

УДК 621.319:519.22

## ІНВАРІАНТНИЙ КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ ВІБРАЦІЙ ПІДШИПНИКА КОЧЕННЯ З ДЕФЕКТАМИ НА ЗОВНІШНЬОМУ ТА ВНУТРІШНЬОМУ КІЛЬЦЯХ

І. Й. МАЦЬКО<sup>1</sup>, І. М. ЯВОРСЬКИЙ<sup>2</sup>, Р. М. ЮЗЕФОВИЧ<sup>1</sup>, В. Б. ШЕВЧИК<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;

<sup>2</sup> Інститут телекомунікацій Технологічно-природничого університету, Бидгощ, Польща

Методами векторних періодично корельованих випадкових процесів проаналізовано вібрації підшипника кочення, симульовані за його стохастичною динамічною моделлю у вигляді системи нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку з періодично змінними коефіцієнтами. Виявлено, що лінійні і квадратичні інваріанти кореляційної тензор-функції цього класу випадкових процесів підвищують ефективність виявлення дефектів, дають змогу розділити дефекти на зовнішньому та внутрішньому кільцях, дослідити їх просторові властивості, визначити місцезнаходження. Встановлено характерні зміни у просторово-часовій структурі інваріантів з розвитком дефекту.

**Ключові слова:** підшипник кочення, горизонтальна і вертикальна вібрації, векторний періодично корельований випадковий процес, інваріанти кореляційного тензора, розділення та локалізація дефектів.

Вібраційні явища у підшипниках кочення зумовлені нелінійністю сил контакту робочих поверхонь кілець підшипника та тіл кочення, зазорами між тілами кочення та кільцями, поверхневою нерівністю кілець тощо. Сили, які породжують їх, змінні в часі. У підшипниках кочення тіла кочення контактують як із зовнішнім, так і з внутрішнім кільцями. У математичній моделі елементи підшипника розглядають як пружину з демпфуванням, а тіла кочення – як нелінійні пружини. Сили контакту  $F_{\varphi_j}(\xi_1, \xi_2)$  у точці  $(\xi_1, \xi_2)$ , спричинені тілом кочення, положення якого описує кут  $\varphi_j$ , записують так [1–3]:

$$F_{\Theta_j} = k(\xi_1 \sin \varphi_j + \xi_2 \cos \varphi_j)^{3/2}.$$

Рівняння руху точок на кільці підшипника з урахуванням інерційних сил, сили демпфування та сили тяжіння тоді буде [1–3]:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} + 2\beta \frac{d\xi_1}{dt} + k \sum_{j=1}^{N_k} \left[ \xi_1 \sin \varphi_j + \xi_2 \cos \varphi_j - \Pi_j \right]^{3/2} \sin \varphi_j &= P + F \cos \omega t, \\ m \frac{d^2 \xi_2}{dt^2} + 2\beta \frac{d\xi_2}{dt} + k \sum_{j=1}^{N_k} \left[ \xi_1 \sin \varphi_j + \xi_2 \cos \varphi_j - \Pi_j \right]^{3/2} \cos \varphi_j &= F \sin \omega t, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $m$  – сумарна маса вала та внутрішнього кільця;  $k$  – коефіцієнт жорсткості кільця;  $P = mg$  – сила тяжіння;  $F$  – сила дисбалансу, породжена обертанням вала;  $\beta$  – коефіцієнт демпфування;  $N_k$  – кількість тіл кочення;  $\Pi_j$  – функція, яка описує форму кілець підшипника та розміри дефектів на них. З розв'язків системи рівнянь (1)

виявили [2] характерні особливості гармонічного складу вібрацій за наявності розподілених дефектів, зокрема, внутрішнього радіального кліренса, хвильових нерівностей поверхонь зовнішнього та внутрішнього кілець. Для опису цих нерівностей вибрали гармонічну функцію. Властивості горизонтальних та вертикальних вібрацій для бездефектних підшипників та з локальними дефектами на зовнішньому та внутрішньому кільцях описували функцією

$$P_j = \begin{cases} \frac{A + \varepsilon_A}{2} \left( 1 + \cos \frac{\pi(\varphi_j - \varphi_d)}{\Delta\varphi} \right) + \varepsilon_\omega, & |\varphi_j - \varphi_d| \leq \Delta\varphi, \\ \varepsilon_\omega, & |\varphi_j - \varphi_d| > \Delta\varphi, \end{cases} \quad (2)$$

де  $\varepsilon_A$  – рівномірно розподілена на інтервалі  $[-0,25A, 0,25A]$  випадкова величина;  $\varphi_d$  – кут, під яким знаходиться дефект;  $\Delta\varphi$  – його кутова ширина;  $A$  – розмір дефекту;  $\varepsilon_\omega$  – стаціонарний білий шум. Симулювали за таких параметрів: маса вала  $m = 0,6$  kg, модуль Юнга для сталі  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Pa, частота обертання вала  $\nu = 80$  Hz, радіус внутрішнього кільця підшипника  $r = 0,023$  m, зовнішнього  $R = 0,045$  m, радіус тіл кочення  $r_b = 0,00398$  m, їх кількість  $N_k = 8$ .

Результати статистичної обробки реалізацій, одержаних методом періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП) [3], засвідчили, що з появою дефекту на внутрішньому та зовнішньому кільцях підшипника кочення і горизонтальний, і вертикальний складники вібрації набувають властивостей періодичної нестационарності другого порядку, що проявляється в поведінці оцінок дисперсій за часом: дві чіткі вершини. Така нестационарність зумовлена взаємодією стохастичного й детермінованого складників вібрації, оскільки система диференціальних рівнянь другого порядку, яка їх описує, нелінійна. Оскільки періодична нестационарність вібросигналу виникає тільки за появи дефекту, цей факт слід використовувати для оцінки його розвитку, сформувавши ознаки, які визначають міру нестационарності другого порядку. Характерні риси дефектів проявляються в кореляційно-спектральній структурі сигналу. За дефекту зовнішнього кільця у стохастичному складнику присутні потужні модуляції гармонік з частотами, кратними частоті перекочування тіл кочення по зовнішньому кільцю, а за дефекту внутрішнього – гармоніка з частотами, кратними частоті перекочування по внутрішньому. Ефективним інформаційно-діагностичним показником стану підшипника є гармонічний склад оцінок дисперсії. Якщо дефект не виникає, вищі гармоніки фактично відсутні, а з його появою амплітудний спектр досить широкий, що свідчить про ударні флуктуаційні зміни сигналу. Форми амплітудних спектрів оцінок дисперсії для обох випадків відрізняються мало, проте у першому спектр дещо ширший, а амплітуди суттєво більші. За наведеними вище ознаками важко оцінити просторові властивості вібрації, без яких складно розв'язати задачу про локалізацію дефектів, тому важливий сумісний аналіз вертикального та горизонтального її складників. Тут доцільна векторна ПКВП-модель. Фізичні величини, що її характеризують, зокрема, переміщення, швидкість, прискорення, є векторами. Слід також підкреслити, що основною перевагою векторного статистичного аналізу є можливість ввести в розгляд інваріантні величини, які характеризують стан об'єкта незалежно від системи координат, в якій вимірюють [4–7].

Під час векторного аналізу вібрацій підшипникових вузлів у першу чергу звертають увагу на їх траєкторії на площині  $O\xi_1\xi_2$ , які будували за розміру дефекту  $A = 4$   $\mu\text{m}$ , кута, під яким він знаходиться,  $\varphi_d = 5\pi/6$  і середньоквадратичного значення жорсткості  $\sigma_{\varepsilon_\omega}^2 = 10^{-12}$   $\text{m}^2$ . Зрозуміло, що для бездефектного підшипника та за відсутності сил дисбалансу цей рух повинен відбуватися по колу. Через жорсткість поверхонь кілець не вдається повністю відтворити рух вала за

період, а стохастичний складник викликає хаотично симетричну траєкторію. Відмітимо, що у цьому випадку потужність стохастичного складника становить 50% від потужності детермінованого. Інша ситуація, коли на зовнішньому кільці підшипника з'являється дефект. Якщо тіло кочення набігає на нього, вся система виходить зі стану рівноваги, через певний проміжок часу повертається в початковий стан, після чого відбувається наступний удар. Частота таких ударів відповідає частоті перекошування тіл кочення по зовнішньому кільцю. Для внутрішнього кільця, оскільки дефект рухається разом з ним, удари, які відповідають зіткненню дефекту з тілом кочення, зафіксували по всьому колу. Частота таких зіткнень дорівнює частоті перекошування тіл кочення по внутрішньому кільцю підшипника.

Побудуємо тепер траєкторію руху за оцінками математичних сподівань вертикального та горизонтального складників вібрацій, враховуючи найзначущі їх гармоніки [3] (рис. 1). За відсутності дефекту (рис. 1a) траєкторії знаходяться на ділянці, обмеженій двома кривими, близькими до концентричних кіл. В іншому випадку, на зовнішньому кільці підшипника під час зіткнення тіл кочення з дефектом рух вала стає різко напрямленим (рис. 1b). За рухомого дефекту внутрішнього кільця тіла кочення зіткнуться з ним в усіх напрямках (рис. 1c).

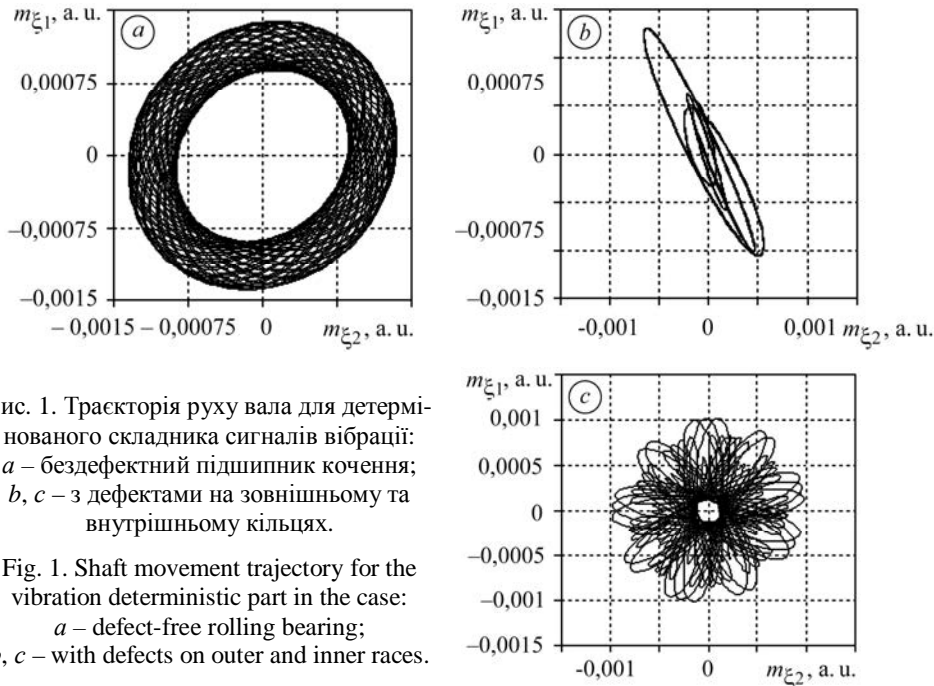


Рис. 1. Траєкторія руху вала для детермінованого складника сигналів вібрації: *a* – бездефектний підшипник кочення; *b, c* – з дефектами на зовнішньому та внутрішньому кільцях.

Fig. 1. Shaft movement trajectory for the vibration deterministic part in the case: *a* – defect-free rolling bearing; *b, c* – with defects on outer and inner races.

Подібні висновки одержали під час аналізу траєкторій, побудованих на основі стохастичних складників. Якщо підшипник без дефекту, стохастичні складники вібраційних сигналів не містять жодних викидів і траєкторія руху хаотично симетрична. Якщо зовнішнє кільце з дефектом, вони мають значні викиди, напрям яких вказує на місце його знаходження. Якщо дефект рухомий, стохастичні складники містять суттєві викиди по всьому колу, які відповідають зіткненням тіл кочення з дефектом на внутрішньому кільці підшипника.

Проаналізуємо тепер властивості оцінок лінійних і квадратичних інваріантів кореляційної тензор-функції вібрації підшипника. Значення інваріантів визначатимемо за співвідношеннями [8, 9]

$$\mathcal{F}_1(t, u) = \mathcal{F}_{\xi_1}^{\xi_1}(t, u) + \mathcal{F}_{\xi_2}^{\xi_2}(t, u), \quad \mathcal{D}(t, u) = \mathcal{F}_{\xi_1 \xi_2}^{\xi_1 \xi_2}(t, u) - \mathcal{F}_{\xi_2 \xi_1}^{\xi_2 \xi_1}(t, u),$$

$$\mathcal{K}_2(t, u) = \mathcal{B}_{\xi_1}^{\xi}(t, u) \mathcal{B}_{\xi_2}^{\xi}(t, u) - \frac{1}{4} \left[ b_{\xi_1 \xi_2}^{\xi}(t, u) + b_{\xi_2 \xi_1}^{\xi}(t, u) \right]^2,$$

де авто- та взаємкореляційні функції обчислюємо за компонентним методом

$$\mathcal{B}_{\xi_p}^{\xi}(t, u) = \sum_{k=-L_2}^{L_2} \mathcal{B}_k^{\xi(\xi_p)}(u) e^{ik \frac{2\pi}{T_i^{\xi}} t}, \quad p = \overline{1, 2},$$

$$\mathcal{B}_{\xi_p \xi_q}^{\xi}(t, u) = \sum_{k=-L_2}^{L_2} \mathcal{B}_k^{\xi(\xi_p \xi_q)}(u) e^{ik \frac{2\pi}{T_i^{\xi}} t}, \quad p, q = \overline{1, 2}, \quad p \neq q,$$

при цьому

$$\mathcal{B}_k^{\xi(\xi_p)}(u) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \left[ \xi_p(nh) - m_{\xi_p}^{\xi}(nh) \right] \left[ \xi_p(nh) - m_{\xi_p}^{\xi}(nh) \right] e^{-ik \frac{2\pi}{T_i^{\xi}} nh},$$

$$\mathcal{B}_k^{\xi(\xi_p \xi_q)}(u) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \left[ \xi_p(nh) - m_{\xi_p}^{\xi}(nh) \right] \left[ \xi_q(nh) - m_{\xi_q}^{\xi}(nh) \right] e^{-ik \frac{2\pi}{T_i^{\xi}} nh},$$

$$m_{\xi_p}^{\xi}(u) = \sum_{k=-L_1}^{L_1} e^{ik \frac{2\pi}{T_i^{\xi}} nh} \left[ \frac{1}{K} \sum_{r=0}^{K-1} \xi_p(rh) e^{-ik \frac{2\pi}{T_i^{\xi}} rh} \right].$$

Тут  $T_i^{\xi}$  – оцінки періодів нестационарності для дефектів на зовнішньому ( $i = 1$ ) та внутрішньому ( $i = 2$ ) кільцях;  $L_s$ ,  $s = \overline{1, 2}$  – числа, що визначають номери найвищих гармонік у математичному сподіванні ( $s = 1$ ) та кореляційній функції ( $s = 2$ );  $K = \Theta/h$  – кількість елементів вибірки;  $\Theta$  – довжина реалізації;  $h$  – крок дискретизації. Оцінки періодів  $T_i^{\xi}$  знайдені в праці [3] як точки екстремальних значень когерентних кореляційних функціоналів. Для зовнішнього кільця  $T_1^{\xi} = 352,7$  а.о., а для внутрішнього  $T_2^{\xi} = 280,6$  а.о.

Побудували (рис. 2) графіки оцінок лінійного інваріанта  $\mathcal{K}_1(t, u)$ , обчислених при  $u = 0$ . Як і для справного підшипника, залежність  $\mathcal{K}_1(t, 0)$  від часу  $t$  має вигляд флуктуацій (рис. 2a). Часова поведінка оцінок  $\mathcal{K}_1(t, 0)$  з появою дефектів змінюється. В обох випадках на періоді вони вже мають два чіткі пікові значення (рис. 2b, c), при цьому висота перших піків суттєво більша. Слід також відмітити, що за дефекту зовнішнього кільця обидва піки гостріші, а їх максимуми більш ніж удвічі перевищують відповідні за дефекту внутрішнього.

Залежності оцінок  $\mathcal{K}_1(t, u)$  від зсуву  $u$  для обох дефектів осциляційно-заникальні, і відрізняються тільки амплітудами осциляцій: якщо дефект на зовнішньому кільці, вони вдвічі більші.

Часову залежність оцінки інваріанта  $\mathcal{B}(t, u)$ , оскільки  $b_{\xi_1 \xi_2}^{\xi}(t, 0) - b_{\xi_2 \xi_1}^{\xi}(t, 0) = 0$ , доцільно аналізувати для зсуву, коли вона набуває екстремальних значень. Виявили, що для бездефектного підшипника часові оцінки  $\mathcal{B}(t, u_1)$  змінюються флуктуаційно, а для зовнішнього кільця з дефектом – з невеликими горбами. Для внутрішнього кільця з дефектом форма оцінок  $\mathcal{B}(t, u_1)$  чітко виражена.

У змінах оцінок  $\hat{D}(t, u)$  за зсувами  $u$  для бездефектного підшипника і з дефектом зовнішнього кільця не зафіксували характерних закономірностей, проте для внутрішнього кільця з дефектом вони мають чіткі викиди. Отже, інваріант  $D(t, u)$  можна розглянути як індикатор руху дефекту.

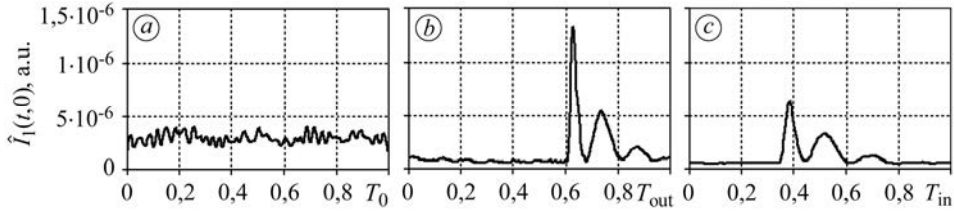


Рис. 2. Перший лінійний інваріант вібраційних сигналів підшипника кочення при  $u = 0$ :  $a$  – бездефектний;  $b, c$  – з дефектами на зовнішньому та внутрішньому кільцях.

Fig. 2. The first linear invariant of the rolling bearing vibration for  $u = 0$ :  $a$  – in the case of defect-free rolling bearing;  $b, c$  – with defects on outer and inner races.

Місце знаходження дефекту по-різному впливає на властивості оцінок квадратичного інваріанта  $I_2(t, u)$ , та, особливо, оцінок параметрів  $\hat{\kappa}_{1,2}(t, u) = \frac{1}{2} \left[ \hat{\kappa}_1(t, u) \pm \sqrt{\hat{\kappa}_1^2(t, u) - 4I_2(t, u)} \right]$ , які визначають форми кривих другого порядку [4, 5] (рис. 3).

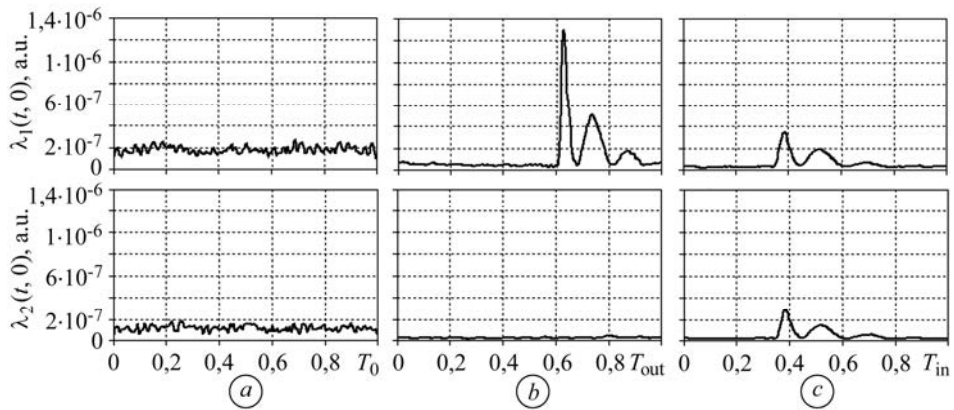


Рис. 3. Оцінки інваріантів  $\hat{\kappa}_1(t, 0)$  і  $\hat{\kappa}_2(t, 0)$ :  $a$  – бездефектний підшипник кочення;  $b, c$  – з дефектами на зовнішньому та внутрішньому кільцях.

Fig. 3. Estimators of invariants  $\hat{\kappa}_1(t, 0)$  and  $\hat{\kappa}_2(t, 0)$ :  $a$  – in the case of defect-free rolling bearing;  $b, c$  – with defects on outer and inner races.

Для бездефектного підшипника ці оцінки за часом змінюються флуктуаційно (рис. 3a). Форми часових змін оцінки  $\hat{\kappa}_1(t, 0)$  для зовнішнього (рис. 3b) і внутрішнього (рис. 3c) кілець з дефектами подібні, однак, у першому випадку амплітуди викидів більш ніж утричі вищі, ніж у другому. Порівняно незначні часові зміни оцінки  $\hat{\kappa}_2(t, 0)$  для зовнішнього кільця з дефектом (рис. 3b), а для внутрішнього дуже подібні до змін оцінки  $\hat{\kappa}_1(t, 0)$  (рис. 3c). Їх коливання практично синхронні з невеликою різницею в значеннях. Про це свідчить також гармонічний

склад оцінок цих параметрів (рис. 4). Для визначення амплітуд гармонік використали формули

$$B_0^{(\lambda_j)}(u) = \frac{1}{M_s + 1} \sum_{r=0}^{M_s} \mathcal{K}_j(rh, u), \quad j = \overline{1, 2},$$

$$B_k^{(\lambda_j)}(u) = \frac{1}{M_s + 1} \sum_{r=0}^{M_s} \mathcal{K}_j(rh, u) e^{-ik \frac{2\pi}{M_s + 1} r},$$

де  $T_s = (M_s + 1)h$ ,  $s = \overline{1, 2}$ . Отже, для бездефектного підшипника оцінки  $\mathcal{K}_1(t, 0)$  і  $\mathcal{K}_2(t, 0)$  мають лише один значущий компонент – нульовий (рис. 4a). Для зовнішнього кільця з дефектом серед значущих компонентів оцінки  $\mathcal{K}_2(t, 0)$ , на відміну від  $\mathcal{K}_1(t, 0)$ , є теж лише нульовий. При цьому значення цього компонента найменше і складає всього 0,2 від значення нульового за відсутності дефекту (рис. 4b). Для внутрішнього кільця з дефектом значущими для оцінок  $\mathcal{K}_1(t, 0)$  і  $\mathcal{K}_2(t, 0)$  є понад десять компонентів (рис. 4c).

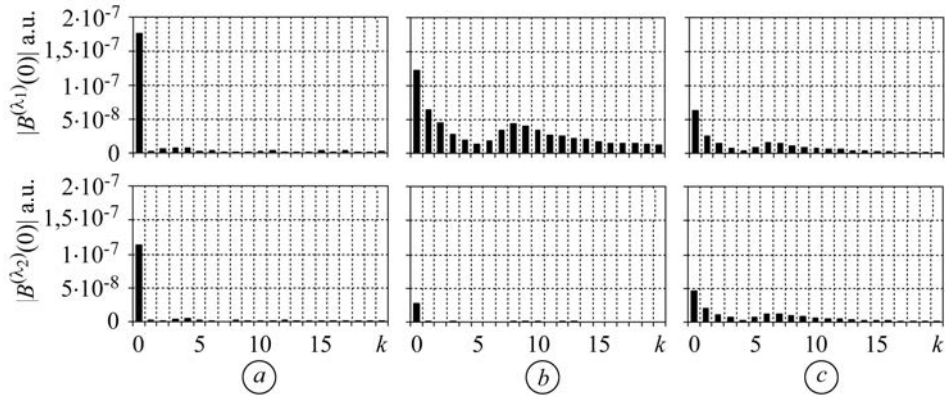


Рис. 4. Коефіцієнти Фур'є оцінок інваріантів  $\mathcal{K}_1(t, 0)$  і  $\mathcal{K}_2(t, 0)$  для бездефектного підшипника кочення (a), а також з дефектами на зовнішньому (b) та внутрішньому (c) кільцях;  $k$  – номери коефіцієнтів.

Fig. 4. Fourier coefficients for estimators of invariants  $\mathcal{K}_1(t, 0)$  and  $\mathcal{K}_2(t, 0)$  in the case of defect-free rolling bearing (a), rolling bearing with faulty outer (b) and faulty inner races (c);  $k$  – coefficient numbers.

Різниця у часовій поведінці параметрів  $\mathcal{K}_1(t, 0)$  і  $\mathcal{K}_2(t, 0)$  для різних дефектів чітко проявляється й у формах кривих другого порядку. Для бездефектного підшипника вони близькі до кіл. З появою дефекту на зовнішньому кільці переходять у еліпси. Якщо обчислити кут, який утворює власний базис кореляційної тензор-функції з початковим [4, 5], то побачимо, що орієнтація великої осі еліпсів вказує на місце знаходження дефекту на зовнішньому кільці. Для дефекту на внутрішньому кільці, тобто для рухомого, криві другого порядку матимуть концентричні кола.

Реалізації горизонтальних і вертикальних вібрацій отримали для розміру дефекту  $A = 4 \mu\text{m}$ . Аналіз реалізацій, симульованих для інших його розмірів, виявив чутливість інваріантів до їх зміни. Побудували (рис. 5a–c) графіки часових змін оцінок лінійного інваріанта  $\mathcal{K}_1(t, 0)$  для дефекту зовнішнього кільця з різними розмірами. Порівнюючи їх з поданими на рис. 2, дійшли висновку, що з рос-

том розміру дефекту форма часової залежності змінюється мало, однак, суттєво – глибина часових змін. Зокрема, для дефекту розміром  $3 \mu\text{m}$  відношення мінімального значення  $\mathcal{K}_1(t,0)$  за період до максимального становить  $0,28$ , а при  $A = 5 \mu\text{m}$  зменшується до  $0,05$ .

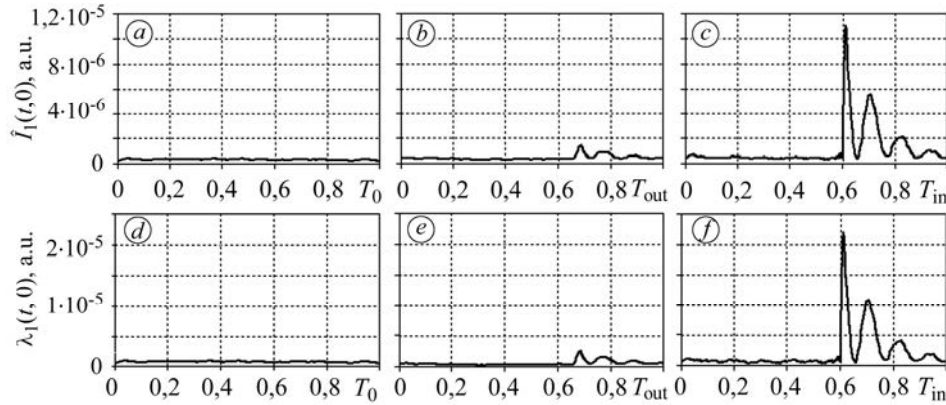


Рис. 5. Залежність оцінки першого лінійного інваріанта (a–c) та параметра кривих другого порядку  $\lambda_1(t,u)$  (d–f) від часу при  $u = 0$  для підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці: a, d – розмір дефекту  $2 \mu\text{m}$ ; b, e –  $3$ ; c, f –  $5$ .

Fig. 5. Dependences of the first linear invariant of the rolling bearing vibration (a–c) and of the second order curves parameter  $\lambda_1(t,u)$  (d–f) on time at  $u = 0$  for the case of rolling bearing with faulty outer race: a, d – defect size  $2 \mu\text{m}$ ; b, e –  $3$ ; c, f –  $5$ .

Подібно зі збільшенням розмірів дефекту змінюються і часові оцінки  $\mathcal{D}(t,u)$ . Амплітуда більшого їх викиду за період кочення, якщо  $A = 5 \mu\text{m}$ , у 4 рази перевищує амплітуду, коли  $A = 4 \mu\text{m}$ .

Особливо чутливі до зміни розмірів дефекту оцінки параметрів  $\mathcal{K}_1(t,0)$  і  $\mathcal{K}_2(t,0)$ . Якщо він малий, параметр  $\mathcal{K}_1(t,0)$  змінюється флуктуаційно (рис. 5d–f). Зі збільшенням розміру дефекту на часовій його залежності з'являються дві вершини. Відношення  $\mathcal{K}_{1\min}(t,0)/\mathcal{K}_{1\max}(t,0)$  для дефекту розміром  $3 \mu\text{m}$  становить  $0,16$ , зі збільшенням розміру максимальне значення суттєво зростає і при  $A = 5 \mu\text{m}$  стає у 8 разів більше, ніж при  $A = 3 \mu\text{m}$ . Відношення  $\mathcal{K}_{1\min}(t,0)/\mathcal{K}_{1\max}(t,0) = 0,04$ .

Досить наочно ілюструють вплив розмірів дефекту на квадратичні інваріанти кореляційної тензор-функції графіки кривих другого порядку (рис. 5b–c):  $\lambda_1(t,u)s^2 + \lambda_2(t,u)v^2 = 1$ . Для малих дефектів вони близькі до кіл. Зі збільшенням розмірів кола трансформуються в еліпси, при цьому більша вісь еліпса вказує на місце знаходження дефекту на зовнішньому кільці. За подальшого розвитку дефекту еліпси ще сильніше видовжуються.

Інформативною є діаграма, яка визначає зміну з розвитком дефекту кореляційних зв'язків напряму [4–6]:

$$\hat{b}_\beta(t,u) = \lambda_1(t,u) \cos^2 \beta + \lambda_2(t,u) \sin^2 \beta,$$

де  $\beta$  – кут між вибраним напрямком і власною системою координат кореляційного тензора. Залежності величини  $\hat{b}_\beta(t,u)$  від кута  $\beta$  для різних моментів часу і розмі-

рів дефекту подано на рис. 6*d-f*. Як бачимо, за малих дефектів кореляційні зв'язки в усіх напрямках змінюються однаково. Зі збільшенням їх розміру діаграми викривляються, при цьому чітко окреслюється той напрям, де вони змінюються найсуттєвіше. Цей напрям, як і великі осі еліпса, вказує на місце знаходження дефекту на зовнішньому кільці. За подальшого його розвитку діаграми ще сильніше витягуються у бік його розташування.

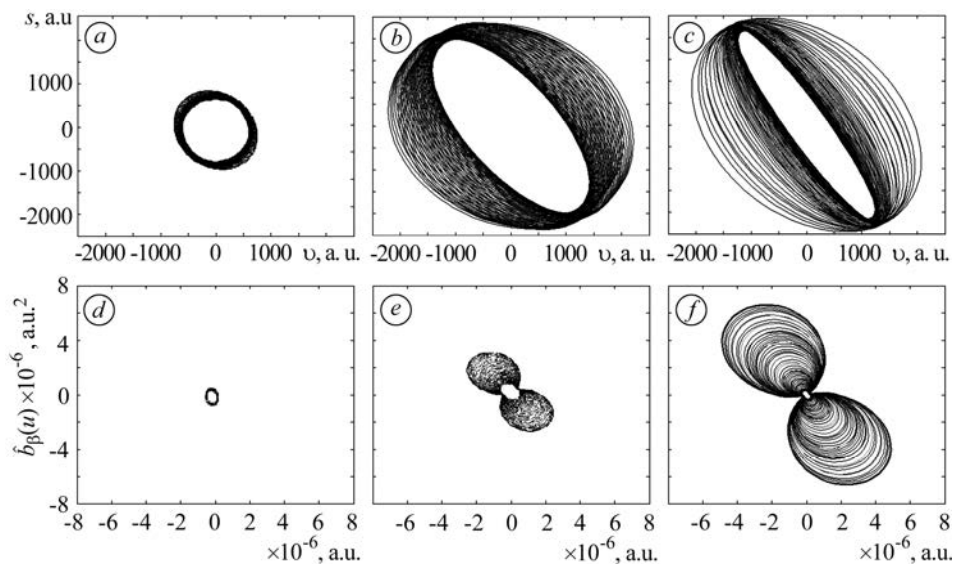


Рис. 6. Криві другого порядку (а-с) та зміна кореляційних зв'язків за напрямком (d-f) при  $u = 0$  для підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці розміром:  $a, d - 2 \mu\text{m}$ ;  $b, e - 3$ ;  $c, f - 5$ .

Fig. 6. The second order curves (a-c) and changes of correlation with respect to direction (d-f) for rolling bearing vibrations  $u = 0$  for the case of rolling bearing with faulty outer race:  $a, d - 2 \mu\text{m}$ ;  $b, e - 3$ ;  $c, f - 5$ .

Підсумовуючи, зауважимо, що векторна ПКВП-модель дає можливість ввести для оцінки властивостей інваріантні вібрацій величини, значення яких не залежать від системи вимірюваних координат. Аналіз горизонтальних і вертикальних вібрацій підшипника кочення з використанням лінійних і квадратичних інваріантів кореляційної тензор-функції виявив, що за такого підходу також підвищується ефективність знаходження дефектів, вдається легко розділити рухомі й нерухомі дефекти, визначити екстремальні значення кореляційної тензор-функції за ортогональними напрямками. Криві другого порядку, побудовані за власними значеннями симетричної частини кореляційної тензор-функції, а також діаграми, які визначають зміни кореляційних зв'язків за напрямком, ефективні для виявлення місця розташування дефектів.

**РЕЗЮМЕ.** Методами векторних періодически коррелированных случайных процессов проанализированы вибрации подшипника качения, смоделированные на основе его стохастической динамической модели в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодически изменяющимися коэффициентами. Выявлено, что линейные и квадратичные инварианты корреляционной тензор-функции этого класса случайных процессов повышают эффективность обнаружения дефектов, позволяют разделить их на внешнем и внутреннем кольцах, исследовать пространственные особенности, определить место нахождения. Установлены характерные изменения пространственно-временной структуры вследствие развития дефекта.



*SUMMARY.* The analysis of rolling bearing vibrations obtained using computer simulation of its stochastic dynamic model in the form of the system of nonlinear differential equations of the second order with periodically varying coefficients by the methods for vectorial periodically correlated random processes is provided. It is shown that linear and quadratic invariants of correlation tensor-function of this class of random signals enhance the effectiveness of faults detection, allows dividing them on the internal and external races, investigate their spatial properties and determine their location. The features of the spatial-time structure changes due to the defect growth are investigated.

1. *Nataraj C. and Harsha S. P.* The effect of bearing cage run-out on the non-Linear dynamics of a rotating shaft // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* – 2008. – **13**. – P. 822–838.
2. *Fault Diagnosis of a Rotor Bearing Systems Using Response Surface Method / P. K. Konkar, S. P. Harsha, P. Kumar, and S. C. Sharmal // European I. Mechanics, A Solids.* – 2009. – **28**. – P. 841–857.
3. *Стохастична динамічна модель сигналів вібрації підшипника кочення та їх аналіз / І. Й. Мацько, І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, З. Закжевські // Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2013. – **49**, № 4. – С. 119–128.  
(*Mats'ko I. I., Yavors'kyi I. M., Yuzefovych R. M., Zakrzewski Z.* Stochastic dynamic model of the vibration signals of rolling bearing and their analysis // *Materials Science.* – 2014. – **49**, № 4. – С. 549–559.)
4. *Яворський І. М.* Математичні моделі та аналіз стохастичних коливань – Львів: Фіз.-мех. ін-т НАН України, 2013. – 802 с.
5. *Інваріантний кореляційний аналіз векторних періодично корельованих випадкових процесів / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько, І. Б. Кравець // Відбір і обробка інформації.* – 2011. – № 35 (111). – С. 22–31.
6. *Рожков В. А.* Методы вероятностного анализа океанологических процессов. – Л.: Гидрометеиздат, 1974. – 280 с.
7. *Кочин В. Е.* Векторное исчисление и начало тензорного исчисления. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – 424 с.
8. *Яворський І. М., Юзефович Р. М., Шевчик В. Б.* Оцінювання кореляційних інваріантів періодично нестационарних процесів // *Відбір і обробка інформації.* – 2013. – № 39. – С. 15–23.
9. *Компонентный корреляционный анализ векторных периодически нестационарных случайных процессов / И. Н. Яворский, Р. М. Юзефович, И. И. Мацько, В. Б. Шевчик // Изв. вузов. Радиоэлектроника.* – 2014. – **57**, № 9. – С. 29–41.

*Одержано 06.10.2015*