

УДК 539.3

ТЕРМОПРУЖНА РІВНОВАГА ТРИШАРОВОГО КРУГОВОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА З ТРІЩИНОЮ

В. М. ЗЕЛЕНЯК

Національний університет "Львівська політехніка"

Методом сингулярних інтегральних рівнянь розв'язано плоскі задачі стаціонарної теплопровідності і термопружності для порожнистого тришарового циліндра з тріщиною. Поперечний переріз циліндра – кругове концентричне кільце з вкладеними в нього такими ж кільцями з іншого матеріалу, внутрішнє з яких містить крайову радіальну тріщину. Поверхні циліндра вільні від навантажень і на них задані температурні умови першого роду. На межі поділу середовищ виконуються умови ідеального теплового і механічного контакту. Числовий розв'язок одержано за задання на внутрішній і зовнішній поверхнях циліндра сталих температур. Обчислено коефіцієнти інтенсивності напружень у вершині крайової тріщини для різних значень теплофізичних і механічних параметрів складників циліндра.

Ключові слова: *тріщина, температурне поле, метод сингулярних інтегральних рівнянь, коефіцієнт інтенсивності напружень, кусково-однорідні тіла.*

Методом сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) розв'язували двовимірні задачі термопружності [1–4] та теорії пружності [5–8] для кусково-однорідних тіл з тріщинами, а також силові задачі для трикомпонентного композита з тріщинами [9–12]. Подано [13–15] коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) для тришарового композита. Під час експлуатації багато конструкцій (трубопроводи, апарати високого тиску, вали турбін тощо) часто знаходяться під дією навантажень, у тому числі й теплових, за яких виконуються умови плоскої задачі. Як розрахункову схему для дослідження їх руйнування використовують кругове композитне кільце з тріщиною. Побудована нижче модель для тришарового кільця з тріщиною має важливе практичне значення для розрахунку термопружного стану в композитних матеріалах за врахування різних концентраторів напружень у них.

Проаналізуємо дію осесиметричного температурного поля в складеному тришаровому концентричному кільці з радіальною крайовою тріщиною. Розв'язок задачі термопружності для розглянутої області шляхом суперпозиції подамо як суму розв'язків двох окремих задач: задачі термопружності для тришарового (без тріщин) складеного кільця за заданих температурних умов на межах кільця та задачі теорії пружності для складеного кільця з тріщиною, на берегах якої прикладені напруження, рівні за значенням і протилежні за знаком до знайдених у першій задачі на лінії тріщини.

Стаціонарне осесиметричне температурне поле довгого порожнистого композитного тришарового циліндра. Розглянемо тришаровий порожнистий круговий циліндр, поперечним перерізом якого є три кругові концентричні кільця з різних матеріалів, що вкладені одне в одне. Позначимо радіус внутрішнього контуру першого (найменшого) кільця через R_0 , радіус контуру спаю між першим і другим кільцем – через R_1 , між другим і третім кільцем – через R_2 і радіус зовнішнього контуру найбільшого кільця – через R_3 (див. схему на рис. 1). Припустимо,

що на внутрішній і зовнішній поверхнях циліндра задані сталі температури T_{0C} і T_{3C} відповідно, а вздовж контурів спаю шарів виконуються умови ідеального теплового контакту. Ввівши відносну координату $\rho = R/R_3$ (R – полярний радіус), рівняння теплопровідності і крайові умови запишемо, згідно з [16], у вигляді

$$\frac{d^2 T_i}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dT_i}{d\rho} = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} T_1 &= T_{0C}, \quad \text{коли } \rho = \rho_0; \\ T_3 &= T_{3C}, \quad \text{коли } \rho = 1; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\lambda_i \frac{dT_i}{d\rho} = \lambda_{i+1} \frac{dT_{i+1}}{d\rho}, \quad T_i = T_{i+1},$$

коли $\rho = 1$, $i = 1, 2$.

Тут $T_i(\rho)$ – температура; λ_i – коефіцієнт теплопровідності внутрішнього ($i = 1$), середнього ($i = 2$) та зовнішнього ($i = 3$) циліндричних шарів.

Розв'язком рівняння (1) є функція

$$T_i(\rho) = A_i + B_i \ln \rho, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Сталі інтегрування A_i , B_i , $i = 1, 2, 3$, визначили підставленням виразів (3) у крайові умови (2):

$$\begin{aligned} A_1 &= T_{0C} - a \ln \rho_0 / b, \quad B_1 = a \ln \rho_0 / b; \\ A_2 &= T_{3C} - a(\lambda_1 / \lambda_3) \ln \rho_0 \ln \rho_2 / b; \quad B_2 = a(\lambda_1 / \lambda_2) \ln \rho_0 / b; \\ A_3 &= T_{3C}; \quad B_3 = a(\lambda_1 / \lambda_3) \ln \rho_0 / b; \end{aligned} \quad (4)$$

$$a = T_{3C} - T_{0C}; \quad b = (\lambda_1 / \lambda_2 - \lambda_1 / \lambda_3) \ln \rho_2 + (1 - \lambda_1 / \lambda_2) \ln \rho_1 - \ln \rho_0.$$

Температурні напруження у тришаровому порожнистому циліндрі. Нехай у розглянутому вище циліндричному тілі діє плоске осесиметричне температурне поле, яке спричиняє плоску осесиметричну деформацію. Його вважаємо відомим із розв'язку відповідної задачі теплопровідності. Запишемо колові і радіальні напруження, а також радіальні переміщення в полярних координатах [16]:

$$\sigma_\theta^i = C_i - \frac{D_i}{\rho^2} + \frac{\alpha_i^t E_i^i}{\rho^2} \int_{\rho_i}^{\rho} T_i(\rho) \rho d\rho - \alpha_i^t E_i^i T_i(\rho); \quad (5)$$

$$\sigma_r^i = C_i + \frac{D_i}{\rho^2} - \frac{\alpha_i^t E_i^i}{\rho^2} \int_{\rho_i}^{\rho} T_i(\rho) \rho d\rho; \quad (6)$$

$$u_r^i = \left[\frac{1}{E_i} (\sigma_\theta^i - \mu_i^i \sigma_r^i) + \alpha_i^t T_i(\rho) \right] R_3 \rho; \quad i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

де C_i , D_i – сталі інтегрування; $E_i^i = E_i / (1 - \mu_i^2)$, $\mu_i^i = \mu_i / (1 - \mu_i)$, $\alpha_i^t = \alpha_i^t / (1 + \mu_i)$, E_i , α_i^t , μ_i – модуль пружності, температурний коефіцієнт лінійного розширення та коефіцієнт Пуассона відповідного циліндричного шару. Вважаємо, що в напрямі твірних циліндра температурні коефіцієнти лінійного розширення шарів-

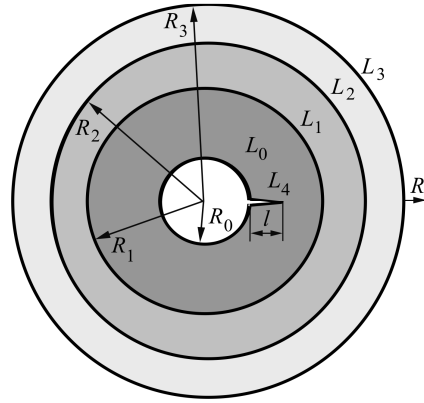


Рис. 1. Геометрія тришарового концентричного кільця з крайовою тріщиною.

Fig. 1. Geometry of a three-layer concentric ring with an edge crack.

складників рівні між собою ($\alpha_1^t = \alpha_2^t = \alpha_3^t$). Загалом, коли не накладена така умова, задачу термопружності для багатошарового циліндричного тіла розкладають на плоску і антиплоску (за відсутності поворотів на нескінченності) задачі термопружності.

Припустимо, що зовнішня і внутрішня поверхні циліндра ненавантажені, а на межах спаю матеріалів відсутній натяг і задані умови ідеального механічного контакту

$$\begin{aligned} \sigma_r^0 &= 0, \text{ коли } \rho = \rho_0; & \sigma_r^3 &= 0, \text{ коли } \rho = 1; \\ \sigma_r^i &= \sigma_r^{i+1}, & u_r^i &= u_r^{i+1}, \text{ коли } \rho = \rho_i, \quad i=1,2. \end{aligned} \quad (8)$$

Сталі інтегрування C_i, D_i ($i=1, 2, 3$) визначимо підставленням виразів (6), (7) у крайові умови (8):

$$C_1 = (F_1 + F_2 / \rho_2^2 - a_{12}) \rho_2^2 / (\rho_1^2 - \rho_2^2); \quad D_1 = -C_1 \rho_1^2; \quad C_2 = F_1; \quad D_2 = F_2; \quad (9)$$

$$C_3 = (a_{31} - (F_1 + F_2 / \rho_3^2 - a_{23} + a_{31}) \rho_3^2) / (\rho_3^2 - 1); \quad D_3 = -C_3 - a_{31},$$

де $F_1 = (P_2 x_2 - P_1 y_2) / (x_2 y_1 - y_2 x_1); \quad F_2 = (P_2 x_1 - P_1 y_1) / (x_2 y_1 - y_2 x_1);$

$$P_1 = \frac{1}{E_3'} \left[\frac{2(a_{31} - a_{23})}{\rho_3^2 - 1} + a_{23}(1 - \mu_3') - a_{33} \right] + \frac{1}{E_2'} \left[a_{22} - a_{23}(\mu_2' - 1) \right] - b_{22} + b_{33};$$

$$P_2 = -\frac{a_{22}}{E_2'} - \frac{1}{E_1'} \left[2a_{12} \left(1 - \frac{\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} - a_{11} \right) \right] - b_{11} + b_{22};$$

$$x_1 = \frac{1 - \mu_2'}{E_2'} + \frac{2 - 1/(\rho_3^2 - 1) - \mu_3'}{E_3'}; \quad y_1 = \left(\frac{2 + \mu_2'}{E_2'} - \frac{1 - 1/(\rho_3^2 - 1) - \mu_3'}{E_3'} \right) / \rho_3^2;$$

$$x_2 = \frac{\mu_1' + 2\rho_1^2 / (\rho_1^2 - \rho_2^2) - 1}{E_1'} + \frac{(\mu_2' - 1)}{E_2'}; \quad y_2 = \left(\frac{1 - 2\rho_1^2 / (\rho_1^2 - \rho_2^2) - \mu_1'}{E_1'} - \frac{1 + \mu_2'}{E_2'} \right) / \rho_2^2;$$

$$a_{12} = \frac{\alpha_1^t E_1'}{\rho_1^2} \int_{\rho_0}^{\rho_1} T_1(\rho) \rho d\rho; \quad a_{23} = \frac{\alpha_2^t E_2'}{\rho_2^2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} T_2(\rho) \rho d\rho; \quad a_{31} = \alpha_3^t E_3' \int_{\rho_2}^1 T_3(\rho) \rho d\rho;$$

$$a_{11} = \alpha_1^t E_1' T_1(\rho_1), \quad b_{11} = \alpha_1^t T_1(\rho_1), \quad a_{22} = \alpha_2^t E_2' T_2(\rho_2),$$

$$b_{22} = \alpha_2^t T_2(\rho_2), \quad a_{33} = \alpha_3^t E_3' T_3(\rho_3), \quad b_{33} = \alpha_3^t T_3(\rho_3); \quad (10)$$

$$\int_{\rho_j}^{\rho} T_j(\rho) \rho d\rho = \frac{1}{2} A_j (\rho^2 - \rho_j^2) + \frac{1}{2} B_j \left[\rho^2 \ln \rho - \rho_j^2 \ln \rho_j - \frac{1}{2} (\rho^2 - \rho_j^2) \right],$$

Якщо у рівностях (5)–(7) замінити E_i', α_i^t, μ_i' на E_i, α_i^t, μ_i відповідно, то отримаємо вирази для напружень і переміщень у тонкому тришаровому круговому концентричному кільці в умовах плоского напруженого стану, зумовленого плоским стаціонарним температурним полем.

Розрахунок коефіцієнтів інтенсивності напружень. Дослідимо тришаровий круговий циліндр, у якому внутрішній контур L_0 , контури спаю L_1, L_2 і зовнішній контур L_3 – концентричні кола радіусів R_0, R_1, R_2, R_3 відповідно. Нехай такий циліндр послаблений одним крайовим тунельним розрізом – крайовою радіальною термоізолюваною тріщиною L_4 (береги якої під час деформування не контактують) довжини l уздовж осі Ox , яка виходить однією вершиною на внутрішній контур циліндра L_0 (рис. 1). У такому тілі термоізолювана тріщина, як ві-

домо, не збурює плоске осесиметричне температурне поле й відповідних компонентів температурних напружень. Визначивши за формулами (5), з урахуванням співвідношень (3), (4), (9), (10), нормальні колові напруження σ_θ^1 на лінії тріщини (задача 1) і приклавши їх з протилежним знаком до берегів тріщини, прийдемо так до силової задачі для кругового композитного циліндра з крайовою тріщиною. Для цієї задачі одержали систему чотирьох інтегральних рівнянь першого і другого роду [17] з невідомими функціями на контурах L_1, L_2, L_3, L_4 , використовуючи підхід [18, 19], який дає змогу вилучити внутрішній коловий контур кільця L_0 :

$$A_n Q_n(\tau_n) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int [R_{nk}(t_k, \tau_n) Q_k(t_k) dt_k + S_{nk}(t_k, \tau_n) \overline{Q_k(t_k)} \overline{dt_k}] = 0,$$

$$\tau_n \in L_n, \quad n = \overline{1, 2};$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int [R_{nk}(t_k, \tau_n) Q_k(t_k) dt_k + S_{nk}(t_k, \tau_n) \overline{Q_k(t_k)} \overline{dt_k}] +$$

$$+ \delta_{n3} \left(a_3 \frac{ds_3}{d\tau_3} / R_0 - \frac{1}{2\pi i} \frac{M_3 R_0^2}{(\tau_3 - \xi_3)} \cdot \frac{d\tau_3}{d\tau_3} \right) = P_n(\tau_n), \quad \tau_n \in L_n, \quad n = \overline{3, 4};$$

$$P_3(\tau_3) = 0, \quad P_4(\tau_4) = -\sigma_\theta^1, \quad (11)$$

де

$$R_{nk}(t_k, \tau_n) = R_{nk}^1(t_k, \tau_n) + R_0^2 e^{i\alpha_k} \times$$

$$\times \left\{ \frac{B_n}{\zeta_n(\eta_n \bar{\zeta}_k - R_0^2)} - C_n \left\{ \frac{R_0^2 - \zeta_k \bar{\zeta}_k}{\zeta_k (R_0^2 - \eta_n \zeta_k)^2} + e^{-2i\alpha_n} \frac{d\tau_n}{d\tau_n} \times \left[\frac{1}{\eta_n (\eta_n \zeta_k - R_0^2)} + \frac{R_0^2 (R_0^2 - 3\eta_n \zeta_k) + 2\eta_n \zeta_k (\eta_n)^2}{\zeta_k (\eta_n)^2 (\eta_n \zeta_k - R_0^2)^3} (\zeta_k \bar{\zeta}_k - R_0^2) \right] \right\} \right\};$$

$$S_{nk}(t_k, \tau_n) = S_{nk}^1(t_k, \tau_n) + R_0^2 e^{-i\alpha_k} \times \left\{ \frac{B_n (R_0^2 - \zeta_k \bar{\zeta}_k)}{\zeta_k (R_0^2 - \eta_n \zeta_k)^2} - \right.$$

$$\left. - C_n \left\{ \frac{\eta_n \bar{\eta}_n (R_0^2 - 2\eta_n \zeta_k) + 3\eta_n \zeta_k R_0^2 - 2R_0^4}{(\eta_n)^3 (R_0^2 - \eta_n \zeta_k)^2} + \frac{1}{\zeta_k (\eta_n)^2} \frac{d\tau_n}{d\tau_n} e^{-2i\alpha_n} + \frac{1}{\eta_n (\eta_n \zeta_k - R_0^2)} \right\} \right\};$$

$$R_{nk}^1(t_k, \tau_n) = \frac{B_n}{\zeta_k - \eta_n} - \frac{C_n}{\zeta_k - \eta_n} \frac{d\tau_n}{d\tau_n} e^{-2i\alpha_n},$$

$$S_{nk}^1(t_k, \tau_n) = -C_n \left[\frac{1}{\zeta_k - \eta_n} - e^{-2i\alpha_n} \frac{d\tau_n}{d\tau_n} \frac{\zeta_k - \eta_n}{(\zeta_k - \eta_n)^2} \right];$$

$$k = \overline{1, N}, \quad n = \overline{1, N} \quad (|\zeta_k| > R_0, \quad |\eta_n| > R_0); \quad \zeta_k = t_k e^{i\alpha_k} + z_k^0; \quad \eta_n = \tau_n e^{i\alpha_n} + z_n^0,$$

$$A_1 = i[1 + \chi_1 + \Gamma_{01}(1 + \chi_0)]/2, \quad B_1 = \chi_1 - \Gamma_{01}\chi_0, \quad C_1 = 1 - \Gamma_{01}, \quad \Gamma_{01} = E_0/E_1,$$

$$A_2 = i[1 + \chi_2 + \Gamma_{12}(1 + \chi_1)]/2, \quad B_2 = \chi_2 - \Gamma_{12}\chi_1, \quad C_2 = 1 - \Gamma_{12}, \quad \Gamma_{12} = E_1/E_2,$$

$$B_n = 1, \quad C_n = -1 \quad (n = \overline{3, 4}); \quad \chi_i = 3 - 4\mu_i, \quad i = 0, 1, 2.$$

Числовий розв'язок системи інтегральних рівнянь (11) отримано методом механічних квадратур [20], коли на берегах тріщини прикладені напруження $P_4(\tau_4) = -\sigma_\theta^1$, визначені із виразу (5). При цьому тут застосовано наближений

підхід числового розв'язування інтегральних рівнянь для визначення КІН крайової тріщини [20].

Залежності безрозмірних КІН K_1/K_0 ($K_0 = \alpha_1^t E_1' T_{0C} \sqrt{l}$) від відносної довжини тріщини l/R_3 одержали, коли $T_{0C}/T_{3C} = 3$, $R_0/R_3 = 0,6$; $(R_1 - R_0)/R_3 = 0,07$; $(R_2 - R_1)/R_3 = 0,28$; $(R_3 - R_2)/R_3 = 0,05$, для двох варіантів компонентів складеного тришарового циліндра (рис. 2).

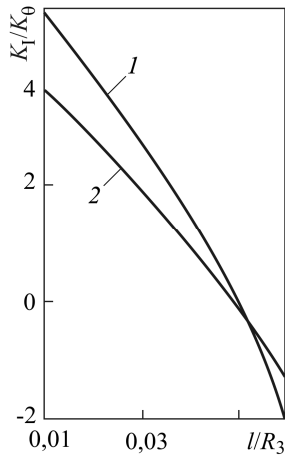


Рис. 2. Залежність безрозмірного КІН K_1/K_0 від параметра l/R_3 : крива 1 – $E_1/E_2 = 1/1,3$, $E_1/E_3 = 1/1,1$, $\alpha_1^t/\alpha_2^t = 0,25$, $\alpha_1^t/\alpha_3^t = 0,5$, $\lambda_1/\lambda_2 = 0,06$, $\lambda_1/\lambda_3 = 0,4$; крива 2 – $E_1/E_2 = 1/1,1$, $E_1/E_3 = 1/1,3$, $\alpha_1^t/\alpha_2^t = 0,5$, $\alpha_1^t/\alpha_3^t = 0,25$, $\lambda_1/\lambda_2 = 0,4$, $\lambda_1/\lambda_3 = 0,06$.

Fig. 2. Dependence of dimensionless SIF K_1/K_0 on parameter l/R_3 : curve 1 – $E_1/E_2 = 1/1.3$, $E_1/E_3 = 1/1.1$, $\alpha_1^t/\alpha_2^t = 0.25$, $\alpha_1^t/\alpha_3^t = 0.5$, $\lambda_1/\lambda_2 = 0.06$, $\lambda_1/\lambda_3 = 0.4$; curve 2 – $E_1/E_2 = 1/1.1$, $E_1/E_3 = 1/1.3$, $\alpha_1^t/\alpha_2^t = 0.5$, $\alpha_1^t/\alpha_3^t = 0.25$, $\lambda_1/\lambda_2 = 0.4$, $\lambda_1/\lambda_3 = 0.06$.

Аналіз числових результатів свідчить про таке. Якщо на внутрішній поверхні тришарового циліндра задана вища стала температура, ніж на зовнішній, то зі зростанням довжини внутрішньої крайової радіальної тріщини до жорсткішого ($E_1 < E_2$) шару циліндра з більшим температурним коефіцієнтом лінійного розширення ($\alpha_1^t < \alpha_2^t$) КІН K_1 зменшується. При цьому, якщо вершина тріщини наближається до межі поділу шарів, то в її околі виникають стискальні нормальні напруження і береги тріщини контактуватимуть ($K_1 < 0$), що в цій задачі не враховували. Однак такий результат теж можна використати, щоб отримати розв'язок задачі за сукупної дії силового навантаження і температурного поля, яка не призведе до контакту берегів тріщини.

ВИСНОВКИ

Застосовано підхід, за яким вдається зменшити порядок вихідної системи СІР задачі термопружності, а отже, ефективніше одержати її розв'язок, а також розглянути випадок, коли тріщина виходить на край отвору тришарового кругового кільця.

РЕЗЮМЕ. Методом сингулярных интегральных уравнений решены плоские задачи стационарной теплопроводности и термоупругости для полого трехслойного цилиндра с трещиной. Поперечное сечение цилиндра – круговое концентрическое кольцо с вложенными в него такими же кольцами из другого материала, внутреннее из которых содержит краевую радиальную трещину. Поверхности цилиндра свободны от усилий и на них заданы температурные условия первого рода. На границе раздела сред выполняются условия идеального теплового и механического контакта. Численное решение получено, когда на внутренней и внешней поверхностях цилиндра заданы неодинаковые постоянные температуры. Вычислены коэффициенты интенсивности напряжений в вершине краевой трещины для различных значений теплофизических и механических параметров составных компонентов цилиндра.

SUMMARY. Plane problems of steady-state heat conduction and thermoelasticity for a hollow three-layer cylinder with a crack are solved by the singular integral equation method. The cross-section of the cylinder is a circular concentric three-layer ring with a radial edge crack

at the inner boundary. On the cylindrical surfaces the heat exchange is realized with the outer medium under the first kind temperature conditions and the cylinder boundary is stress-free. It is assumed that there are conditions of ideal heat and mechanical contacts at the interface between two different cylinders. Numerical solution in the case when unequal constant temperatures are given on the inner and outer cylindrical surfaces was obtained. Stress intensity factors at the crack tip are determined in the case of an edge crack for different physical and geometrical parameters of the components of the composite cylinder.

1. Зеленьяк В. М. Термопружна взаємодія двокомпонентного кругового включення і тріщини в пластині // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2012. – **48**, № 3. – С. 40–45.
(Zelenyak V. M. Thermoelastic interaction of a two-component circular inclusion with a crack in the plate // Materials Science. – 2012. – **48**, № 3. – P. 301–307.)
2. Зеленьяк В., Мартиняк Р., Слободян Б. Температурні напруження у кусково-однорідній трикомпонентній області з тріщиною // машинознавство. – 2007. – № 11. – С. 13–17.
3. Зеленьяк В., Слободян Б. Моделювання термопружного двовимірного стану спаяних різнорідних півплощин із включеннями та тріщинами // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2010. – Вип. 12. – С. 94–101.
4. Саврук М. П., Зеленьяк В. М. Термопружний стан двокомпонентного порожнистого циліндра з крайовими радіальними тріщинами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1994. – **30**, № 4. – С. 76–80.
(Savruk M. P. and Zelenyak V. M. Thermoelastic state of a two-component hollow cylinder with edge radial cracks // Materials Science. – 1994. – **30**, № 4. – P. 470–474.)
5. Зеленьяк В., Слободян Б. Напруження в пластині з тріщиною і двокомпонентним круглим включенням за дії розтягу // машинознавство. – 2007. – № 2. – С. 23–26.
6. Зеленьяк В., Мартиняк Р., Слободян Б. Напруження в спаяних різнорідних півплощинах з включенням і тріщиною за дії розтягу // Вісник НУ “Львівська політехніка”. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2008. – № 625. – С. 54–58.
7. Xiao Z. M. Stress intensity factor for a Griffith crack interacting with a coated inclusion // Int. J. Frac. – 2001. – **108**. – P. 193–205.
8. Саврук М. П., Тимошук Н. В., Прокопчук І. В. Напряженное состояние композитного двухкомпонентного кольца с трещинами // Проблемы прочности. – 1988. – № 6. – С. 27–31.
9. Erdogan F. and Gupta G. D. Layered composites with an interface flaw // Int. J. Solids and Struct. – 1971. – **7**, № 8. – P. 1089–1107.
10. Sih G. C. Handbook of stress-intensity factors. – Bethlehem: Lehigh University Press, 1974. – **2**. – 406 p.
11. Hilton P. D. and Sih G. C. A laminate composite with a crack normal to the interfaces // Int. J. Solids and Struct. – 1971. – **7**, № 8. – P. 913–930.
12. Shindo Y. and Atsumi A. A laminate composite with an infinite row of parallel cracks normal to the interfaces // Int. J. Eng. Sci. – 1974. – **12**, № 9. – P. 743–757.
13. Dhaliwal R. S. Two coplanar cracks in an infinitely long elastic strip bonded to semiinfinite elastic planes // Int. J. Eng. Sci. – 1973. – **11**, № 5. – P. 489–500.
14. Ratwani M. and Gupta G. D. Interaction between parallel cracks in layered composites // Int. J. Solids and Struct. – 1974. – **10**, № 7. – P. 701–708.
15. Сулим Г. Т., Грилицкий Д. В., Белокур И. П. Влияние подкрепляющих полуплоскостей на коэффициенты интенсивности напряжений у концов трещины в полосе // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1976. – **12**, № 5. – С. 70–75.
16. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. – К.: Наук. думка, 1970. – 240 с.
17. Зеленьяк В. М. Інтегральні рівняння двовимірних задач термопружності для тришарової кільцевої області з тріщинами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2015. – **51**, № 2. – С. 129–134.
18. Панасюк В. В., Саврук М. Плоские задачи теплопроводности и термоупругости для тел с трещинами // Успехи механики. – 1984. – **7**, № 2. – С. 75–115.
19. Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук І. В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – К.: Наук. думка, 1989. – 248 с.
20. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.

Одержано 15.12.2014