніми зв'язками і створюються людьми або компаніями для задоволення потреб й інтересів переважно свого персоналу, компанії або засновників. *Детерміновані системи* функціонують за заздалегідь заданими правилами, з раніше визначеним результатом. Наприклад, навчання студентів в інституті, виробництво типової продукції. *Стохастичні системи* характеризуються важко передбачуваними вхідними впливами зовнішнього та (або) внутрішнього середовища і вихідними результатами. Наприклад, дослідницькі підрозділи, підприємницькі компанії.

М'які системи відзначаються високою чутливістю до зовнішніх впливів, а внаслідок цього — слабкою стійкістю. Наприклад, система котирувань цінних паперів, нові організації, людина при відсутності твердих життєвих цілей. Жорсткі системи — це зазвичай авторитарні, засновані на високому професіоналізмі невеликої групи керівників організації. Вони володіють великою стійкістю до зовнішніх впливів, слабо реагують на незначні впливи. Наприклад, авторитарні державні режими.

Крім того, системи можуть бути простими і складними, активними і пасивними. Кожна організація повинна володіти всіма ознаками системи. Випадання хоча б однієї з них неминуче призводить організацію до ліквідації. Таким чином, системний характер організації — це необхідна умова її діяльності.

Деякі властивості м'яких і жорстких систем. У суспільній структурі існують їх гібридні форми, тому системи в людському суспільстві володітимуть рядом особливостей. Жорсткі структури при створенні віддають енергію в зовнішнє середовище, утворюються при зменшенні внутрішньої енергії. Для їх руйнування необхідно затратити енергію. М'які структури при створенні поглинають енергію із зовнішнього середовища, «запасають» внутрішню енергію в структурі, при руйнуванні виділяють енергію. Руйнуючись, віддають цю енергію. Структура, як відомо, складається з елементів і зв'язків між ними. Якщо зв'язок між двома елементами утворюється зі зменшенням внутрішньої енергії системи, то це жорсткий зв'язок. Елементи в ньому не можуть бути замінені без залучення енергії. Якщо зв'язок між двома елементами утворюється зі збільшенням внутрішньої енергії системи, то це м'який зв'язок. Елементи в ньому можуть бути замінені іншими без використання додаткової енергії. Це пояснює, чому м'які структури краще пристосовуються до змін середовища, ніж жорсткі. Проте жорсткі системи володіють важливою перевагою — вони більш дешеві, оскільки на їх створення потрібно менше ресурсів. Існують і гібридні структури. Випадок, коли жорсткі структури об'єднані в м'яку, подібний до моменту чистої м'якої структури. Так, у прикладі з виром ця м'яка система складається з жорстких систем — молекул води. Випадок же, коли м'які структури об'єднані в жорстку структуру, має ряд особливостей. Така жорстка система утворюється з виділенням енергії і зменшенням внутрішньої енергії. Однак, оскільки в її складі є м'які структури, вона володітиме низкою їх властивостей. М'які структури залежать від припливу енергії ззовні, жорсткі, навпаки не залежать. М'які структури в системі типу «жорстка м'яка» також мають властивість дисипації. Тому і вся система потребуватиме постійного притоку енергії.

За своєю сутністю словосполучення «м'яке моделювання» відповідає якісному аналізу поведінки розв'язку системи диференціальних рівнянь, не інтегруючи її. Залежно від типу особливої точки в її околі можуть відбуватися наступні рухи — поведінки інтегральної кривої: а) для стійкого вузла властиві аперіодичні рухи, коли процес моделювання прагне вернутися до початкового стану рівноваги; б) у випадку нестійкого вузла після збурення процес моделювання віддаляється від рівноважного стану; в) стійкому фокусу відповідають стійкі періодичні затухаючі коливання, і навпаки — у випадку нестійкого фокуса; г) нестійкому режиму сідлового типу з-за певних умов можуть відповідати два нових положення рівноваги: як тільки система вибирає одне з них, що визначається початковими умовами, то перебуває в ньому досить довго (це так звана тригерна система); д) випадку центр відповідають стійкі періодичні незатухаючі коливання. Нестійкості викликають особливий інтерес, оскільки з точки зору синергетики вони сприяють переходу від старого до нового способу співіснування. «М'яке» моделювання» передує кількісному аналізу дослідження економічного явища, процесу, об'єкта.

Важливо, щоб найпростіша модель була структурно стійкою, тобто, щоб висновки витримувала мала зміна параметрів і функцій, що описують модель. Вищеописана модель володіє цією властивістю структурної стійкості. Висновок: *жорстку модель завжди належить дослідити на структурну стійкість отриманих при її вивченні результатів по відношенню до малих змін моделі.*

Математична теорія м'яких моделей вказує, яку саме інформацію для цього потрібно мати. Без цієї інформації жорстка модель може призвести до якісно помилкових прогнозів. Довіряти висновкам, зробленим на підставі жорсткої моделі, можна лише тоді, коли вони підтверджуються дослідженням їх структурної стійкості.

Системне моделювання. Системний аналіз з використанням математичних моделей є однією з найбільш широко розвинутих концепцій у науково-технічних дослідженнях. Нині в моделюванні існують три незалежні його види: стохастичне, аналітичне, адаптивне моделювання.

Стохастичне моделювання. Регресійний аналіз необхідний для розв'язання задач, в яких стохастичні залежності задаються функціями з однією або декількома змінними, що визначаються як незалежні. *Проста регресія* з однією незалежною змінною x і однією залежною змінною y може бути лінійною або нелінійною. За допомогою відповідних перетворень або ліниаризації та спрощення обчислювальних методів нелінійну регресію можна звести до лінійної. *Множинна регресія* має одну залежну і декілька незалежних змінних. Найчастіше використовуються лінійні рівняння

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n.$$

У багатьох ситуаціях використовуються поліноми n–го порядку

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2_2 + ... + a_nx^n_n.$$

Найвищий степінь n показує порядок полінома. В результаті заміни змінних x функціями синуса і косинуса отримуємо рівняння

$$y = a_0 + b_1\sin x + b_2\cos x.$$

Це найпростіший вигляд періодичної регресії або так званого полінома Фур'є. Цей вид регресії часто використовується для визначення періодичної спрямованості змін у системі. *Кореляційний аналіз* застосовується для встановлення міри залежності між двома або більшим числом стохастичних змінних, а також для визначення ступеня стохастичної залежності, що існує між ними. Остання може бути описана з використанням *коефіцієнтів кореляції.* Квадрат коефіцієнта кореляції називається показником ефективності або *коефіцієнтом детермінації.* Якщо його значення помножити на 100, то отримаємо міру дисперсії, що описується за допомогою регресії, вираженної у відсотках.

Дисперсійний і коваріаційний аналізи. Дисперсійний аналіз є методом якісного і кількісного вивчення впливу однієї або декількох змінних на результати експерименту. В тих моделях, де цей вплив має фіксований характер, порівнюються лише середні значення декількох випадкових вибірок. Однак у моделях, що враховують випадкові ефекти, самі фактори впливу розглядаються як випадкові вибірки з множини появи цих факторів. Коваріаційний аналіз можна використовувати при кількісному вивченні різного ступеня впливу однієї або декількох змінних на експериментальні дані. При цьому обов’язково враховується вплив додаткових випадкових змінних. По суті, цей метод дає змогу об’єднати дисперсійний і регресійний аналізи, кожний з яких належить до моделей з фіксованими впливами.

Дискримінантний і факторний аналізи. Дискримінантний застосовується для розділення або класифікації об’єктів. Це виконується за допомогою аналізу кількісних характеристик і врахування дискримінантної функції, з якою пов’язано прийняття рішення щодо проведення класифікації. *Факторний* аналіз концептуально тісно пов’язаний з *методом головних компонент* і використовується для вивчення співвідношення між випадковими змінними, зумовленими загальними причинами або факторами, а також для кількісного виразу цих співвідношень.

Аналіз динамічних рядів — це сукупність методів аналізу послідовностей рядів залежних спостережень. Методи динамічних рядів базуються на математичній статистиці й теорії випадкових процесів. Цей аналіз використовується для виявлення закономірностей утворення залежних спостережень, для прогнозу поведінки динамічного ряду й оптимізації управління даною поведінкою. У ньому використовуються моделі стаціонарних випадкових процесів з неперервним або дискретним часом. Важливе прикладне значення має задача виявлення прихованих періодичностей процесу на фоні випадкових коливань.

Аналітичне моделювання. Основа аналітичного моделювання — диференціальні рівняння й системи рівнянь, які описують причинно-наслідкові зв’язки в системах. Побудова таких рівнянь є першим етапом аналітичного моделювання, за яким йдуть оцінка параметрів, імітація й випробовування моделі.

Різницеві диференціальні рівняння. Диференціальні рівняння містять похідні по незалежних змінних, різницеві описують приріст змінних стану, що зумовлюється незначними різницями незалежних змінних. Різницеві рівняння використовуються для моделювання дискретних процесів [2–7]. У теорії різницевих рівнянь робиться припущення, що змінні процесу визначені в дискретні моменти часу t_1, t_2, ..., t_n. Інтервал часу $t_{(i+1)}$— t_i, як правило, вважається постійним для будь–якого i ($i = 1, ..., n$). Доцільність такого розгляду визначається початковими даними про соціальний процес, які часто вимірюються в дискретні моменти часу. Інтервал часу може дорівнювати рокові, місяцеві, тижню. Різницеві рівняння перетворюються в диференціальні, якщо швидкість росту вимірюється як миттєва швидкість. Рівняння вважаються *параметризованими,* коли коефіцієнтам, раніше поданим у рівняннях у вигляді символів, надаються дійсні числові значення. Розв'язки таких рівнянь визначаються як *аналітичні.* Розв'язок є алгебраїчним рівнянням, яке дає можливість отримати значення залежних змінних у момент часу t. Зауважимо, що диференціальні рівняння, на відміну від різницевих, описують динаміку поведінки системи в одній точці t. Значно більш реалістичні моделі соціальних і гуманітарних явищ можна отримати, якщо розглядати системи рівнянь. Системою диференціальних рівнянь називається сукупність рівнянь, які містять декілька невідомих функцій та їх похідних. Розв'язком системи диференціальних рівнянь називається сукупність функцій $y_i(t)$ ($i = 1, ..., n$), які при підстановці в рівняння перетворюють їх у тотожність. Системи диференціальних рівнянь використовуються для опису еволюційних процесів. Точка фазового простору визначає стан системи. Прикладений до цієї точки вектор з координатами dx/dt, dy/dt задає швидкість зміни стану. Точка, де цей вектор перетворюється в нуль ($dx/dt = dy/dt = 0$), називається положенням рівноваги або особливою точкою системи. Для якісного вивчення поведінки динамічної системи досить визначити стан рівноваги, присутність граничних циклів, хід сепаратрис.

Параметризація моделей. Термін «параметризація» означає визначення числових значень параметрів. Для цього існують три способи. 1) Попередня оцінка отримується на основі експериментальних і безпосередніх спостережень за перебігом процесів і впливом на них різних факторів за допомогою кореляційного аналізу або різних методів оцінки параметрів. 2) Комбінації параметрів, що моделюють ситуацію, можна отримати, виходячи з оцінки, що базується на методах оптимізації параметрів. Перша задача параметричної оптимізації полягає в правильному визначенні цільової функції, відповідно до якої мінімізується різниця між даними, що спостерігалися в експерименті, і спрогнозованими значеннями. Друга пов'язана з визначенням глобального мінімуму. Розроблено також методи систематичної оцінки поля параметрів, однак вони досить трудомісткі й вимагають багато машинного часу на ЕОМ. Наступна проблема полягає в тому, що для моделей соціальних систем часто виявляються однаково оптимальними декілька сполук параметрів, проте досі не знайдено об'єктивного способу визначення найоптимальнішої з них. У деяких випадках можна накласти обмеження на значення параметра, а також на складові балансу. Вихід за межі очікуваних або фізично можливих діапазонів параметрів і отримання від'ємних значень змінних можна розглядати як явну прикмету невдалої сполуки параметрів. У цьому разі можна застосовувати методи оптимізації з обмеженнями, але вони складніші. Оптимізація параметрів складної системи — це задача, яка не має розв'язку, зокрема внаслідок відсутності необхідних обсягу та якості реальних даних. Практична оптимізація параметрів імітаційних моделей реальна лише для обмеженого числа параметрів (<10), однак для цього потрібно мати якісні початкові оцінки. Тому така операція може бути цінною лише при остаточному доведенні моделі [3–8]. 3) Оцінити роль того чи іншого параметра імітаційної моделі можна за допомогою *аналізу чутливості.* Ціль його — визначити, як модель реагує на зміну значень параметра, що в свою чергу дає можливість зробити висновок про адекватність моделі реальному процесу й достовірність оцінки параметрів. Таку процедуру можна успішно провести за допомогою аналітичного аналізу чутливості. Для цього розраховують функції чутливості, які є частинними похідними:

$$S(p_i)= du_j/dp_i.$$

В основу вказаного методу покладено лінеаризацію відносно номінального розв'язку за допомогою числових або графічних операцій.

Випробовування моделі. Під цією процедурою розуміють порівняння вихідних і вхідних даних системи. Можна виконати якісне або кількісне порівняння графіків залежності, побудованих на основі вихідних даних моделі й системи. При порівнянні теоретичних і фактичних кривих їхня якісна оцінка часто збігається. Однак їй притаманний суто суб'єктивний характер. У науковій літературі описано велику кількість моделей, де наведено результати таких порівнянь. Однак у питанні адекватності моделей реаліям важко розділити оптимізм їхніх творців. Кількісним порівнянням притаманний більш об'єктивний характер, проте певна частка суб'єктивності присутня при виборі критерію для порівняння. На практиці рекомендується користуватися найпростішими критеріями апроксимації. Так, у роботах [3–11] запропоновано використовувати такі об'єктивні функції: а) відносна похибка середніх значень змінних стану; б) відносна похибка максимальних значень змінних стану; в) часова помилка.

Адаптивне моделювання. Адаптивне моделювання є підрозділом стохастичного моделювання і заслуговує на увагу завдяки використанню алгоритмів, що самоадаптуються. Адаптація моделі до системи відбувається автоматично за допомогою пошуку на ЕОМ. Завдання адаптації — добитися оптимальної поведінки моделі, як зазначено цільовою функцією. Ці властивості системи, які до початку адаптації були невідомими, у процесі її повинні бути знайдені [4–16]. Велика кількість екологічних математичних моделей, розроблених за допомогою вказаного методу, наведено в працях [7–11]. Тут подано велику кількість літературних джерел, що стосуються даної тематики. При аналітичному моделюванні суспільних систем, як правило, застосовується редукціоністська стратегія, де головна увага приділяється поясненню і розумінню окремих процесів або підсистем. Загальна картина системи складається з окремих даних, що відносяться до окремих процесів. Оскільки охопити всю проблему зазвичай важко, то систему поділяють на декілька камер і процесів, які простіше вивчити. При цьому необхідно врахувати структурні і функціональні зміни й зв'язки в середині самої системи. З іншого боку, у тих випадках, коли проводиться стохастичне моделювання, використовується *холістична стратегія.*

Теорія м'яких і жорстких систем. У теорії м'яких систем розглядаються системи, які можуть адаптуватися до умов зовнішнього середовища, зберігаючи при цьому свої характерні особливості. М'які системи, що піддаються довготривалим змінам, зберігають свою внутрішню сутність і здатність до розвитку. Згідно з класифікацією наук, наведеною у роботі [19], м'які системи відносяться до біологічних, екологічних, суспільних наук. Наукові методи, успішно використовувані для дослідження жорстких систем, можуть бути неприйнятними для вивчення м'яких систем. Як правило, для «жорстких» систем застосовуються формалізовані описи, де переважають категорії математичної логіки. Одержані при цьому результати, як правило, відтворювані, а пояснення ґрунтуються на строгих доведених причинних взаємозв'язках. У дослідженні «м'яких» систем неможливо повністю покладатися на формалізовані методи. Значну роль відіграють евристичні міркування, інтуїція. Висновки базуються на невеликій кількості спостережень, які практично невідновлювані. На етапі 4 будуються концептуальні моделі, що відображають можливу цілеспрямовану активність елементів системи з урахуванням конкретних ідеологій або картин світу (human activity system). Розроблені на цьому етапі абстрактні уявлення порівнюються з реальною дійсністю й обговорюються учасниками даної проблемної ситуації (етап 5). Цей етап — головний у даній методології, його основне завдання полягає в організації та структуруванні діалогу, коли обговорюються різні погляди, ідеології, що приводять до різних множин можливих дій. На етапі 6 вивчаються наслідки, до яких може привести реалізація того чи іншого погляду, оцінюється припустимість таких наслідків. При цьому беруться до уваги етичні, політичні, екологічні та інші аспекти проблеми. Розглянутий цикл може повторюватися декілька разів до отримання задовільного результату. Застосовуючи методологію м'яких систем, дослідник повинен не тільки правильно описувати поведінку системи, а й прогнозувати позицію включеного в систему людського фактора.

Моделі соціальних систем, які базуються на стохастичних диференціальних рівняннях. Час і випадок — дві основні риси соціальних явищ, що вказують на теорію стохастичних процесів як на придатний апарат для їх вивчення. Соціальні системи розвиваються в часі при непрогнозованій поведінці їх елементів. У теорії це формалізується визначенням деякої множини станів, в яких система може перебувати, і ймовірнісними законами, що керують переміщенням між цими станами. Аналіз формального процесу в даному випадку дає можливість застосувати поняття ймовірності до можливих майбутніх станів і вивчити можливу поведінку соціальної системи. Подібні процеси широко розповсюджені в природі й стимулюють розвиток цієї теорії. Проте тільки недавно вивчення соціальних процесів стало головною сферою їх застосування [7–13]. *Марковські моделі,* використовувані в минулому для моделювання динаміки популяцій, є кроком вперед на шляху стохастичного моделювання соціальних систем. Головним математичним апаратом марковських процесів є диференціальні або різницеві рівняння. Такі рівняння застосовуються для опису динаміки багатьох явищ природи і суспільства. Для усвідомлення потенційних можливостей марковських моделей необхідно було дочекатися розробки сучасної теорії стохастичних процесів [8–18] і великої кількості математичних моделей, побудованих за допомогою даного класу моделей, які можна знайти в роботах [7–9] і [10–18]. Фундаментальні праці щодо застосування марковських моделей у соціології та економіці, а також [10–21] показали, як відносно прості стохастичні моделі можуть ефективно використовуватися для пояснення і прогнозування специфічних проблем гуманітарної сфери життя. Перевага моделювання соціологічних систем за допомогою стохастичних диференціальних рівнянь пов'язана з тим, що при цьому в моделі враховуються як внутрішня динаміка процесу, так і зовнішні збурення. Однак для побудови таких моделей потрібен великий обсяг апріорної інформації.

Моделі, що самоорганізуються, та алгоритмічне визначення їх структури в соціальних і екологічних системах. Основою моделювання за допомогою цієї методики є серії спостережень змінних стану у вигляді динамічних рядів. Взаємозв'язки між змінними стану описуються за допомогою полінома будь-якого порядку. Алгоритм самоорганізації визначає коефіцієнти полінома й автоматично вибирає, використовуючи статистичні критерії, найбільш значимі коефіцієнти [4–9]. Водночас частина початкових даних залишається в запасі з тим, щоб їх можна було використати при наступній перевірці прогнозу.

Нечіткі системи. Тільки найбільш важливі змінні враховуються при аналітичному описі систем, і лише вибране число можливих комбінацій змінних використовується у співвідношеннях, що описують поведінку соціальних систем. Окремим випадком такого нечіткого зважування є введення щільності ймовірності $f(x)$ стану стохастичної системи [12–17]. Як альтернатива класичним методам моделювання соціальних систем у даний момент існують три методи нечіткого моделювання [13–19].

1) *Опис системи за допомогою багатозначного нечіткого співвідношення.* Цей спосіб можна порівняти з класичним описом системи за допомогою фіксованих параметрів. Нечіткий розподіл $f(x)$ оцінюється параметричним або непараметричним способом за аналогією зі статистичним підходом. При цьому використовуються дані вимірів нечітких змінних.

2) *Пошук параметрів шляхом поєднання нечітких методів з поліоптимізацією.* При цьому способі оцінки параметрів моделі можна отримати експериментальним шляхом, застосовуючи метод пошуку. У випадку, коли виходять з поняття нечіткості, система може бути описана параметричним нечітким виразом $f(x, y, P)$, однак набір вільних параметрів P не може бути визначеним доти, поки не буде досягнуто рівня однозначного розв'язку. Звідси випливає, що розв'язок задачі визначається шляхом встановлення відповідних ваг для ймовірнісного розв'язку, припустимого в процесі ідентифікації. Ці ваги призводять до нечіткого розподілу $f(P)$ у просторі параметрів. Для оптимальної підгонки параметрів критерій якості $Q(x, P)$ розраховується з критеріїв якості

$Q_i = S\,Q(x_i,P)$. У результаті мінімізації цих критеріїв отримуємо розв'язок поліоптимізаційної задачі у вигляді параметрів моделі.

3) *Моделювання еволюційних процесів за допомогою мотиваційно-примушувальних функцій*. Цей спосіб моделювання можна порівняти з класичною процедурою аналізу динамічних рядів. У ньому запропоновано розділити даний динамічний ряд на модель тренду і випадковий ефект, що не піддається поясненню. При розгляді проблеми під таким кутом зору спосіб трендової адаптації та екстраполяції обмежується фазами росту між двома стаціонарними станами. Поблизу нового стаціонарного стану може виникнути біфуркація росту, у результаті чого екстраполяція тренду виявиться нереалістичною.

Теорія катастроф. На початку 70-х років став популярним термін «катастрофа», який означає стрибкоподібні зміни, що виникають при незначних змінах значень параметрів моделі. У популярних виданнях теорія катастроф рекламувалась як переворот у математиці, що прирівнювався до винаходу диференційного й інтегрального числень. Математичне прогнозування й дослідження різких змін такого роду становить значний інтерес для наук гуманітарного і економічного профілю [14–16]. Загальна природа таких стрибкоподібних змін стану системи залишалася далеко не зрозумілою, доки французький математик Р. Том не показав, що для деяких динамічних систем, в яких на практиці спостерігаються стрибкоподібні зміни, можна застосувати геометричний опис шляхів, котрими відбуваються такі зміни. Так, В. І. Арнольд вважає, що застосування теорії катастроф, коли не тільки невідомі функції, що вивчаються, а й проблематичне саме їхнє існування, носить спекулятивний характер [14–23].

Теорія груп та інваріантів. Перспективним підходом до розробки теоретичних основ систем, що розвиваються, є теоретико-груповий підхід [17–20]. Таке застосування теорії груп обумовлено тим, що при дослідженні багатьох об'єктів необхідно враховувати інформацію про властивість симетрії цих об'єктів. Особливу зацікавленість у дослідників викликає вивчення нерівномірних (алометричних) змін окремих частин систем, які розвиваються. Експериментальні дані щодо відносної зміни цих частин добре апроксимуються степеневою функцією

$$y = bx^a,$$

де x, y — значення досліджуваних величин; a, b — параметри. Універсальне використання залежності (5) породило так званий парадокс Холдейна, який полягає в тому, що коли ріст окремих частин описується за допомогою даної функції з різними показниками степеня a, то їх сума для різних a не описується функцією того ж вигляду для цілої системи.

Синергетика. У 80-і роки все більшу увагу вчені приділяють проблемі самоорганізації, переходу від Хаосу до Порядку. Німецький вчений Г. Хакен [24] назвав теорію самоорганізації синергетикою. Синергетика вивчає такі взаємодії елементів системи, які спричиняють до виникнення просторових, часових або просторово-часових структур у макроскопічних масштабах. Особливу увагу звертають на структури, що виникають у процесі самоорганізації. Ідея створення єдиної теорії самоорганізації матерії виникла з бажання переглянути й дати відповідно до сучасного рівня розвитку науки задовільну інтерпретацію великої кількості спостережень над живою природою, а також накопиченого значного багажу експериментальних фактів як у природничих науках, так і в соціології. Г. Хакен підкреслює, що синергетика як міждисциплінарна наука пов'язана з різними галузями фізики, хімії, біології, кібернетики. Її головним завданням є виявлення загальних закономірностей і спільності методів описання й моделювання процесів еволюції та самоорганізації у фізичних, хімічних, біологічних, екологічних і соціологічних системах.

Системна динаміка Форрестера. Методологія системної динаміки, розроблена школою Форрестера й орієнтована на комп'ютерне моделювання, є досить потужним інструментом для моделювання й вивчення соціальних систем. Базовим елементом системної динаміки є подача досліджуваного процесу у вигляді діаграми, що складається з петель позитивних і негативних зворотних зв'язків, які практично збігаються з *когнітивними картами* [19–22]. У системній динаміці робиться акцент на вивченні взаємодії ендогенних факторів. Головні положення цієї методології викладені в трьох монографіях Форрестера [20–23]. У рамках даного наукового напрямку виконано велику кількість прикладних досліджень [21–23]. Особливу цікавість мають висновки, зроблені Форрестером про роль нелінійності у моделюванні соціальних систем. 1) Вивчення лінійних систем нерідко дає можливість отримати елегантний математичний розв'язок у стислій формі. Поведінка розв'язків нелінійних систем є більш складною, заплутаною. Як правило, вивчення таких систем вимагає використання ЕОМ і відповідного програмного забезпечення. 2) Статистичні методи аналізу реальних даних в основному орієнтовані на лінійний випадок. 3) Нелінійність негативно проявляється на універсальності моделей і не відповідає стандартам академічної науки. Поведінка нелінійних систем часто різко змінюється при зміні параметрів системи та її частин. Математичною основою методів системної динаміки є диференційні моделі, в яких використовується подання динамічних процесів у просторах станів. Моделі такого вигляду — це системи диференціальних рівнянь:

$$dx/dt = f(x, u, t),$$

де $x = (x_1, \ldots, x_m)^T$ — вектор станів; $u = (u_1, \ldots, u_p)^T$ — вектор виходів; t — символ часу.

Диференційні моделі, які застосовуються в математичній теорії систем, крім рівнянь стану, містять ще й рівняння

$$y = H\,(x, u),$$

де змінна $y = (y_1, \ldots, y_q)^T$ — вектор виходів системи. При складанні диференційних моделей проводиться вибір змінних стану і встановлюються зв'язки між цими змінними у вигляді функцій правих частин рівнянь станів. Зазвичай, сформулювати такі залежності тільки з використанням змінних стану часто буває важко. Більш продуктивним виявився підхід, який базується на детальному описі ланцюгів причинно-наслідкових зв'язків між факторами, що відображаються в моделі за допомогою змінних стану. Розробка і формальний запис таких ланцюгів неможливі без включення в модель деяких змінних, спеціально призначених для явного визначення в моделі структури причинно-наслідкових взаємозв'язків між змінними стану. Бажано, щоб необхідне розширення набору змінних стану диференційних моделей множиною додаткових змінних гарантувало ефективне виконання процесів структуризації проблеми.

Висновки. Однією з важливих наукових проблем природознавства є вирішення задачі передбачення поведінки досліджуваного об'єкта в часі і просторі на основі певних знань про його початковий стан. Цим і займається теорія динамічних систем, яка застосовується у фізиці, механіці, біології, економіці й інших науках. Однак при використанні динамічних систем слід враховувати і їхню специфіку й виважено обирати потрібний клас даних систем. Особливим класом динамічних систем є жорсткі системи. Їх використання на практиці має ряд труднощів. З ними пов'язане поняття стійкості динамічних систем.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Берталанфи Л. Общая теория систем — обзор проблем и результатов / Л. Берталанфи // Систем. исслед.: ежегодник. — М. : Наука, 1969. — С. 30–54.
2. Уемов А. И. Системный подход и общая теория систем / А. И. Уемов. — М. : Мир, 1978. — 272 с.
3. Згуровский М. З. Исследование социальных процессов на основе методологии системного анализа / М. З. Згуровский, А. В. Доброногов, Т. Померанцева. — К. : Наук. думка, 1997. — 221 с.
4. Клир Дж. Системология. Автоматизация решения системных задач / Дж. Клир. — М. : Радио и связь, 1990. — 544 с.
5. Laszlo E. Introduction to systems philosphy: Toward a new paradigm of comtemporary thought / E. Laszlo. — New York : Harper and Row, 1972. — 148 p.
6. Плотинский М. Ю. Математическое моделирование в динамике социальных процессов / М. Ю. Плотинский. — М. : Изд-во МГУ, 1992. — 133 с.
7. Страшкраба М. Пресноводные экосистемы. Математическое моделирование / М. Страшкраба, А. Гнаук. — М. : Мир, 1989. — 376 с.
8. Вартовский М. Модели. Репрезентация и научное понимание / М. Вартовский. — М. : Прогресс, 1988. — 507 с.
9. Вунш Г. Теория систем / Г. Вунш. — М. : Сов. радио, 1878. — 288 с.
10. Джефферс Дж. Введение в системный анализ: применение в экологии / Дж. Джефферс. — М. : Мир, 1981. — 253 с.
11. Нейман Дж. Теория игр и экономическое поведение / Дж. Нейман, О. Моргерштерн. — М. : Наука, 1970. — 707 с.
12. Вильямс Дж. Совершенный стратег, или Букварь по теории стратегических игр / Дж. Вильямс. — М. : Сов. радио, 1960. — 269 с.
13. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике / С. Карлин. — М. : Мир, 1964. — 838 с.
14. Эйрес Р. Научно-техническое прогнозирование и долгосрочное планирование / Р. Эйрес. — М. : Мир, 1971. — 295 с.
15. Саати Т. Математические модели конфликтных ситуаций / Т. Саати. — М. : Сов. радио, 1989. — 304 с.

16. Коляда Ю. В. «М'яке» моделювання співіснування легальної і тіньової економік суспільства : зб. наук. тез IV Всеукр. наук.-практ. конф. [«Проблеми трансформаційної економіки»] КФ ЗНУ / Ю. В. Коляда, К. А. Семашко. — Кривий Ріг, 2012. — 23 березня. — С. 36–38.
17. Опыт моделирования социальных процессов / Под ред. В. И. Паниотто. — К. : Наук. думка, 1989. — 324 с.
18. Ивахненко А. Г. Непрерывность и дискретность / А. Г. Ивахненко. — К. : Наук. думка, 1990. — 224 с.
19. Ван Гиг Дж. Общая прикладная теория систем / Дж. Ван Гиг. — М. : Мир, 1981. — Т. 1. — 336 с.; Т. 2. — 736 с.
20. Checland P. B. Soft systems methodology: an overview / P. B. Checland // J. of Applied System Analyzis. — 1988. — V. 15, № 1. — P. 27–36.
21. Бартоломью Д. Стохастические модели социальных процессов / Д. Бартоломью. — М. : Финансы и статистика, 1985. — 294 с.
22. Баруча-Рид А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложение / А. Т. Баруча-Рид. — М. : Наука, 1969. — 512 с.
23. Робертс Ф. С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экономическим задачам / Ф. С. Робертс. — М. : Наука, 1986. — 496 с.
24. Хакен Г. Синергетика / Г. Хакен. — М. : Мир, 1980. — 404 с.

REFERENCES

1. Bertalanfi L. (1969), General theory of systems: a review of problems and results, Systematic researches: Annual, Science, pp. 30–54.
2. Uyemov A. I. (1978), Systematic approach and general theory of systems, World, Moscow.
3. Zgurovskyi M., Dobronogov A.V. and Pomerantseva T. (1977), Research of social processes on the basis of the system analysis methodology, Scientific idea, Moscow.
4. Klir J. (1990), Systemology, Automation of the system problems solution, Radio and connection, Moscow.
5. Laszlo E. (1972), Introduction to systems philosophy: Toward a new paradigm of the contemporary thought, Harper and Row, New York.
6. Plotynskyi M. Yu. (1992), Mathematical design in the social processes dynamics, MSU Press, Moscow.
7. Strashkraba M. and Gnauk A. (1989), Fresh water ecosystems. Mathematical design, World, Moscow.
8. Vartovskyi M. (1988), Models. Representation and scientific understanding, Progress, Moscow.
9. Vunsh G. (1978), Theory of systems, Soviet radio, Moscow.
10. Jeffers J. (1981), Introduction to the system analysis: application in ecology, World, Moscow.
11. Neyman J. and Morgershtern O. (1970), Theory of games and economic conduct, Science, Moscow.
12. Williams J. (1960), Perfect strategist or the ABC on the strategic game theory, Soviet radio, Moscow.
13. Karlin S. (1964), Mathematical methods in the theory of games, programming and economy, World, Moscow.
14. Eyres P. (1971), Scientific and technical prognosis and long-term planning, World, Moscow.

15. Saati T. (1989), Mathematical models of conflict situations, Soviet radio, Moscow.
16. Kolyada Yu.V. and Semashko K.A. (2012), The «Soft» design of coexistence of legal and shadow economies of society, Problems of the transformational economics, Proceedings of the 4th All-Ukrainian scientific practical conference, ZNU Press, March 23d , Kryvyi Rih, pp. 36–38.
17. Experience of social processes design modelling (1989), in Paniotto V I. (Ed.), Scientific idea, Kyiv.
18. Ivakhnenko A. G. (1990), Continuity and discreteness, Scientific idea, Kyiv.
19. Van Gyg J. (1981), General applied theory of systems, Vol.1,2, World, Moscow.
20. Checland R.V. (1988), Soft systems methodology: a review, Applied System Analysis Journal, Vol.15, No. 1, pp. 27–36.
21. Bartolomju D. (1985), Stochastic models of social processes, Finances and statistics, Moscow.
22. Barucha-Ryd A. T. (1969), Elements of the Markov processes theory and their application, Science, Moscow.
23. Roberts F. S. (1986), Discrete mathematical models concerning social, biological and economic tasks, Science, Moscow.
24. Khaken G. (1980), Synergetics, World, Moscow.

HARD AND SOFT MATHEMATICAL MODELS AND THEIR APPLICATIONS

I. V. Ohirko, M. F. Yasinskyi, L. M. Yasinska-Damri
Ukrainian Academy of Printing,
19, Pidholosko St., Lviv, 79020, Ukraine
ogirko@ukr.net

One of important scientific problems of natural history is to solve a task of foresight of the probed object conduct in time and space on the basis of certain knowledge about its initial state. This task has been taken to find some law which allows to define the object future in any moment of time of $t>t_0$ with the initial moment of time of t_0 in the point of space of x_0. Depending on the degree of the object complication the law can be determined or probable, it can describe the evolution of object only in time, only in space, and can describe a spatial-temporal evolution. Under the dynamic system they understand any object or process, for which a simple certain concept of state as some totality of values has been determined in this moment of time, and the law which describes time history (evolution) of the initial state has been set. The mathematical model of the dynamic system is considered to be set if the system parameters (coordinates) have been introduced to determine its state simply, and the law of evolution has been detected. Depending on the degree of approaching, different mathematical models can be put in accordance with the same system.

Keywords: *system, dynamic systems, soft systems, hard systems, linear operator.*

Стаття надійшла до редакції 06.11.2014.
Received 06.11.2014.