Вікторія Вікторівна Петровська,
студентка Державного професійно-технічного навчального закладу «Криворізький центр професійної освіти робітничих кадрів торгівлі та ресторанного сервісу»,
м. Кривий Ріг, Дніпропетровська обл.,
Україна

https://orcid.org/0000-0001-6333-2115

УДК 7.12:001.891
DOI *https://doi.org/10.32405/2309-3935-2021-3(82)-30-37*

Наукові керівники:

Рашевський Микола Олександрович, *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Криворізького національного університету, м. Кривий Ріг, Дніпропетровська обл., Україна*

Гульман Олександр Володимирович, *учитель математики, спеціаліст вищої категорії Державного професійно-технічного навчального закладу «Криворізький центр професійної освіти робітничих кадрів торгівлі та ресторанного сервісу», м. Кривий Ріг, Дніпропетровська обл., Україна*

МЕТОД ТРАЄКТОРІЙ У ЗАДАЧАХ КОМБІНАТОРИКИ

Анотація.

У статті описано особливості проведення дослідницької роботи, присвяченої певним розділам теорії ймовірності. Розглянуто геометричні методи, які часто використовуються в різних математичних розділах алгебри та на початку аналізу. Зауважено, що в основі методу – проста ідея геометричної ілюстрації біномних коефіцієнтів.

Названа ілюстрація надає можливість не лише унаочнити таку комбінаторну структуру, як комбінація, а й довести цілий ряд важливих комбінаторних тотожностей. Багато задач комбінаторики зводиться до підрахунку різних шляхів (траєкторій), що мають певні властивості. Часто згадані шляхи є моделями різноманітних практичних ситуацій. У статті розглянуто застосування методу траєкторій для доведення комбінаторних тотожностей.

Зазначено, що для вирішення комбінаторної або ймовірнісної задачі доцільно використовувати її геометричну інтерпретацію, що зводить задачу до підрахунку числа шляхів (траєкторій), які володіють певними властивостями. У цьому полягає метод траєкторій. У статті описано застосування методу траєкторій для вирішення комбінаторних і ймовірнісних задач.

Наведено геометричну інтерпретацію основних комбінаторних структур.

Проаналізовано теорію методу траєкторій, наведено приклади розв'язування задач.

Ключові слова: *комбінаторні задачі; ймовірнісні задачі; метод траєкторій; комбінаторні структури; геометрична інтерпретація структур.*

Комбінаторні задачі стали об'єктом багатьох дослідників у зв'язку з комп'ютеризацією всіх сторін життя. Комп'ютерні моделі мають дискретний характер, тому саме дискретна математика останнім часом набула бурхливого розвитку. Комбінаторика є одним із розділів дискретної математики, що привертає увагу багатьох дослідників у зв'язку з широким застосуванням у різних галузях знань і економіки зокрема.

Комбінаторні задачі розв'язуються за допомогою використання стандартних комбінаторних схем – комбінацій, перестановок, вибірок. Залежно від того, чи впорядкована структура є моделлю задачі, чи невпорядкована, чи допускає ця структура повторення чи ні, використовують певну формулу. Проте є досить складні задачі, що не розв'язуються лише застосуванням стандартних формул, і потребують більш поглибленого дослідження, спеціальних методів. Найбільш поширеними методами розв'язування комбінаторних задач є методи рекурентних співвідношень, метод твірних (продуктивних) функцій, метод траєкторій. Якщо перші з двох названих методів оперують спеціальними поняттями, що не входять до шкільного курсу математики, то метод траєкторій виділяється простотою і можливістю розв'язувати широке коло задач не лише комбінаторики, а й суміжних розділів математики – теорії ймовірностей, математичної статистики, теорії випадкових процесів.

Об'єктом дослідження роботи є метод траєкторій, а *предметом* дослідження – задачі комбінаторики і теорії ймовірностей.

Мета дослідження: застосувати метод траєкторій до розв'язування задач комбінаторики і теорії ймовірностей.

Відповідно до мети, було поставлено такі *завдання:*

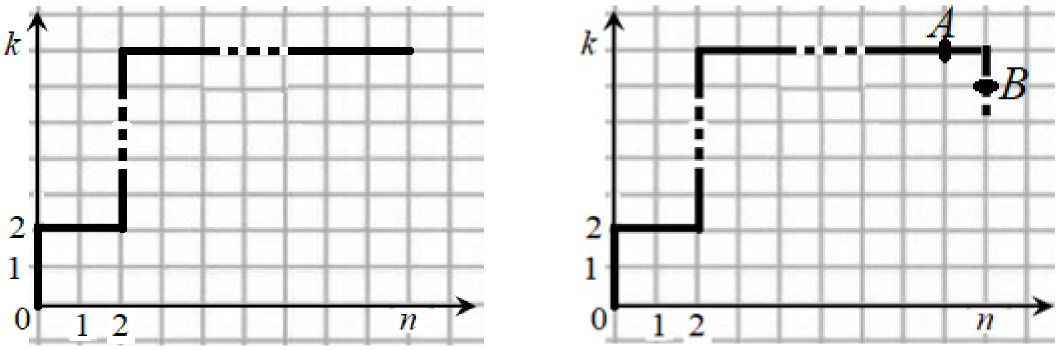
1) проаналізувати наукову, популярну літературу та Інтернет-джерела з питання використання методу траєкторій;

2) навести задачі з комбінаторики і теорії ймовірностей, де застосовується метод траєкторій;

3) застосувати метод траєкторій до деяких задач теорії ймовірностей і проаналізувати можливості застосування методу в інших ситуаціях.

Результати виконаного дослідження: розглянуто теорію методу траєкторій та наведено приклади розв'язування задач; запропоновано геометричну ілюстрацію інших комбінаторних структур, відмінних від класичного варіанту метода, а саме – комбінацій з повтореннями та вибірок з повтореннями. Окрім того, траєкторну інтерпретацію вибірки з повтореннями застосовано до розв'язування задач з теорії ймовірностей.

Геометрична ілюстрація біномних коефіцієнтів. Одним із ефективних методів розв'язування задач комбінаторики і теорії ймовірностей є так званий метод траєкторій. Вивченню цього методу передує геометрична ілюстрація біномних коефіцієнтів. Термін «метод траєкторій» увів академік Б. Гнєденко ще у 1951 р. і використав зі своїми учнями для розв'язування задач математичної статистики. Розглянемо координатну сітку на площині та поставимо запитання: Скільки існує найкоротших шляхів, що з'єднують початок координат із точкою (n, k)? Приклад подано на рисунку 1.



А) Б)

Рис. 1. Найкоротша ламана, що з'єднує початок координат з точкою (n, k)

Очевидно, що найкоротший шлях має проходити так, щоб містити ланки, що йдуть вправо чи вгору. Для побудови кожного такого шляху необхідно обрати місця для n горизонтальних ланок (а вертикальні ланки визначаться однозначно), або вказати місця k вертикальних ланок, а горизонтальними сполучити однозначно нанесені вертикальні. Оскільки довжина будь-якої найкоротшої ламаної складається з $n + k$ ланок, то кількість таких ламаних дорівнює кількості варіантів вибору з $n + k$ – елементної множини невпорядкованої n – елементної (або k – елементної). Як відомо з комбінаторики, це число дорівнює числу C_{n+k}^{k} (або C_{n+k}^{n}, звідки дістаємо комбінаторну тотожність $C_{n+k}^{k} = C_{n+k}^{n}$). Отже, маємо геометричну інтерпретацію біномних коефіцієнтів. Просте твердження, яке тепер можна сформулювати так: число найкоротших шляхів, що проходять координатною сіткою та сполучають точки (0, 0) і (n, k), дорівнює C_{n+k}^{k} .

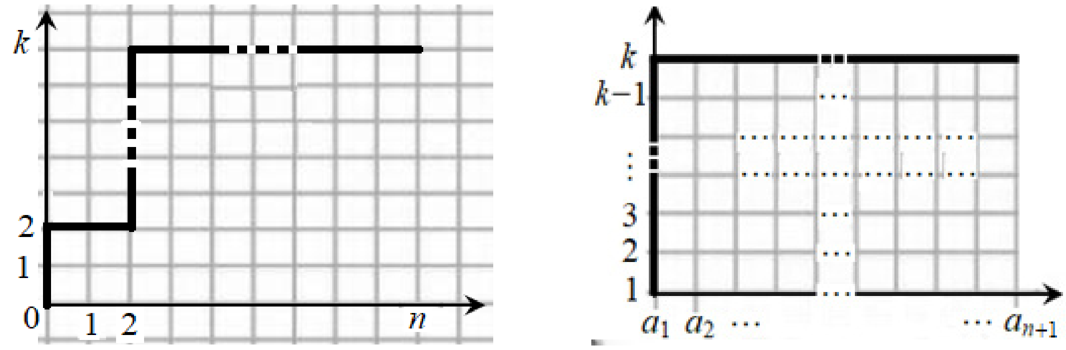
Оскільки кожна найкоротша траєкторія, що сполучає (0, 0) і (n, k), має обов'язково пройти або через точку $A(n - 1, k)$ (Рис. 1 Б)), а таких траєкторій всього C_{n+k-1}^{k}, або через точку $B(n, k - 1)$, а таких траєкторій C_{n+k-1}^{k-1}, то маємо комбінаторну тотожність $C_{n+k}^{k} = C_{n+k-1}^{k} + C_{n+k-1}^{k-1}$.

Отже, траєкторним способом доведено відому комбінаторну тотожність.

Траєкторії комбінацій з повтореннями та вибірок. Як було описано вище, геометрична інтерпретація біномних коефіцієнтів полягає в тому, що кожній підмножині (комбінації) множини *{a1, a2, .., an + k}* ставиться у відповідність траєкторія – найкоротша ламана, що сполучає початок координат з точкою *(n, k)*. Поставимо кожній комбінації (а отже і траєкторії) набір вигляду 100101…1 довжини *n + k*, де наявність елемента *al* позначається одиницею на *l*-му місці, а відсутність – нулем. Записаній послідовності відповідатиме підмножина *{a1, a4, a6,…, an + k}*. А кожній послідовності ставиться у відповідність ламана (траєкторія), що з'єднує точки (0, 0) і *(n, k)*, ідучи вгору (1) або вправо (0). Ламана лінія має іти найкоротшим шляхом.

У самій геометричній інтерпретації проста заміна шкали по осі *Ox* із 0, 1, 2, .., *n* на $a_1, a_2, .., a_{n+1}$ надає можливість отримати рівність $C_n^k = C_{n+k-1}^k$,

тобто подати також геометричну інтерпретацію комбінаціям із повтореннями. Так, на рисунку 2 (А) траєкторія відповідає підмножині $a_1, a_2, a_5, a_6, .., a_{k-2}$. На рисунку 2 (Б) траєкторія відповідає комбінації з повтореннями $a_1, a_1, ,.., a_1$. Наявність елемента – вертикальна риска траєкторії, а відсутність – горизонтальна.



А) Б)

Рис. 2. Траєкторії комбінацій без повторень і з повтореннями

Траєкторія, що ілюструє біномні коефіцієнти, має бути найкоротшою. Якщо відмовитися від вимоги, щоб ламана йшла найкоротшим шляхом, а «дозволити» також іти донизу (але вліво по *Ox* забороняється), не виходячи за межі прямокутника (розміру *n**(*q* - 1)), то отримаємо геометричну ілюстрацію для вибірок із повтореннями.

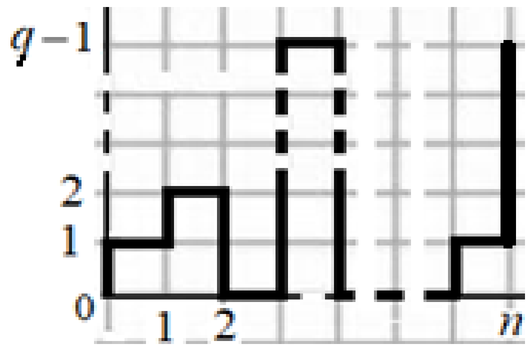


Рис. 3. Траєкторія вибірки з повтореннями

Дійсно, кожній ламаній, що має вигляд стовпчикової діаграми *(рис. 3)*, поставимо у відповідність *n*-значне число в системі числення з основою *q* так, що висота *s*-го стовпчика дорівнює цифрі, яка стоїть на *s*-му місці в запису числа. Ламаній на рисунку 3 відповідає число $(120\ldots(q-1)0\ldots01)_q$. Кількість таких чисел (кожне число є впорядкованою множиною, утвореною вибором *n* цифр із *q*, з повтореннями), а отже, і ламаних, що з'єднують точку (0, 0) із точкою (*n*, *q* - 1), дорівнює $\overline{A}_q^n = q^n$.

Остання геометрична інтерпретація надає можливість розв'язати таку задачу.

Задача 1 [1, задача 30]

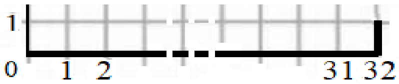
У деякій країні не було двох мешканців з однаковим набором зубів. Якою найбільшою може бути кількість мешканців цієї країни (найбільше може бути 32 зуби)?

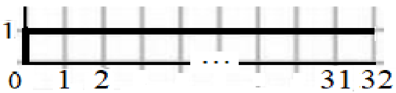
Розв'язання. *Перший спосіб.* Можна побудувати впорядковану структуру – послідовність довжини 32 вигляду 111001…101, де наявність зуба відповідає одиниці, відсутність – нулю. Очевидно, що повторення мають місце (обираємо *k* = 32 елементи із *n* = 2 елементів 0 і 1), і знаходимо необхідну формулу $\overline{A}_n^k = n^k$, отримуючи відповідь $\overline{A}_2^{32} = 2^{32}$.

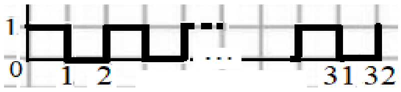
Другий спосіб. Використаємо невпорядковану без повторень множину вигляду {1, 3,…, 32}, де наявність числа відповідає наявності зуба – порядок розташування номерів не має значення. Для побудови множини такого вигляду 33 рази обираємо із *n* = 32 елементів *k* = 0, 1, 2,…, 32 елементи, підраховуючи кількість 0-зубих, 1-зубих,…, 32-зубих. Тому кількість мешканців дорівнює кількості всіх підмножин 32-елементної множини {1, 2,…, 32}. Маємо: $C_{32}^{0}+C_{32}^{1}+...+C_{32}^{32}=2^{32}$.

Траєкторний спосіб розв'язання.

Поставимо у відповідність кожному мешканцю країни ламану, що з'єднує точки (0, 0) і (32, 1). На рисунку нижче зображено ламані, що відповідають наборам зубів 0, 32 і 16 (через один).







Тут $q = 2$, $n = 32$, а отже, кількість траєкторій і кількість мешканців країни становить $\overline{A}_{2}^{32}=2^{32}$.

Доведення комбінаторних тотожностей методом траєкторій. Розглядаючи відомий трикутник Паскаля *(рис. 4)*, нескладно помітити, що k-м елементом n-го рядка є коефіцієнт $!_{n}^{k}$ у розкладанні двочлена $(a + b)^n$ за відомою формулою бінома Ньютона: $(a+b)^{n}=\sum_{k=1}^{n}C_{n}^{k}a^{k}b^{n-k}$.

			n	
$(a+b)^0$	=	1	0	1
$(a+b)^1$	=	$a+b$	1	1 1
$(a+b)^2$	=	$a^2+2ab+b^2$	2	1 2 1
$(a+b)^3$	=	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	3	1 3 3 1
$(a+b)^4$	=	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	4	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	=	$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$	5	1 5 10 10 5 1
$(a+b)^6$	=	...	6	1 6 15 20 15 6 1

Рис. 4. Трикутник Паскаля

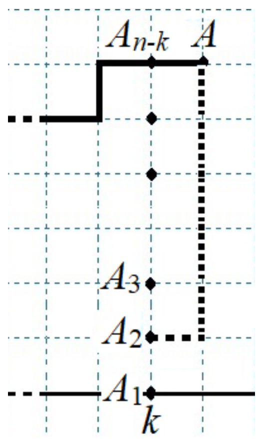
Коефіцієнти $!_{n}^{k}$, які називають біномними коефіцієнтами, мають багато цікавих і корисних властивостей. Деякі з них називають комбінаторними тотожностями. Запишемо дві з них: $C_{n}^{k}=C_{n}^{n-k}$; $C_{n}^{k}=C_{n}^{k-1}+C_{n-1}^{k}$.

Дійсно, перша тотожність вказує на симетричність коефіцієнтів у таблиці Паскаля, а друга на те, що кожен біномний коефіцієнт є сумою двох коефіцієнтів, розміщених у трикутнику над ним, на один рядок вище. З погляду методу траєкторій перша тотожність вказує на рівнозначність вибору положення k вертикальних чи n - k горизонтальних ланок ламаної (траєкторії), що містить n ланок. Друга тотожність підраховує кількість траєкторій, що проходять через ліву від даної кінцевої точки та через нижню.

Доведемо таку тотожність:

$$C_{n+1}^{k+1}=C_{n}^{k}+C_{n-1}^{k}+C_{n-2}^{k}+...+C_{k}^{k}.$$

Розглянемо всі траєкторії, що йдуть у точку $A(k + 1, n\text{-}k)$. Таких траєкторій всього існує C_{n+1}^{k+1}. Поділимо їх на декілька класів: траєкторії, що проходять через точку A_1, що проходять через точку A_2, .., траєкторії, що проходять через точку A_{n-k}. Оскільки траєкторія може йти лише вправо і вгору, то інших траєкторій, відмінних від перерахованих, немає. Підрахуємо кількість названих траєкторій. Траєкторій, що з'єднують точку $O(0, 0)$ з точкою $A_1(k, 0)$ усього існує C_{k}^{k}; тих, що з'єднують точку $O(0, 0)$ з точкою $A_2(k, 1)$ – C_{k+1}^{k}, з'єднують точку $O(0, 0)$ з точкою $A_3(k, 2)$ – C_{k+2}^{k}, .., з точкою $A_{n-k}(k, n\text{-}k)$ – C_{n}^{k}. Будемо вважати також, що з точки A_1 в точку A ламана може йти лише вправо і вгору, тобто одним єдиним шляхом. Ламана, що з точки A_1 піде в точку A_2, потрапляє до іншого класу. Таким чином, підрахуємо всі можливі траєкторії, що входять до точки A. Згідно з правилом суми (кожен доданок відповідає своєму класу) та добутку маємо кількість можливих



ламаних: $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k \cdot 1 + C_{n-1}^k \cdot 1 + C_{n-2}^k \cdot 1 + ... + C_k^k \cdot 1$, або $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_{n-1}^k + C_{n-2}^k + ... + C_k^k$, що й треба було довести.

Таким чином, можемо дійти висновків:

1) геометрична ілюстрація біномних коефіцієнтів надає нові можливості для розв'язування різноманітних задач комбінаторики та інших розділів математики;

2) можна навести геометричну інтерпретацію не лише комбінацій без повторень, а також і інших комбінаторних структур – вибірок із повтореннями та комбінацій із повтореннями;

3) метод траєкторій надає досить простий і наочний метод доведення комбінаторних тотожностей.

Задачі з комбінаторики. Розглянемо задачі з комбінаторики, де можна використати метод траєкторій. У багатьох задачах розв'язання іншими методами чи неможливе, чи пов'язане з певними труднощами.

Задача 2

Біля театральної каси зібралась черга з $m + n$ осіб, причому n із них мають лише по одній банкноті вартістю 50 грн, а інші m – по одній банкноті вартістю 100 грн, $m \leq n$. Скільки існує способів такого розташування покупців у черзі до каси, за яких жодному покупцеві не доведеться чекати решту, якщо на початку в касі грошей немає? Яка ймовірність того, що покупцеві не доведеться чекати решти біля каси?

Розв'язання. Нехай покупці розташувалися до каси певним чином. Розглянемо величини $s_i = 1$, якщо i-й покупець має 50 грн, і $s_i = -1$, якщо i-й покупець має 100 грн. Розглянемо суму $S_k = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_k$. Очевидно, що S_k – це різниця між кількістю банкнот у 50 грн і кількістю банкнот у 100 грн серед перших k покупців у черзі. Для того, щоб жоден покупець не чекав здачу, записана сума має бути невід'ємною. Розглянемо систему координат на площині, і побудуємо точки $A_k = (k, S_k)$, $k = 1, 2, 3, .., m + n$. Ламана (траєкторія), що з'єднує точки $O(0, 0)$ $A_{m+n} = (n + m, n - m)$, проходячи через точки $A_1, A_2, \ldots, A_{m+n-1}$, містить $m + n$ відрізків, n з яких піднімається вгору, а m опускається донизу.

Кількість таких траєкторій підрахуємо, вказавши номери тих n відрізків (із $n + m$), що піднімаються вгору. Це число дорівнює числу комбінацій $C_{m+n}^n = C_{m+n}^m$.

Траєкторії, що відповідають тим способам розташування покупців у черзі, за якого жоден не буде очікувати решти, не має спільних точок із прямою $y = -1$; $S_k \geq 0$, як зазначалося вище. Знайдемо число траєкторій, що мають спільну точку із прямою $y = -1$. Кожній такій траєкторії T поставимо у відповідність її відбиття T' відносно названої прямої за таким правилом: до першої точки дотику з прямою

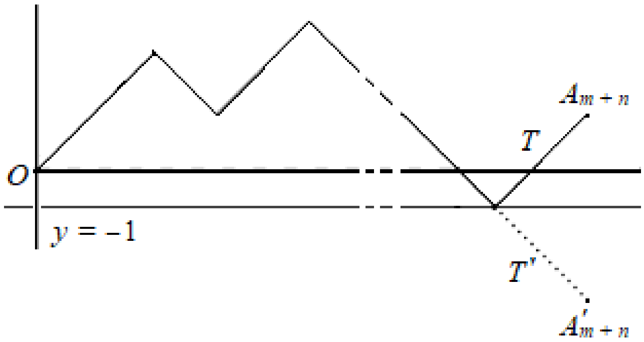


Рис. 5. Дзеркальне відображення траєкторії

$y = -1$ траєкторія T' збігається з T, а далі T' є симетричним образом T відносно прямої $y = -1$ *(рис. 5).* Усі траєкторії T' закінчуються в точці $A'_{m+n} = (n + m, n - m - 2)$, яка є симетричним образом точки $A'_{m+n} = (n + m, n - m)$ відносно розглядуваної прямої. Встановлена відповідність є взаємно однозначною. Тому шукане число траєкторій дорівнює числу ламаних, які сполучають O і A'_{m+n}. Підрахуємо це число. Нехай ламана складається із x відрізків, що йдуть вгору та y відрізків, що йдуть донизу. Тоді $x + y = m + n$, а $y - x = n - m + 2$ (траєкторія має закінчитися саме у точці A'_{m+n}). Число траєкторій із O в A'_{m+n} дорівнює C_{m+n}^{n+1}, Число траєкторій, що не перетинають пряму $y = -1$, дорівнює $C_{m+n}^n - C_{m+n}^{n+1}$. Отже, відповіддю до задачі є $C_{m+n}^n - C_{m+n}^{n+1} = \frac{n+1-m}{n+1} \cdot C_{m+n}^n$.

Якщо ставити питання про ймовірність того, що покупцеві не доведеться чекати решти, то така ймовірність дорівнює $\frac{C_{m+n}^n - C_{m+n}^{n+1}}{C_{m+n}^n} = \frac{n+1-m}{n+1}$.

Під час розв'язування задач із використанням дзеркального відображення траєкторії корисними є такі твердження.

Теорема 1. Нехай $N_{x,y}$ – число траєкторій, що сполучають точку O із точкою (x, y). Тоді,

$$N_{x,y} = \frac{x!}{\left(\frac{x+y}{2}\right)!\left(\frac{x-y}{2}\right)!},$$

якщо x і y мають однакову парність, і $N_{x,y} = 0$, то парність чисел x і y різна.

Теорема 2. (Принцип дзеркального відображення). Нехай $A = (a, \alpha)$ і $B = (b, \beta)$ – точки з цілочисловими координатами, і виконуються нерівності $b > a \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. а $A_1 = (a - \alpha)$ – точка, симетрична до точки A відносно осі Ox. Тоді число тих траєкторій з A до B, що дотикаються до осі

Ox або перетинають її, дорівнює числу траєкторій з A_1 до *B*.

$$N_{x,y}=\frac{x!}{\left(\frac{x+y}{2}\right)!\left(\frac{x-y}{2}\right)!},$$

Теорема 3. Нехай $x>0$ і $y>0$. Тоді число траєкторій від точки *O* до точки (x, y), які не мають вершин на осі *Ox* (за винятком початку координат), дорівнює $\frac{y}{x}\cdot N_{x,y}$.

Теорема 4. Серед C_{2n}^{n} траєкторій, які сполучають точку *O* з точкою $(2n, 0)$, існує:

a) рівно L_{2n-2} траєкторій, які лежать вище осі *Ox* і не мають спільних точок з *Ox* крім (0, 0) і (2*n*, 0);

b) рівно L_{2n} траєкторій, які не мають вершин нижче осі *Ox*.

Тут використано позначення $L_{2n}=\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$.

Задача 3

Довести комбінаторні тотожності

1) $C_{m+n-(k+s)}^{n-s}=\sum_{s=1}^{n+1}C_{k+s}^{s}\cdot C_{m+n-(k+s)}^{n-s}$;

2) $C_{2n}^{n}=\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\left(C_n^2\right)^2+\ldots+\left(C_n^n\right)^2$.

Розв'язання.

1. Кожна з траєкторій, які з'єднують точки $O(0, 0)$ і $A(n, m)$, а таких траєкторій існує $C_{n+m}^{n}=C_{n+m}^{m}$, обов'язково пройде через одну з точок $A_1(k, 0), A_2(k, 1),\ldots, A_{n+1}(k, n)$ *(рис. 6 А))*. Траєкторій, що з'єднують $O(0, 0)$ і $A_s(k, s)$ усього існує $C_{k+s}^{s}=C_{k+s}^{k}$ $(s = 1, 2, 3,\ldots, n + 1)$, а траєкторій, що сполучають $A_s(k, s)$ із точкою $A(n, m)$ всього $C_{m+n-(k+s)}^{n-s}=C_{k+s}^{m-k}$. Отже, застосувавши правила суми та добутку, отримаємо таку комбінаторну тотожність: $C_{m+n-(k+s)}^{n-s}=\sum_{s=1}^{n+1}C_{k+s}^{s}\cdot C_{m+n-(k+s)}^{n-s}$, саме її і треба було довести. Зауважимо, що будь-якими іншими методами ця тотожність доводиться дещо складніше.

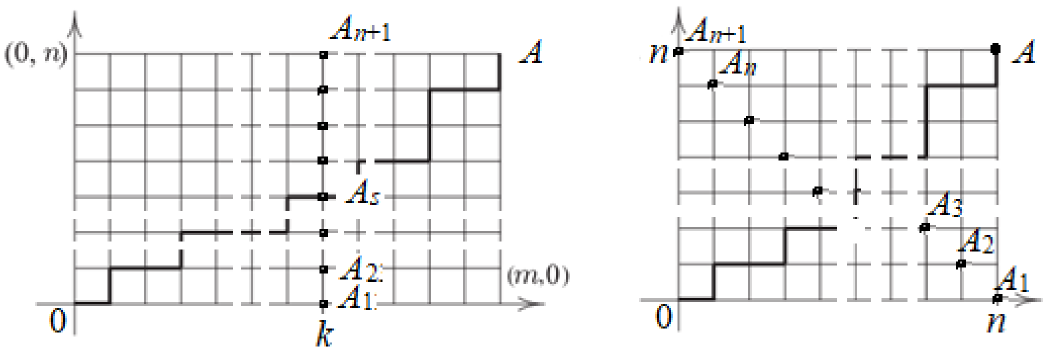


Рис. 6. Доведення комбінаторних тотожностей

2. Число траєкторій із точки $O(0, 0)$ в точку $A(n, n)$ дорівнює C_{2n}^{n}. Будь-яка з траєкторій має пройти через одну і лише одну із точок *(рис. 6 Б))* $A_1(n, 0)$, $A_2(n-1, 1)$, $A_3(n-2, 2)$, …, $A_n(1, n-1)$, $A_{n+1}(0, n)$, що належать діагоналі квадрата. Число траєкторій із точки $O(0,0)$ в точку $A_k(n-k+1, k-1)$, $k = 0, 1, \ldots, n + 1$, дорівнює C_n^k, а траєкторій із $A_k(n-k+1, k-1)$ в $A(n, n)$ – $C_n^{n-k}=C_n^k$, отже, за правилом добутку число траєкторій із точки $O(0, 0)$ в точку $A(n, n)$, що проходять через точку A_k, становить $C_n^k\cdot C_n^k$. За правилом суми матимемо: $C_{2n}^{n}=\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2$.

Задачі з теорії ймовірностей.

Задача 4 (Бертрана про балотування [4, № 4, 29])

Кандидат *A* набрав на виборах *a* голосів, а кандидат *B* – *b* голосів $(a > b)$. Виборці голосували послідовно. Яка ймовірність того, що під час голосування кандидат *A* був завжди попереду від *B* за кількістю поданих за нього голосів?

Розв'язання. Нехай $s_i = 1$, якщо *i*-й голос подано за *A*, $s_i = -1$, якщо *i*-й голос подано за *B*. Розглянемо суму $S_k = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_k$. Очевидно, що S_k – це різниця між кількістю голосів, поданих за кандидатів, і за умовою задачі $S_{a+b} = a - b$. Побудуємо в системі координат *Oxy* ламану, що сполучає точки $O(0, 0)$, $(1, S_1)$, …, $(a + b, S_{a+b})$. Кожному способу розподілу голосів між кандидатами відповідає своя ламана (траєкторія), яка сполучає точки $O(0, 0)$ і $(a + b, a - b)$. Загальне число траєкторій складає C_{a+b}^{b}. Траєкторія складається з $a+b$ відрізків, причому a з них ідуть вгору. Кандидат A буде завжди попереду від B, якщо відповідна траєкторія проходить через точку (1, 1) (перший виборець проголосував за A) і не перетинає вісь Ox. Число таких траєкторій дорівнює

$$C_{a+b-1}^{a-1}\frac{a-1+1-b}{a-1+1}=\frac{a-b}{a+b}C_{a+b}^{b}.$$

Таким чином, можемо дійти таких висновків. У пропонованій статті наведено приклади розв'язання задач із комбінаторики та теорії ймовірностей методом траєкторій. Окрім того, доведено, що метод траєкторій часто є єдиним методом розв'язування задач із теорії ймовірностей чи теорії випадкових процесів (наприклад, дослідження траєкторій броунівських частинок).

Отже, відповідно до поставленої мети та завдань дослідження, у процесі вивчення наукової проблеми було отримано такі основні результати, а саме:

1) проаналізовано наукову літературу та Інтернет-джерела щодо методу траєкторій і його застосувань;

2) описано спосіб розв'язування комбінаторних задач із використанням методу траєкторій;

3) запропоновано геометричну ілюстрацію комбінацій із повтореннями та виборок без повторень.

Окрім того, результати проведеного дослідження дають підстави підсумувати, що:

1) метод траєкторій, який має широкі застосування в сучасній теорії ймовірностей, може бути використаний під час вивчення комбінаторики в середній школі;

2) самостійним результатом роботи автора є побудова траєкторій для комбінаторної тотожності

$$\sum_{m_1+m_2+\ldots+m_q=m} C_{n_1}^{m_1}\cdot C_{n_2}^{m_2}\cdot\ldots\cdot C_{n_q}^{m_q}=C_n^m;$$

3) геометричні ілюстрації не лише є наочністю, а й допомагають під час розв'язування складних задач;

4) матеріали роботи можуть бути використані на факультативних заняттях із математики.

Використані літературні джерела

1. *Виленкин Н. Я.* Комбинаторика / Н. Я. Виленкин. – М. : Наука, 1969. – 328 с.

2. Ерусалимский Я. М. 2- и 3-пути на графе-решетке и комбинаторные тождества / Я. М. Ерусалимский // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2017. – № 1. – С. 25–30.

3. *Капітонова Ю. В.* Основи дискретної математики / Ю. В. Капітонова, С. Л. Кривий, О. А. Летичевський, Г. М. Луцький, М. К. Печурін. – Київ : Наук. думка, 2002. – 579 с.

4. Теорія ймовірностей. Збірник задач / А. Я. Дороговцев, Д. С. Сильвестров, А. В. Скороход, М. Й. Ядренко. – Київ : Вища школа, 1976. – 384 с.

5. Элементы комбинаторики / И. И. Ежов, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. – М. : Наука, 1977. – 80 с.

6. *Яглом А. М.* Неэлементарные задачи в элементарном изложении / А. М. Яглом, И. М. Яглом. – М. : Гостехиздат, 1954. – 544 с.

7. Лекція 9. Методи траєкторій. – URL: http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/646/discretka_L_08.pdf.

References

1. Vilenkin, N. Ya. (1969). *Kombinatorika [Combinatorics]*. Moscow. 328 p. [in Russian].

2. Erusalimskiy, Ya. M. (2017). 2- i 3-puti na grafereshetke i kombinatornyye tozhdestva [2- and 3-way on the lattice graph and combinatorial identities] *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennyye nauki – Izvestiya vuzov. North Caucasus region. Natural sciences. 1.* P. 25–30. [in Russian].

3. Kapitonova, Yu. V., Kryvyi, S. L., Letychevskyi, O. A., Lutskyi, H. M., & Pechurin, M. K. (2002). *Osnovy dyskretnoi matematyky [Fundamentals of discrete mathematics]*. Kyiv, 579 p. [in Ukrainian].

4. Dorohovtsev, A. Ya., Sylvestrov, D. S., Skorokhod, A. V., & Yadrenko, M. Y. (1976). *Teoriia ymovirnostei. Zbirnyk zadach [Probability theory. Collection of problems]*. Kyiv, 384 p. [in Ukrainian].

5. Ezhov, I. I., Skorokhod, A. V., & Yadrenko, M. I. (1977). *Elementy kombinatoriki [Elements of combinatorics]*. Moscow, 80 p. [in Russian].

6. Yaglom, A. M., & Yaglom, I. M. (1954). *Neelementarnyye zadachi v elementarnom izlozhenii [Non-elementary problems in elementary exposition]*. Moscow, 544 p. [in Russian].

7. *Lektsiia 9. Metody traiektorii [Lecture 9. Methods of trajectories]*. Retrieved from: http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/646/discretka_L_08.pdf. [in Ukrainian].

Petrovska Viktoriia, Student of the State Vocational and Technical Educational Institution "Kryvyi Rih Center for Vocational Education of Trade and Restaurant Service Workers", Kryvyi Rih, Dnipropetrovsk Region, Ukraine

METHOD OF TRAJECTORIES IN COMBINATORIC PROBLEMS

Summary.

The article describes the features of research work on certain sections of probability theory. Geometric methods that are often used in various mathematical sections of algebra and the beginning of analysis are considered. It is noted that the method is based on a simple idea of geometric illustration of binomial coefficients.

This illustration makes it possible not only to illustrate such a combinatorial structure as a combination, but also to prove several important combinatorial identities. Many problems of combinatorics are reduced to the calculation of certain paths (trajectories) that have certain properties.

The often-mentioned ways are models of various practical situations. The paper considers the application of the trajectory method to prove combinatorial identities.

It is noted that to solve a combinatorial or probabilistic problem, it is advisable to use its geometric interpretation, which reduces the problem to counting the number of paths (trajectories) with certain properties. This is the method of trajectories. The paper describes the application of the trajectory method for solving combinatorial and probabilistic problems.

The geometric interpretation of the main combinatorial structures is given.

The theory of the trajectory method is analyzed, examples of problem solving are given.

Combinatorial problems have been the subject of many researchers in connection with the computerization of all aspects of life. Computer models are discrete in nature, which is why discrete mathematics has recently developed rapidly. Combinatorics, as one of the branches of discrete mathematics, attracts the attention of many researchers due to its wide application in various fields of knowledge and economics in particular.

Keywords: *combinatorial problems; probabilistic problems; trajectory method; combinatorial structures; geometric interpretation of structures.*

Стаття надійшла до редколегії 18 червня 2021 року