

УДК 396.391.

**Урывский Л.А.**, докт. техн. наук, проф.(ORCID0000-0002-4073-9681. E-mail :leonid\_uic@ukr.net)

**Прокопенко Е.А.**, канд .техн. наук (ORCID0000-0001-9789-0289. E-mail :k.prokopenko@ukr.net)

**Вергун С. Н.**,магістрант (Тел.: +380936798477 ; E-mail : svetlana\_vergun@rambler.ru )

(Национальный технический университет Украины «КПИ», Институт телекоммуникационных систем, Киев)

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКСТРЕМУМОВ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ В ДИСКРЕТНЫХ КАНАЛАХ СВЯЗИ С КОДИРОВАНИЕМ

**Уривський Л. О., Прокопенко К. А., Вергун С. М.** Дослідження екстремумів продуктивності в дискретних каналах зв'язку з кодуванням. Проведено дослідження екстремумів продуктивності систем передачі бінарних сигналів на основі аналізу взаємозв'язку швидкості передачі символів в каналі та ймовірності помилки, продуктивності і пропускної здатності в дискретному каналі при використанні надлишкового кодування. Досліджено шляхи підтримки необхідної достовірності передачі повідомлень. Визначено значення максимальної продуктивності каналу передачі дискретних повідомлень при відомих енергетичних характеристиках і довжині блоку завадостійкого коду.

**Ключові слова:** пропускна здатність, продуктивність каналу, ймовірність помилки, бінарні сигнали

**Урывский Л. А., Прокопенко Е. А., Вергун С. Н.** Исследование экстремумов производительности в дискретных каналах связи с кодированием. Произведено исследование экстремумов производительности систем передачи бинарных сигналов на основе анализа взаимосвязи скорости передачи символов в канале и вероятности ошибки, производительности и пропускной способности в дискретном канале при использовании избыточного кодирования. Исследованы пути поддержания требуемой достоверности передачи сообщений. Определены значения максимальной производительности канала передачи дискретных сообщений при известных энергетических характеристиках и длине блока помехоустойчивого кода.

**Ключевые слова:** пропускная способность канала, производительность источника, вероятность ошибки, бинарные сигналы

**Uryvskyy L. O., Prokopenko K. A., Vergun S. M.** Research of productivity extremes in discrete channels with coding. It was produced investigation of the transmission systems extrema performance for binary signals based on correlation analysis of the symbol rate in the channel and the probability of error performance and throughput in a discrete channel using redundant coding. The methods for maintaining required reliability messaging are research. The values of the maximum transmission channel performance under certain energy characteristics and the length of the error-correcting block code are defined.

**Keywords:** channel capacity, source rate, bit error rate, binary signals

**Вступлення.** В [1] предложена методика синтеза помехоустойчивого кода, который позволяет достигнуть требуемого качества передачи символов при заданных энергетических характеристиках канала, но при этом не ставится задача эффективного использования ресурсов каналов.

Целью данной статьи является определение условий эффективного использования ресурсов канала при заданных ограничениях на ресурсы.

Для достижения этой цели решается задача поиска максимальной производительности, обеспечиваемой при заданных параметрах канала и известных требованиях к достоверности.

**Обзор литературы.** Центральное место в теории информации занимает теорема Шеннона, согласно которой, в случае, если скорость создания сообщений источником не превосходит пропускной способности канала, то существует способ кодирования и декодирования, при котором можно осуществить передачу сообщений по каналу с помехами со сколь угодно малой вероятностью ошибки [2]. Однако теорема Шеннона не указывает на параметры помехоустойчивого кода и условия его получения.

Значимыми характеристиками канала связи являются пропускная способность  $C$ , которая характеризует *границную* скорость передачи информации по каналу связи, и производительность  $R$  этого же канала связи, как *фактическую* скорость передачи информации.

Согласно теореме Шеннона, для передачи информации со сколь угодно малой вероятностью ошибки за счет кодирования, необходимо, чтобы производительность не превышала пропускную способность  $C \geq R$  [2, 3].

Хотя основной задачей существующих и перспективных телекоммуникационных систем является передача заданного объема информации, их построение часто основывается исключительно на критериях достоверности. Вместе с тем, актуальной для цифровых систем связи является задача обеспечения эффективности использования ограниченных энергетических и частотных ресурсов канала связи. Для экономии частотного ресурса в современных системах связи используется многопозиционная манипуляция, сигналы которой, однако, более уязвимы к действию помех, чем сигналы бинарной манипуляции.

В [4] производится поиск максимумов пропускной способности каналов с многопозиционными сигналами и исследуется влияние энергетических факторов на значение этого максимума.

Альтернативным способом улучшения производительности и достоверности при фиксированном спектре является применение избыточного кодирования. Этот прием также отдаляет производительность от пропускной способности. Сложность задачи поиска помехоустойчивых кодов при фиксированном спектре в каналах связи определяется тем, что фундаментальная теорема кодирования Шеннона не содержит указаний о структуре эффективных помехоустойчивых кодов [5]. Тем не менее, теорема гарантирует существование кода, который бы обеспечивал заданную достоверность передачи информации при производительности, не превышающей пропускную способность [6, 7].

Кроме того, из теории помехоустойчивого кодирования известно, что известные эффективные коды находятся между границей Плоткина – границей достижимых свойств корректирующих кодов, и границей Варшавова-Гильберта – границей гарантированного существования кодов [7].

Предлагаемая статья относится к классу исследований, которые позволяют оценить максимально достижимые значения производительности дискретного канала связи при использовании помехоустойчивого кодирования.

**Постановка задачи.** Для  $M$ -позиционного канала с помехами пропускная способность  $C$  определяется следующим образом [3, 4]:

$$C = V_c \cdot \left[ \log M + P_{\text{ош}} \log \frac{P_{\text{ош}}}{M-1} + (1 - P_{\text{ош}}) \log(1 - P_{\text{ош}}) \right], \quad (1)$$

где  $V_c$  – скорость передачи символов в канале;

$P_{\text{ош}}$  – вероятность ошибочного приёма символов;

$M$  – позиционность манипуляции; в случае бинарного сигнала  $M = 2$ .

При этом под производительностью источника  $R$  дискретных сигналов следует понимать количество информации, которое фактически передается от источника к получателю за единицу времени [1]:

$$R = V_s \cdot [1 + P_{\text{бит}} \log P_{\text{бит}} + (1 - P_{\text{бит}}) \log(1 - P_{\text{бит}})], \quad (2)$$

где  $V_s$  – скорость формирования источником информационных символов;

$P_{\text{бит}}$  – вероятность битовой ошибки, зависящая от скорости формирования символов в канале, вида манипуляции сигналов, энергетических характеристик сигнала и помехи.

В случае когерентного способа обработки сигналов бинарной фазовой манипуляции ФМ-2 вероятность ошибки приема манипулированных сигналов может быть рассчитана по формуле:

$$P_{\text{ош ФМ-2КГ}} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \Phi \left( \sqrt{2 \frac{\alpha}{V_c}} \right) \right], \quad (3)$$

где  $\Phi(x)$  – интеграл вероятности или функция Крампа;

$\alpha = P_c/N_0$  – энергетический параметр, определяемый отношением мощности сигнала в точке приема  $P_c$  и односторонней спектральной плотности мощности помехи  $N_0$ .

В случае некогерентного способа обработки сигналов ФМ-2:

$$P_{\text{ош}} \text{ОФМ-2НКГ} = \frac{1}{2} * e^{-\frac{\alpha}{V_c}} . \quad (4)$$

Из зависимостей (3) и (4), видно, что увеличение скорости передачи  $V_c$  приводит к увеличению вероятности битовой ошибки  $P_{\text{бит}}$ .

В этом случае, для обеспечения требуемой достоверности при неизменных энергетических ресурсах канала  $\alpha$ , необходимо применить помехоустойчивое кодирование.

Параметры блочного кода – длина блока  $n$ , количество информационных символов  $k$ , исправляющая способность  $S$  – влияют на значение производительности  $R$  следующим образом:

$$R = V_s \cdot r_k \cdot [1 + P_{\text{бит}} \cdot \log P_{\text{бит}} + (1 - P_{\text{бит}}) \cdot \log(1 - P_{\text{бит}})], \quad (5)$$

где  $r_k$  – скорость кодирования, численно равная отношению  $k/n$ ;

$P_{\text{бит}}$  – битовая вероятность ошибки на выходе декодера.

Постоянное повышение скорости передачи приводит к необходимости использования кодов с большей исправляющей способностью и соответственно меньшей скоростью кодирования  $r_k$ . Противоположность указанных тенденций изменения производительности в (5) порождает экстремумы (максимумы) показателя  $R$ .

Задача заключается в том, чтобы среди известных помехоустойчивых блочных кодов с заданной длиной блока  $n$ , обеспечивающих требуемую достоверность передачи битов информации в канале при повышении скорости передачи  $V_c$ , найти код, который бы позволял передавать сообщения от источника по каналу связи с требуемой достоверностью декодирования символов источника  $P_{\text{бит}}$  и обеспечивал наибольшую производительность.

В итоге задача нахождения экстремума производительности сводится к поиску максимума следующего функционала:

$$\max_{V_c \rightarrow \infty} R \mid n, P_{\text{тр}}, \alpha = \text{const} . \quad (6)$$

Функционал (6) означает, что необходимо найти максимум производительности при постоянных длине блока  $n$ , требуемой достоверности  $P_{\text{бит}}$ , заданном энергетическом параметре  $\alpha$  в условиях увеличивающейся скорости передачи  $V_c$ .

**Методика поиска экстремумов производительности.** Исходными данными для методики является набор следующих параметров:

$n$  – длина блока,

$P_{\text{тр}}$  – требуемая достоверность (битовая вероятность ошибки на выходе декодера),

$\alpha$  – энергетический параметр,

$V_c$  – скорости передачи символов в канале связи.

С помощью этих параметров определяется текущая битовая вероятность ошибки в канале по формулам (3) и (4).

Если  $P_{\text{тр}} > P_{\text{бит}}$ , то следует увеличивать  $V_c$ , если же  $P_{\text{тр}} \leq P_{\text{бит}}$  – следует в точке экстремума найти помехоустойчивый код, который бы мог обеспечить  $P_{\text{тр}}$ .

Для этого необходимо воспользоваться формулой, позволяющей оценить битовую вероятность ошибки в блочном коде на выходе декодера, для определения требований к исправляющей способности кода  $t$ :

$$P_{\text{бит}} = m \sum_{j=t+1}^n C_n^j p P_{\text{ош}}^j (1 - P_{\text{ош}})^{n-j}, \quad (7)$$

где

$$m = \sum_{j=t+1}^{n-t} \frac{(j+1)k}{n} P_{\text{ош}}^j + k \sum_{j=n-t+1}^n P_{\text{ош}}^j, \quad (8)$$

а также обратиться к границе Плоткина для поиска параметров помехоустойчивого кода [4]:

$$k \leq n - 2d + 2 + \log_2 d \quad (9)$$

где  $d$  – минимальное кодовое расстояние кода с длиной кода  $n$ , которое связано с исправляющей способностью через соотношение  $t = (d-1) / 2$ .

В результате последовательных итераций получается набор следующих параметров –  $\{r_k = k/n, \alpha, V_c\}$ , которые позволяют вычислить текущее значение производительности при использовании помехоустойчивого кода (5):

$$R = V_s \cdot r_k \cdot [1 + P_{\text{бит}} \cdot \log P_{\text{бит}} + (1 - P_{\text{бит}}) \cdot \log(1 - P_{\text{бит}})] \quad (10)$$

Экстремумы производительности для различных наборов исходных параметров определяются на основе итерационного метода при пошаговом наращивании значения скорости  $V_c$ .

На Рис. 1 изображены графики пропускной способности и производительности, которые отображают изменение производительности бинарных сигналов фазовой манипуляции при когерентной и некогерентной обработке при увеличении скорости в случае  $\alpha = 32 \text{ с}^{-1}$ . При этом требования к вероятности ошибки приёма информации в системе неизменны:  $P_{\text{тр}} = 10^{-6}$ . Максимальное значение производительности достигается при вероятности ошибочного символа, которая не превышает 0,01. С ростом  $V_c$  эта вероятность увеличивается.

Как видно из графиков, пропускная способность канала при когерентном способе обработки сигналов монотонно увеличивается. Производительность без использования помехоустойчивого кодирования повторяет характер изменения пропускной способности, но при введении избыточных символов всё больше отклоняется от этого графика.

Следовательно, наступает такой момент, когда производительность имеет экстремум. Значение этого экстремума принимает разное значение при разных значениях длины блока кода  $n$  и энергетического параметра  $\alpha$ .

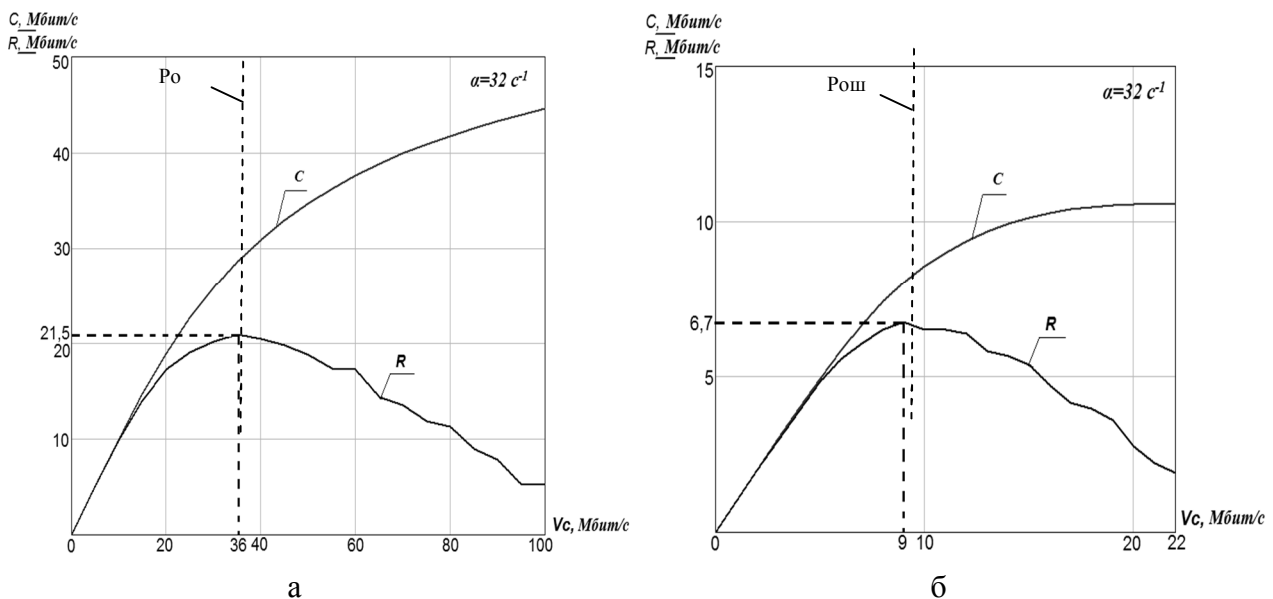


Рис. 1. Графики пропускной способности и производительности при  $\alpha = 32 \text{ с}^{-1}$ ,  $n = 100$  для: а) ФМ-2, КГ; б) ФМ-2, НКГ.

**Реализация методики.** Рассмотрим значения максимума производительности источника при фиксированных значениях энергетического параметра  $\alpha = 16, 20, 32, 64 \text{ с}^{-1}$  и требуемой вероятности ошибочного приёма информации в системе  $P_{\text{тр}} = 10^{-6}$ .

При исследовании скорость передачи символов изменяется от 0 до 100 Мбит/с. Численные значения параметров дискретного канала  $\alpha$  для случая, когда длина блока избыточного кода равна  $n = 100$  символов, сведены в Табл. 1. В таблице приведены значения скорости  $V_c$ , при которых производительность системы передачи дискретных сигналов  $R$  достигает максимума.

**Параметры дискретного канала при  $n=100$**

Табл. 1.

$\alpha, \text{с}^{-1}$	$V_c, \text{Мбит/с}$	$C, \text{Мбит/с}$	$R, \text{Мбит/с}$	$P_{\text{ош}}$	$P_{\text{бит}} \times 10^{-7}$	$S$	$k$
<b>ФМ-2, когерентный способ обработки сигналов</b>							
16	16	13,49	10,39	0,023	4,1	7	77
20	22	17,92	13,26	0,028	4,9	8	74
32	36	29,06	21,5	0,03	9,3	8	74
64	66	55,06	42,4	0,024	9,8	7	77
$\alpha, \text{с}^{-1}$	$V_c, \text{Мбит/с}$	$C, \text{Мбит/с}$	$R, \text{Мбит/с}$	$P_{\text{ош}}$	$P_{\text{бит}} \times 10^{-7}$	$S$	$k$
<b>ФМ-2, некогерентный способ обработки сигналов</b>							
16	4	3,7	3,26	0,01	3,4	4	88
20	6	5,23	4,13	0,018	3,9	6	79
32	9	8,03	6,74	0,014	7,5	5	84
64	18	16,06	13,49	0,014	7,5	5	84

При изменении длины блока кода  $n$  характер зависимости производительности  $R$  от скорости передачи символов  $V_c$  меняется. В Табл. 2 сведены результаты исследования для случая, когда  $n = 100, 200$  и  $1000$  символов, сигналов ФМ-2 при когерентном способе обработки сигналов.

**Параметры дискретного канала при ФМ-2 и  $\alpha=32 \text{ с}^{-1}$**

Табл. 2

$n$	$V_c, \text{Мбит/с}$	$C, \text{Мбит/с}$	$R, \text{Мбит/с}$	$P_{\text{ош}}$	$P_{\text{бит}} \times 10^{-7}$	$S$	$k$
100	36	29,06	21,5	0,03	9,3	8	74
200	40	30,9	22,24	0,037	9,174	15	144
1000	45	32,92	24,69	0,046	8,9	64	750

Графики, которые соответствуют данным Табл. 2, приведены на Рис. 2.

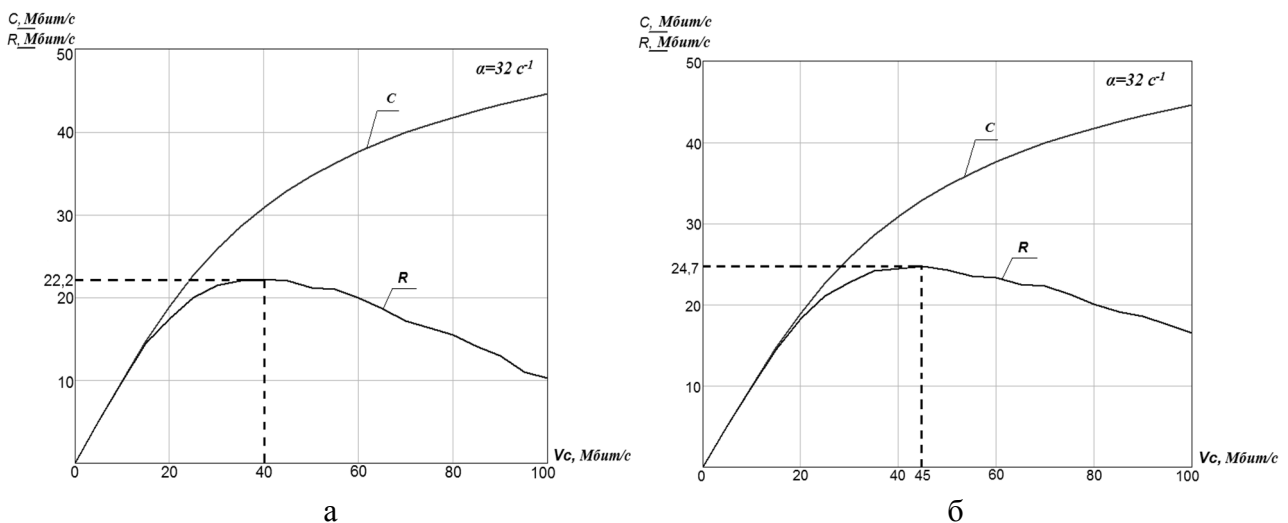


Рис. 2. Графики пропускной способности и производительности при ФМ-2, когерентном способе обработки сигналов и  $\alpha=32 \text{ с}^{-1}$ : а)  $n=200$ ; б)  $n=1000$

При увеличении скорости передачи символов  $V_c$  увеличивается пропускная способность  $C$  и производительность  $R$ . С ростом  $V_c$  различие между этими величинами увеличивается. После точки максимума пропускная способность  $C$  продолжает возрастать, а производительность  $R$  набирает тенденцию к снижению, что происходит в следствии необходимых затрат на помехоустойчивое кодирование для обеспечения качества передачи информации не менее  $10^{-7}$ . В точке, соответствующей максимуму, отношение производительности к пропускной способности варьируется  $R/C = 0,71 \dots 0,75$  (при символьной вероятности ошибки  $P_{\text{ош}} = 0,37 \dots 0,46$ ). Стоит отметить, что отношение  $R/C$  будет больше при лучшей вероятности ошибки в канале.

**Обсуждение результатов.** Исходя из анализа полученных результатов, прослеживается пропорциональная зависимость значения экстремума производительности  $R$  и энергетического параметра  $\alpha$  для сигналов двухпозиционной фазовой манипуляции. Аналитические зависимости этих величин для рассмотренных случаев сведены в Табл. 3.

Зависимость значения экстремума  $R$  и параметра  $\alpha$  Табл. 3.

	ФМ-2, КГ	ФМ-2, НКГ
$n = 100$	$R = 0,66 \alpha$	$R = 0,21 \alpha$
$n = 200$	$R = 0,7 \alpha$	$R = 0,22 \alpha$
$n = 500$	$R = 0,74 \alpha$	$R = 0,23 \alpha$
$n = 1000$	$R = 0,77 \alpha$	$R = 0,24 \alpha$

Графическая зависимость производительности  $R$  и значения параметра  $\alpha$ , при котором достигается максимум  $R$ , от длины блока кода  $n$  для когерентного и некогерентного способов обработки бинарных сигналов имеет вид, отображенный на Рис. 3. С ростом длины блока  $n$  возрастает и отношение производительности  $R$  к энергетическому параметру  $\alpha$ .

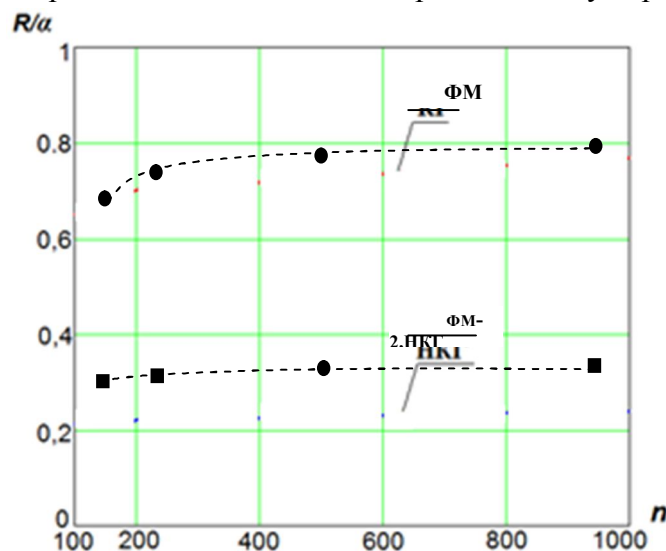


Рис. 3. Зависимость производительности и параметра  $\alpha$  от длины блока кода

### Выводы

1. В работе определены значения максимальной производительности канала передачи дискретных сообщений при известных энергетических характеристиках и длине блока помехоустойчивого кода. Именно при таком значении производительности канала использование его энергетических и частотных ресурсов является самым рациональным.

2. В бинарном канале без использования помехоустойчивого кодирования производительность повторяет характер изменения пропускной способности (Рис.1 и Рис. 2). При введении избыточных символов с целью обеспечения требуемой достоверности производительность всё больше отклоняется от пропускной способности. В результате наступает такой момент, когда производительность имеет экстремум.

3. Эвристические зависимости, которые определяют взаимосвязь между значениями экстремума производительности  $R_{\max}$  и энергетического параметра  $\alpha$ , представленные в Табл.3, найдены на основе математического моделирования с использованием формул (1)...(10).

4. Максимум производительности  $R_{\max}$  зависит от длины блока кода  $n$ . С увеличением длины блока  $n$  максимальное достижимое значение производительности  $R_{\max}$  увеличивается. Этот вывод подчеркивает существующее утверждение, что приблизится к границе Шеннона возможно только с помощью кодов значительной длины.

5. Значение максимума производительности  $R_{\max}$  зависит от вида манипуляции и способа обработки. В статье рассмотрен анализ максимумов производительности для двухпозиционной манипуляции. Дальнейшие исследования будут направлены на исследование максимумов производительности для многопозиционных сигналов.

### **Литература**

1. Урывский Л. А. Выбор блочного помехоустойчивого кода по критерию максимального приближения к границе Шеннона / Л. А. Урывский, Е. А. Прокопенко, А. М. Пешкин // *Telecommunication Sciences*. – К.: NTUU 'KPI'. – 2011. – № 1. – С. 41-47.
2. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике / К. Шеннон ; под ред. Ф. А. Добрушина, О. Б. Лупанова ; пер. с англ. – Москва : изд-во иностр. лит., 1963. – 830 с.
3. Корнейко О. В. Основи теорії телекомунікацій: підручник / О. В. Корнейко, О. В. Кувшинов, О. П. Лежнюк та інш. ; за заг. ред. М. Ю. Ільченка. – Київ : ІССЗІ НТУУ «КПІ», 2010. – 786 с.
4. Урывский Л. А. Исследование максимумов пропускной способности дискретного канала при использовании многопозиционных сигналов / Л. А. Урывский, Е. А. Прокопенко // *Матеріали науково-практичного семінару молодих науковців*. – Київ : УНДІЗ, 2009. – № 1. – С. 18-20.
5. Ryan W. E. *Channel Codes Classical and Modern noise* / Ryan W. E. and Shu Lin. – New York, NY: Cambridge University Press, 2009.
6. George C. Clark. *Error-Correction Coding for Digital Communications* / George C. Clark, Jr. J. Bibb Cain. – Harris corporation Melbourne, Floride. Plenum press. Mew York and London.
7. Roth R. M. *Introduction to Coding Theory* / R. M. Roth. – Cambridge : Cambridge University Press, 2006.