

УДК 621.112.32:620.191.31

АНАЛІЗ ВІБРАЦІЙНОГО СТАНУ СТРИЖНЯ З ТРІЩИНОЮ ПІД ДІЄЮ СТОХАСТИЧНИХ ЦИКЛІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

І. Й. МАЦЬКО¹, І. М. ЯВОРСЬКИЙ^{1,2}, Р. М. ЮЗЕФОВИЧ¹, Я. МАЄВСЬКИЙ²

¹ Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;

² Інститут телекомунікацій Технологічно-природничого університету, Бидгощ, Польща

На основі числових розв'язків нелінійного диференціального рівняння II-го порядку проаналізовано коливання стрижня під дією стохастичної вимушувальної сили. Встановлено, що за появи тріщини коливання набувають властивостей періодичної нестационарності. Показано, що в режимі суперрезонансу характеристики нестационарності другого порядку є чутливішими до розвитку тріщини, ніж характеристики детермінованої складової. Використання діагностичних ознак, побудованих на їх основі, дає змогу виявляти тріщини вже за малих довжин.

Ключові слова: *вібраційний сигнал, періодично нестационарні випадкові процеси, діагностичні ознаки, стрижень з тріщиною, поздовжні та згинні коливання.*

Під час вібродіагностики складних машинних комплексів вібраційний сигнал сформований, як правило, відгуками від багатьох вузлів, які знаходяться під впливом динамічного навантаження. Під час розв'язання задачі розділення сигналу на первинні складники постає питання аналізу впливу на структуру сигналу можливих дефектів, які виникають у кожному з комплектуючих елементів: підшипниках кочення та ковзання, зубчатих передачах, валах, стрижневих елементах конструкцій та ін. Найпоширенішим пошкодженням елементів конструкцій, що знаходяться під циклічним навантаженням, є втомна тріщина. В основі розробки методів виявлення такої тріщини лежить її математична модель. У найпростішому випадку втомну тріщину подають як локальне зниження жорсткості [1–3]. Моделювання тріщини у вигляді розрізу, яке прийняте у механіці руйнування, дає змогу визначити напружено-деформований стан навколо неї, в тому числі концентрацію напружень біля її вершини, обчислити швидкість її росту і на цій основі оцінити втомну довговічність пошкодженої конструкції за циклічних навантажень. Методи, які при цьому використовують, не враховують, що за дії зовнішньої сили тріщина буде циклічно змикатися–розмикатися. В напівциклах розтягу змінюється жорсткість матеріалу, а в напівциклах стиску тріщина повністю закрита і жорсткість матеріалу залишається незмінною. Таке явище описують так звану “функцією дихання матеріалу”, тобто функцією, яка визначає зміну жорсткості в напівциклах розтягу та стиску [4, 5]:

$$k(t) = k_0 \left[1 - \frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{x}{|x|} \right) \right] x.$$

Тут x – деформація, α – відносна різниця між узагальненою жорсткістю деформованого елемента за стиску чи до порушення суцільності k_0 і за розтягу k :

$$\alpha = (k_0 - k) / k.$$

Параметр α залежить від типу, відносних розмірів та розташування тріщини, відносних розмірів і видів коливань конструктивного елемента і може бути визначений через енергетичну характеристику пошкодження $\Delta\Pi_T/\Pi_0$ [5]:

$$\alpha = K/(1+K),$$

де Π_0 – потенціальна енергія деформації непошкодженого пружного тіла; $\Delta\Pi_T$ – приріст потенціальної енергії, обумовлений збільшенням піддатливості стрижня в результаті появи тріщини, і який визначається через коефіцієнт інтенсивності напружень. Приклади розрахунків величини K і α за розтягу і згину стрижнів прямокутного перерізу за наявності тріщин різного типу подані в праці [5].

Різниця між пружними опорами матеріалу за розтягу і стиску внаслідок порушення його суцільності призводить до нелінійності диференціального рівняння, яке описує вібродеформації елементів конструкцій [5–10]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2\left[1 - \frac{\alpha}{2}(1 - \operatorname{sgn} x)\right]x = f(t), \quad (1)$$

де $\omega_0 = \sqrt{k_0/m}$ – частота коливань непошкодженого тіла чи тіла з закритою тріщиною, а m – узагальнена маса. Сили опору враховуються коефіцієнтом демпфування β . Відмітимо, що моделювання коливань тіла з тріщиною як одномасової коливної системи з несиметричною відновлювальною силою в багатьох випадках дає можливість адекватно охарактеризувати поведінку досить складних конструкцій [5–10].

Дослідження механічних коливних систем на основі рівняння (1) присвячені аналізу вібраційного відгуку під час гармонічного входу на частотах, що відповідають основному, супер- та субгармонічному резонансам. Нижче вивчено структуру відгуку, коли вимушувальну силу описують сумою гармонічного коливання і стаціонарного випадкового процесу, при цьому як частота гармоніки, так і несуча частота є близькими до частоти суперрезонансу. Такий вибір частот зумовлений тим, що супергармонічний резонанс на відміну від основного спостерігають за малих тріщин. У попередніх дослідженнях [11–15] частоту гармоніки вибирали близькою до частоти основного резонансу, а стохастичну складову описували білим шумом.

Виникнення нелінійних резонансів є якісною ознакою пошкодження типу втомної тріщини [16]. Коливання за таких резонансів суттєво негармонічні через появу в спектрі гармоніки, частота якої збігається з частотою основного резонансу, а амплітуда значно перевищує амплітуди гармонік з основною частотою суперчи субрезонансу. Тому як діагностичні ознаки пошкодження використовують [16, 17] співвідношення між амплітудою домінуючої гармоніки в спектрі коливань (наприклад, $A_{1/2}$ для $\omega_0/\nu = 1/2$, $A_{2/1}$ для $\omega_0/\nu = 2/1$) і амплітудою першої гармоніки A_1 , а також відношення амплітуди точного нелінійного резонансу ($s_{1/2}$, $s_{2/1}$) до амплітуди вимушених коливань непошкодженої системи на тій же частоті (s).

Нові можливості в діагностиці тріщин з'являються, як показали праці [11–15], тоді, коли вимушувальну силу описують адитивною моделлю $f(t) = a \cos \nu t + \varepsilon(t)$, де $\varepsilon(t)$ – стаціонарний випадковий процес. Нелінійність системи призводить до взаємодії детермінованої та випадкової складових, яка характеризується появою нових складових обох типів. Вони в першому наближенні можуть бути описані в межах характеристик першого та другого порядків періодично нестационарних випадкових процесів – математичного сподівання $m(t) = E\xi(t)$ і кореляційної функції $b(t, u) = E\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\xi}(t+u)$, $\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - m(t)$. Ці величини є періодичними за часом $m(t+T) = m(t)$, $b(t+T, u) = b(t, u)$ і можуть бути подані скінченними рядами Фур'є:

$$m(t) = \sum_{k=-N_1}^{N_1} m_k e^{ik\omega_0 t} = m_0 + \sum_{k=-N_1}^{N_1} (m_k^c \cos k\omega_0 t + m_k^s \sin k\omega_0 t), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (2)$$

$$b(t, u) = \sum_{k=-N_2}^{N_2} B_k(u) e^{ik\omega_0 t} = B_0(u) + \sum_{k=-N_2}^{N_2} (B_k^c \cos k\omega_0 t + B_k^s \sin k\omega_0 t), \quad (3)$$

при цьому $m_k = \frac{1}{2}(m_k^c - im_k^s)$, $B_k(u) = \frac{1}{2}(B_k^c(u) - iB_k^s(u))$. Така структура характеристик зумовлена тим, що вимушені коливання тут мають вигляд суми амплітудно- і фазомодульованих коливань [11–15]:

$$\xi(t) = \sum_{k=-N_1}^{N_1} \xi_k(t) e^{ik\omega_0 t}.$$

Тут $\xi_k(t)$ – стаціонарно зв'язані випадкові процеси. Тоді

$$m_k = E\xi_k(t), \quad B_k(u) = \sum_{l \in Z} R_{l, l+k} e^{il\omega_0 t}, \quad R_{lk} = E\overline{\xi_k(t+u)} \xi_l(t), \quad \xi_k(t) = \xi_k(t) - m_k.$$

Виділяючи в характеристиках (2)–(3) ті складові, які зумовлені появою тріщини, можемо їх діагностувати вже на ранніх стадіях розвитку. Зауважимо, що для цього теж можуть бути використані, як у детермінованому випадку, незалежні від часу складові.

Розвиваючи результати, подані в працях [11–15], розглянемо згинні та поздовжні коливання стрижнів прямокутного перерізу з однією крайовою поперечною тріщиною. Тут параметр α визначають за формулою [7]

$$\alpha = \frac{D(h/L, x_T)H(\gamma)}{1 + D(h/L, x_T)H(\gamma)},$$

де L – довжина стрижня; h – його висота; x_T – відстань від початку стрижня до тріщини. Функцію $H(\gamma)$ для поздовжніх коливань визначають формулою [7]:

$$H(\gamma) = 0,6272\gamma^2 - 0,17248\gamma^3 + 5,92134\gamma^4 - 10,70538\gamma^5 + 31,56845\gamma^6 - 67,47602\gamma^7 + 139,12342\gamma^8 - 146,6824\gamma^9 + 92,35521\gamma^{10},$$

а для згинних –

$$H(\gamma) = 0,6295\gamma^2 - 1,0472\gamma^3 + 4,602\gamma^4 - 9,9752\gamma^5 + 20,2948\gamma^6 - 32,9933\gamma^7 + 47,0408\gamma^8 - 40,6933\gamma^9 + 19,6\gamma^{10}.$$

Значення функції $D(h/L, x_T)$ залежить від відносної висоти поперечного перерізу стрижня h/L , розташування тріщини x_T , видів коливань і стрижня. Так, для консольного стрижня за поздовжніх коливань маємо:

$$D(h/L, x_T) = 4 \frac{\pi h}{L} \cos^2 \left[\frac{\pi(2i-1)}{2L} x_T \right],$$

а за згинних –

$$D(h/L, x_T) = 24 \frac{\pi h}{l} \left[S(k_i x_T) - \frac{S(k_i L)}{T(k_i L)} T(k_i x_T) \right]^2,$$

де $S(kx)$, $T(kx)$ – функції Кривола:

$$S(kx) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} kx + \cos kx), \quad T(kx) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} kx + \sin kx),$$

$$k_1 L = 1,875, \quad k_2 L = 4,694, \quad k_3 L = 7,855,$$

а для $i > 3$ маємо:

$$k_i L = \frac{\pi(2i-1)}{2L}.$$

Залежність коефіцієнта α від відносної довжини тріщини γ за поздовжніх і згинних коливань при $L = 0,2$ м, $h = 0,04$ м, $x_T = 0,1$ м показана на рис. 1. Для малих тріщин прирости α є менші від приростів γ . Ситуація вирівнюється за середніх тріщин, а для великих – відносна жорсткість змінюється більше, ніж відносна довжина. Слід також відмітити істотніші зміни коефіцієнта жорсткості за поздовжніх коливань, ніж за згинних.

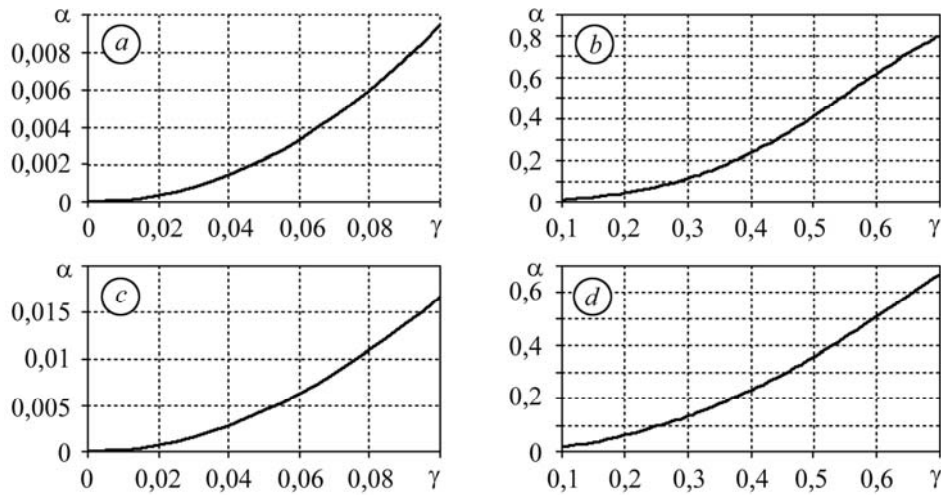


Рис. 1. Зміна відносної жорсткості стрижня за поздовжніх (a, b) та згинних (c, d) коливань: a, c – малі тріщини; b, d – середні і великі тріщини.

Fig. 1. Change of the beam relative rigidity for longitudinal (a, b) and flexural oscillations (c, d): a, c – small crack sizes; b, d – middle and big crack sizes.

Нелінійність коливної системи, яка виникає за появи тріщини, призводить до того, що у вібраційному відгуку за гармонічної вимушувальної сили з'являються вищі гармоніки та субгармоніки. А це означає, що змінюється амплітудно-частотна характеристика системи. При цьому зменшується резонансна частота коливань, з'являються додаткові піки в області частот подвоєних, потроєних тощо, а також субгармонічних.

Для всіх ступенів пошкоджень механічної системи амплітуди коливань за нелінійних резонансів набагато менші, ніж амплітуди коливань за основного резонансу (рис. 2). Тому для виявлення пошкоджень доцільно використовувати величини, що характеризують спотворення коливань, а вони за нелінійних режимів досить суттєві. Це зумовлено появою в спектрі коливань потужної гармоніки з частотою основного резонансу, так званої домінуючої гармоніки [7].

Найчутливішими для виявлення тріщин середніх ($0,1 < \gamma \leq 0,3$) і великих ($\gamma > 0,3$) розмірів є параметри, що визначають нелінійність коливань за субгармонічного резонансу, який за малих пошкоджень ($\gamma \leq 0,1$) не виникає. Водночас супергармонічний резонанс, як зазначалось, спостерігають на початку зародження тріщини, а його характеристики нелінійності уможливають виявлення й малих тріщин. Саме нелінійність вібраційного відгуку взята до уваги під час вибору основної частоти вимушувальної сили у рівнянні (1). Для знаходження розв'язку використали числовий метод Ейлера. Щоб описати вимушувальну силу, застосували квадратурну модель:

$$\eta(t) = \eta_c(t) \cos \omega t + \eta_s(t) \sin \omega t, \quad (4)$$

де частота ω дорівнює частоті основного резонансу поділену на два. Тоді для математичного випадкового процесу $\eta(t)$ отримаємо:

$$m_\eta(t) = m_c^\eta \cos \omega t + m_s^\eta \sin \omega t, \quad m_c^\eta = E\eta_c(t), \quad m_s^\eta = E\eta_s(t).$$

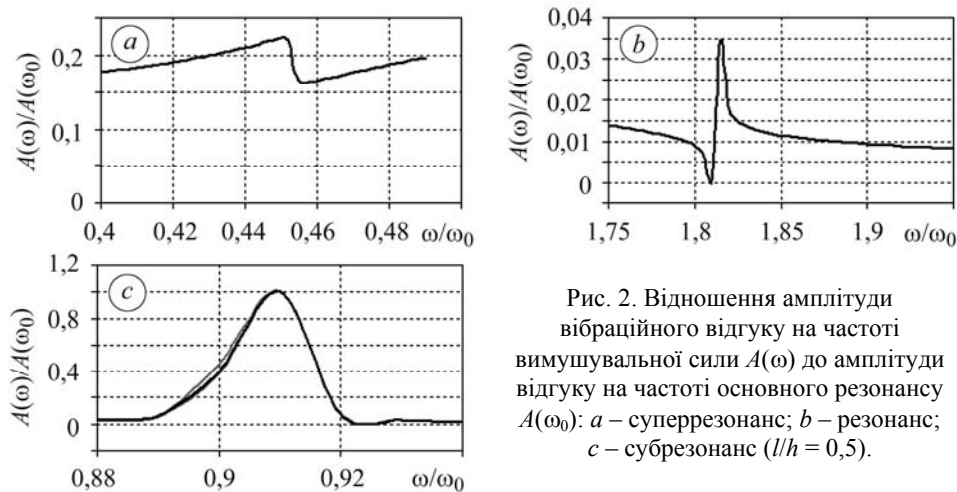


Рис. 2. Відношення амплітуди вібраційного відгуку на частоті вимушувальної сили $A(\omega)$ до амплітуди відгуку на частоті основного резонансу $A(\omega_0)$: a – суперрезонанс; b – резонанс; c – субрезонанс ($l/h = 0,5$).

Fig. 2. Ratio of vibration response amplitude at the frequency of excitation force $A(\omega)$ to response amplitude at the frequency of main resonance $A(\omega_0)$: a – super-resonance; b – resonance; c – sub-resonance ($l/h = 0.5$).

Введемо позначення: $R_c^{(\eta)}(u) = E \overset{\circ}{\eta}_c(t) \overset{\circ}{\eta}_c(t+u)$, $R_s^{(\eta)}(u) = E \overset{\circ}{\eta}_s(t) \overset{\circ}{\eta}_s(t+u)$, $R_{cs}^{(\eta)}(u) = E \overset{\circ}{\eta}_c(t) \overset{\circ}{\eta}_s(t+u)$, $\overset{\circ}{\eta}_c(t) = \overset{\circ}{\eta}_c(t) - m_c$, $\overset{\circ}{\eta}_s(t) = \overset{\circ}{\eta}_s(t) - m_s$. Кореляційна функція $b_\eta(t, u)$ не змінюватиметься за часом, якщо $R_c^{(\eta)}(u) = R_s^{(\eta)}(u)$ і $R_{cs}^{(\eta)}(u) = 0$ (тоді випадковий процес (4) буде періодично нестационарним лише за математичного сподівання). Використовуючи таке подання вимушувальної сили, виконали комп'ютерну симуляцію відгуків $\xi(t)$. При цьому поклали $R_c(u) = D_c e^{-\alpha_c |u|}$, $R_s(u) = D_s e^{-\alpha_s |u|}$ і вибрали такі параметри: $m_c = 1$, $m_s = 0$, $D_c = D_s = 1$, $\alpha_c = \alpha_s = 0,01$, $\beta = 0,1$, $\omega_0 = 2\pi$. Відносна довжина тріщини l/h змінювалася в діапазоні від 0,05 до 0,75 з кроком 0,05.

Симульовані сигнали $\xi(t)$ проаналізували з використанням як методів статистичного аналізу стаціонарних випадкових процесів, так і періодично корельованих. Для виявлення часових періодичних змін моментних функцій використали когерентний метод з передискретизацією. Тоді оцінки періоду знаходимо як точки екстремальних значень функціоналів:

$$\hat{m}(t, \tau) = \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^N \xi(t + n\tau),$$

$$\hat{b}(t, u, \tau) = \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^N [\xi(t + n\tau) - \hat{m}(t + n\tau)][\xi(t + u + n\tau) - \hat{m}(t + u + n\tau)].$$

Графіки залежностей цих величин від пробного періоду τ для певних моментів часу при $\gamma = 0,05$ подані на рис. 3.

Як видно, обидва функціонали мають чітко виражені піки за пробного періоду $\tau = 20$ а.у., який і прийmemo за оцінку періоду нестационарності \hat{T} . Обчислені на її основі компонентні [18] оцінки математичного сподівання, дисперсії та їхніх коефіцієнтів Фур'є показані на рис. 4.

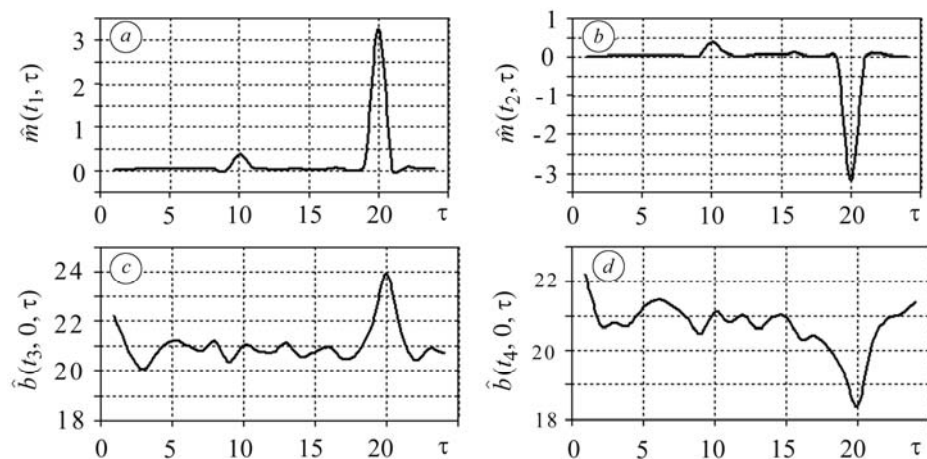


Рис. 3. Функціонали математичного сподівання (*a, b*) та кореляційної функції (*c, d*) залежно від пробного періоду при $\gamma = 0,05$ ($t_1 = 7$ а.у., $t_2 = 17$ а.у., $t_3 = 6$ а.у., $t_4 = 12$ а.у.).

Fig. 3. Mean function (*a, b*) and correlation function (*c, d*) functionals in dependence of the test period at $\gamma = 0.05$ ($t_1 = 7$ a.u., $t_2 = 17$ a.u., $t_3 = 6$ a.u., $t_4 = 12$ a.u.).

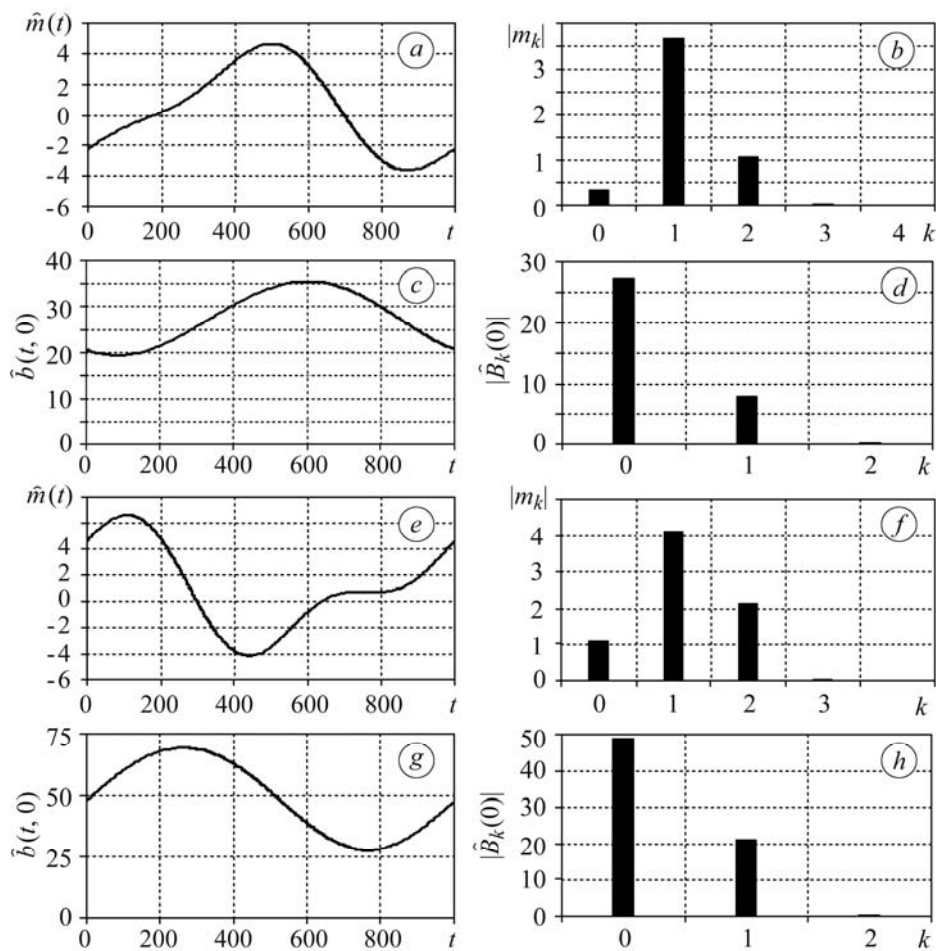


Рис. 4. Оцінки математичного сподівання (*a, e*), дисперсії (*c, g*) та їхніх коефіцієнтів Фур'є (*b, d, f, h*) при $\gamma = 0,05$ (*a-d*) та $\gamma = 0,5$ (*e-h*).

Fig. 4. Estimators of mean function (*a, e*), variance (*c, g*) and their Fourier coefficients (*b, d, f, h*) at $\gamma = 0.05$ (*a-d*) and $\gamma = 0.5$ (*e-h*).

Як бачимо (рис. 4а), амплітуда першої гармоніки математичного сподівання значно перевищує інші гармоніки. Це означає, що коливна система близька до лінійної. На графіку часових змін оцінки дисперсії помітні коливання основного періоду. Відношення мінімальної потужності флуктуаційних коливань на періоді

до максимальної становить $\frac{\hat{b}_{\min}(t,0)}{\hat{b}_{\max}(t,0)} = 0,76$, що можна розглядати як ознаку

того, що сигнал вже відрізняється від стаціонарного. З ростом тріщини все помітнішою стає асиметричність детермінованої складової коливань відносно часу, що пояснюється збільшенням середнього значення математичного сподівання та амплітуди другої гармоніки. За відносної довжини тріщини $\gamma = 0,5$ (рис. 4e–h)

$\frac{|m_2|}{|m_1|} > 0,5$. Значно зросла також стала складова: $\frac{|m_0|}{|m_1|} \approx 0,5$. Суттєво поглиблю-

ються часові зміни оцінки дисперсії. Відмітимо, що за малих і середніх тріщин вони мають гармонічний характер. Амплітуда домінуючої першої гармоніки при $\gamma = 0,5$ трохи менша від половини нульової гармоніки (рис. 4h).

Характер залежності оцінок кореляційних компонентів від зсуву практично не змінюється, проте з ростом довжини тріщини все більше в зникаючих осциляціях помітніша друга гармоніка (рис. 5).

Наведені вище результати обробки симульованих реалізацій свідчать про те, що з ростом тріщини суттєво змінюється імовірнісна структура вібраційного відгуку. В детермінованій складовій – це поява другої гармоніки і ріст її амплітуди, а також сталої складової. Амплітуда першої гармоніки при цьому змінюється порівняно мало. Важливим є те, що внаслідок нелінійних ефектів вібраційний сигнал набуває властивостей періодичної нестационарності другого порядку, яка проявляється вже за малих тріщин.

У часових змінах дисперсії, яка характеризує потужність флуктуаційних коливань, появляється перша гармоніка, амплітуда якої швидко росте зі збільшенням довжини тріщини. Слід відмітити, що з ростом довжини тріщини суттєво зростає й середня потужність флуктуаційних коливань, а також виникає друга гармоніка.

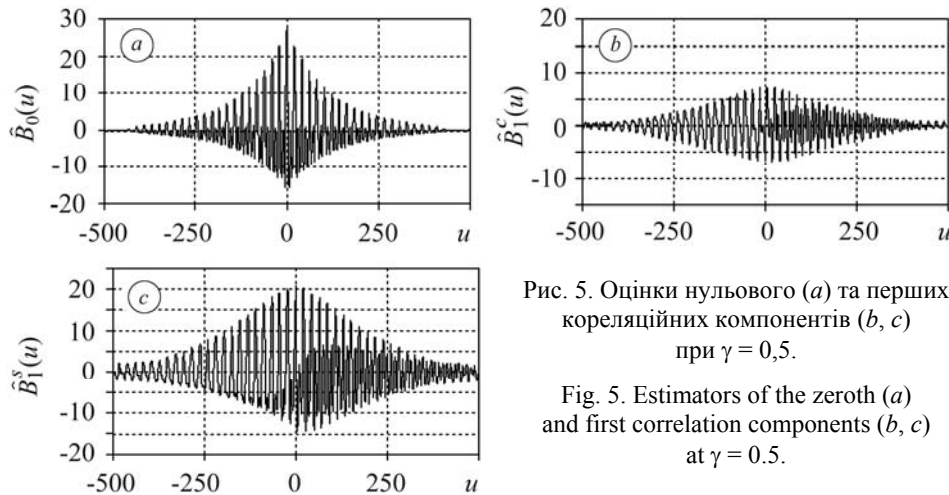


Рис. 5. Оцінки нульового (а) та перших кореляційних компонентів (b, c) при $\gamma = 0,5$.

Fig. 5. Estimators of the zeroth (a) and first correlation components (b, c) at $\gamma = 0.5$.

Виходячи з характеристик детермінованої та стохастичної складових вібраційного відгуку можуть бути сформовані діагностичні ознаки $I_1 = \frac{(|m_0| + |m_2|)}{|m_1|}$

та $I_2 = \frac{(\Delta\hat{B}_0(0)+|\hat{B}_1(0)|)}{\hat{B}_0(0)}$, де $\hat{B}_0(0)$ – оцінка нульового кореляційного компонента за відсутності тріщин. Порівнюючи I_1 та I_2 (рис. 6а, б), робимо висновок, що характеристики нестационарності другого порядку є чутливішими до змін відносної довжини тріщини і з цієї причини ознаки дефектності, сформовані на їх основі, мають переваги порівняно з тими, що формуються на основі характеристик детермінованої складової сигналу.

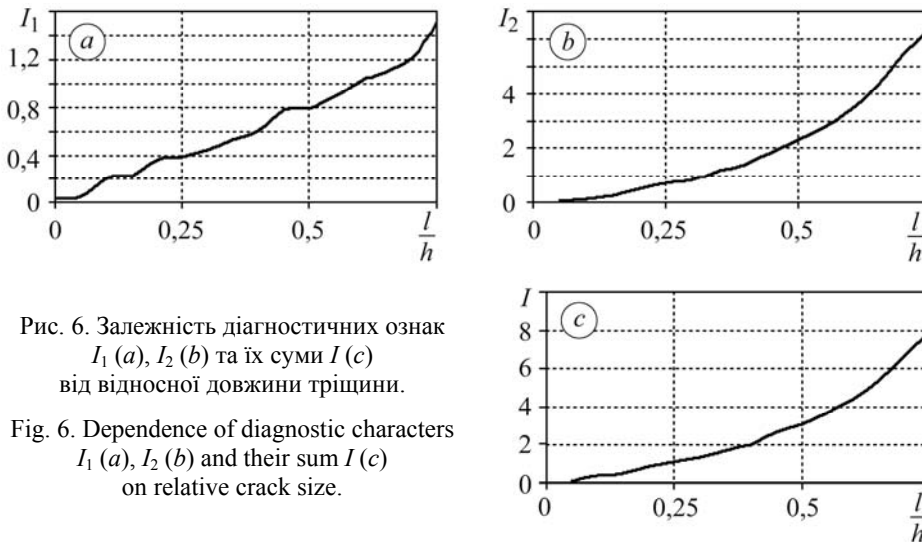


Рис. 6. Залежність діагностичних ознак I_1 (а), I_2 (б) та їх суми I (с) від відносної довжини тріщини.

Fig. 6. Dependence of diagnostic characters I_1 (a), I_2 (b) and their sum I (c) on relative crack size.

Чутливість вібродіагностичних ознак можна поліпшити, сформувавши спільний показник $I = I_1 + I_2$. Залежність його від l/h графічно проілюстрована на рис. 6с.

ВИСНОВКИ

Таким чином, вібраційний відгук від стрижня з втомною тріщиною, на який діє вимушувальна сила у вигляді адитивної суми періодичної детермінованої складової і стаціонарного випадкового процесу, описують періодично корельованим випадковим процесом. Нелінійність, яка виникає з появою тріщини, призводить не тільки до виникнення нових гармонік детермінованої складової, а й до її взаємодії зі стохастичною складовою. Таку взаємодію можна кількісно охарактеризувати за допомогою кореляційних компонентів. Використання діагностичних ознак, побудованих на їх основі, дає можливість виявляти тріщини вже за малих відносних довжин.

РЕЗЮМЕ. На основе численных решений нелинейного дифференциального уравнения второго порядка проанализировано колебание стержня под действием стохастической вынуждающей силы. Установлено, что при появлении трещины колебания приобретают свойства периодической нестационарности. Показано, что в режиме суперрезонанса характеристики нестационарности второго порядка более чувствительны к развитию трещин, чем характеристики детерминированной составляющей. Использование диагностических признаков, построенных на их основе, дает возможность выявлять трещины уже при малых длинах.

SUMMARY. On the base of numerical solutions of non-linear differential equation of the second order the oscillations of a beam loaded by stochastic excitation force are analyzed. It is found that because of crack appearance the oscillations acquire properties of periodic non-stationarity. It is shown that in the case of super-resonance the characteristics of non-stationarity of

the second order are more sensitive to the crack growth than the characteristics of deterministic part. The use of the diagnostic characters built on their base enable the detection of small cracks.

1. *Парис П., Си Дж.* Анализ напряженного состояния около трещины // Прикладные вопросы вязкости разрушения. – М.: Мир, 1968. – С. 64–142.
2. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1985. – 504 с.
3. *Бересневич В. И.* Сопоставительный анализ математических моделей усталостной трещины // Вестник научно-технического развития. – 2009. – № 12 (28). – С. 12–19.
4. *Цыфанский С. Л., Магоне М. А., Ожиганов В. М.* Об использовании нелинейных эффектов для обнаружения трещин в стержневых элементах конструкций // Дефектоскопия. – 1985. – № 3. – С. 77–82.
5. *Матвеев В. В.* К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 1. Продольные колебания, аналитическое решение // Пробл. прочности. – 1997. – № 6. – С. 5–20.
6. *Ройтман А. Б., Александрова Н. Б., Христенко Т. А.* Вибрационная диагностика “дышащих” трещин в изделиях // Техн. диагностика и неразрушающий контроль. – 2000. – № 1. – С. 58–66.
7. *Матвеев В. В., Бовсуновский А. П.* Некоторые аспекты колебаний упругого тела с “дышащей” наплашностью материала // Пробл. прочности. – 2000. – № 5. – С. 44–60.
8. *Krawczuk M. and Ostachowicz W.* Damage indicators for diagnostic of fatigue cracks in structures by vibration measurements – a survey // J. Theor. Appl. Mech. – 1996. – **34**, № 2. – P. 307–326.
9. *Dimarogonas A. D.* Vibration of cracked structures: a state of the art review // Eng. Fract. Mech. – 1996. – **55**. – P. 831–857.
10. *Salawu O. S.* Detection of structural damage through changes in frequency: a review // Eng. Struct. – 1997. – **19**. – P. 718–723.
11. *Модель вібраційного відгуку від тіла з тріщиною / І. Й. Мацько, І. М. Яворський, І. Б. Кравець, В. М. Заяць // Відбір і обробка інформації. – 2009. – № 30 (106). – С. 20–30.*
12. *Вплив розміру тріщини на кореляційну структуру вібраційного сигналу / І. Й. Мацько, І. М. Яворський, І. Б. Кравець, Р. М. Юзефович // Там же. – 2009. – № 31 (107). – С. 18–26.*
13. *Мацько І. Й., Яворський І. М., Кравець І. Б.* Спектральні властивості вібраційного сигналу деталі з тріщиною // Там же. – 2010. – № 32 (108). – С. 26–34.
14. *Мацько І. Й., Яворський І. М., Кравець І. Б.* Дослідження структури вібраційних сигналів механічних систем під час розвитку дефекту // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – **47**, № 1. – С. 29–36.
(*Mats'ko I. I., Kravets' I. B., and Yavors'kyi I. M.* Analysis of the structure of vibration signals from mechanical systems in the process of growth of a defect // Materials Science. – 2011. – **47**, № 1. – P. 26–35.)
15. *Імовірнісна структура сигналів вібрації тіла з тріщиною / І. М. Яворський, І. Б. Кравець, І. Й. Мацько, Р. М. Юзефович // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні. – 2011. – № 45. – С. 452–459.*
16. *Бовсуновский А. П.* Сравнительный анализ нелинейных резонансов механической системы с несимметричной кусочно-линейной характеристикой восстанавливающей силы // Пробл. прочности. – 2007. – № 2. – С. 72–87.
17. *Бовсуновский А. П., Бовсуновский О. А.* Использование нелинейных резонансов для диагностики закрывающихся трещин в стержневых элементах // Там же. – 2010. – № 3. – С. 125–141.
18. *Component covariance analysis for periodically correlated random processes / I. Javorskyj, I. Isayev, J. Majewski, R. Yuzefovych // Signal Processing. – 2010. – 90. – P. 1083–1102.*

Одержано 11.07.2013