

ДИФРАКЦІЯ SH-ХВИЛІ НА МІЖФАЗНОМУ ДЕФЕКТІ У З'ЄДНАННІ ПРУЖНОГО ШАРУ З ПІВПРОСТОРОМ

Д. Б. КУРИЛЯК, З. Т. НАЗАРЧУК, М. В. ВОЙТКО, Я. П. КУЛИНИЧ

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Розв'язано задачу про дифракцію пружної SH-хвилі на дефекті, утвореному на межі жорсткого з'єднання пружного шару з півпростором. Дефект змодельовано імпедансною півплощиною, на якій задані крайові умови мішаного типу. Методом Вінера–Гопфа отримано точний розв'язок задачі, який використано для дослідження поведінки коефіцієнтів трансформації мод падаючої хвилі на вершині дефекту, енергетичних коефіцієнтів відбивання та проходження хвиль у різні підобласті структури як функцій геометричних та фізико-механічних параметрів задачі. Фізично проаналізовано формування поля змішень на вільній поверхні шару для діагностування краю дефекту.

Ключові слова: *дифракція, дефект, імпеданс, метод Вінера–Гопфа, пружний шар.*

A problem of diffraction of elastic SH-wave on the interface defect formed on of the rigid joint of the elastic layer and a half-space is solved. The defect is modeled by a semi-infinite plane with the impedance boundary mixed-mode conditions on the surface. Using the Wiener–Hopf technique the rigorous solution is obtained. The behavior of the coefficients of transformation of modes of a scattered wave at the tip of the defect, the energy coefficients of reflection/transmission and the displacement fields on the free surface of the layer depending on the parameters of the problem is investigated.

Keywords: *diffraction, defect, impedance, Wiener–Hopf technique, elastic layer.*

Вступ. Неруйнівний контроль матеріалів та елементів конструкцій на наявність дефектів – невід'ємний складник технологічного процесу їх виготовлення та подальшої експлуатації [1]. Серед методів діагностування шаруватих з'єднань матеріалів чільне місце посідають ті, що ґрунтуються на використанні пружних хвиль. Теоретичною їх базою є розв'язки відповідних крайових задач дифракції. З'єднання шарів моделюють хвилеводами, а дефекти (порушення цілісності з'єднання) – областю, на поверхні якої задані відповідні крайові умови Неймана або Діріхле [2–5]. Відомі [6–8] загальні підходи дослідження поширення пружних хвиль у хвилевідних структурах. Розв'язано [4] задачу про дифракцію SH-хвилі на міжфазній тріщині, утвореній на межі жорсткого з'єднання пружного шару з півпростором. Розглянуто напівнескінченну та скінченну тріщини. Однак для практичних задач важливо виявляти не лише тріщини, але й порушення структури матеріалу, що передують їх зародженню. Такі області пошкоджень моделюють імпедансними поверхнями і використовують мішані крайові умови для їх опису [9–13]. Одним із найефективніших для розв'язування таких задач є метод Вінера–Гопфа, який часто використовують для вивчення дифракції електромагнетних хвиль [14–17]. Нижче цим методом вперше розв'язано задачу про дифракцію пружної SH-хвилі на напівнескінченній імпедансній поверхні плоского шару, з'єданого з півпростором, щоб зрозуміти фізичні особливості формування поля

зміщень на його вільній від напружень протилежній поверхні і виявити інформаційні ознаки виникнення пошкодження з'єднань.

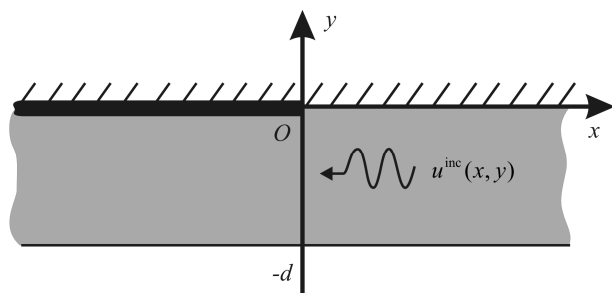


Рис. 1. Дефект на межі з'єднання пружного шару з півпростором.

Fig. 1. Defect at the boundary of the elastic layer and the half-space joint.

Формулювання задачі. Нехай пружний шар $P: \{x \in (-\infty, \infty), y \in (-d, 0), z \in (-\infty, \infty)\}$ у декартовій системі координат $O(x, y, z)$ з'єднаний з півпростором $y > 0$. Імпедансна півплощина $\Gamma: \{x \in (-\infty, 0), y = 0, z \in (-\infty, \infty)\}$ на поверхні з'єднання є моделлю його дефекту (рис. 1). Нехай таку структуру опромінює нормальна SH-мода $u^{\text{inc}}(x, y)$ шару P , що поширюється у від'ємному напрямі до осі Ox . Вважаємо, що залежність від часу є гармонічна $e^{-i\omega t}$, і цей множник надалі опускаємо. Крім того, припускаємо, що півпростір відіграє роль інтерфейсу, і пружні хвилі крізь межу його з'єднання з шаром не поширюються. За таких умов дифракцію хвилевідної моди на дефекті описує одна скалярна функція $u = u(x, y)$, яка пов'язана з полем зміщень $\mathbf{u} \equiv \vec{e}_z u(x, y)$ і задовольняє рівняння Гельмгольца

$$\partial_x^2 u(x, y) + \partial_y^2 u(x, y) + k^2 u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in P, \quad (1)$$

крайову умову імпедансного типу на півплощині Γ

$$\partial_y u^{\text{tot}}(x, y) + \eta u^{\text{tot}}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (2)$$

де η – імпеданс ($\text{Im}\eta \leq 0$), що характеризує зв'язок між напруженням і зміщенням на півплощині Γ , умову відсутності напружень на вільній поверхні шару

$$\partial_y u^{\text{tot}}(x, y) = 0, \quad y = -d; \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (3)$$

а також умову жорсткого з'єднання шару з півпростором

$$u^{\text{tot}} = 0, \quad y = 0; \quad x \in (0, \infty), \quad (4)$$

де $u^{\text{tot}} = u + u^{\text{inc}}$, u – невідоме дифраговане поле, u^{inc} – падаюче поле,

$$u^{\text{inc}} = u^{\text{inc}}(x, y) = e^{\gamma_j x} \sin(\beta_j y), \quad (5)$$

$\beta_j = \pi(2j-1)/2d$, $j=1, 2, 3, \dots$; $\gamma_j = \sqrt{\beta_j^2 - k^2}$, $\text{Re}\gamma_j > 0$; $k = k' + ik''$ – хвильове число ($k', k'' > 0$, $k' \gg k''$); $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$, де c – швидкість поширення поперечної хвилі в матеріалі шару, уявна частина хвильового числа характеризує її загасання під час поширення вздовж шару, λ – довжина поперечної хвилі, ω – кругова частота.

Єдиність розв'язку дифракційної задачі (1)–(4) забезпечували вибором класу функцій, що зникають на нескінченності, та умовою Мейкснера на вершині дефекту:

$$u \sim \rho^\delta, \quad \partial u / \partial y \sim \rho^{-(1-\delta)}, \quad \text{коли} \quad \rho = [x^2 + y^2]^{1/2} \rightarrow 0, \quad (6)$$

де ρ – відстань до вершини дефекту у локальній системі координат; $0 < \delta \leq 1/2$.

Зауважимо, що в крайовій умові (2) імпеданс η розглядали як дійсний параметр, що характеризує пошкодженість з'єднання; його граничне значення $\eta \rightarrow \infty$ вказує на відсутність пошкодження, а $\eta \rightarrow 0$ – на утворення тріщини.

Зведення задачі до рівняння Вінера–Гопфа. Розглянемо трансформанту Фур'є дифрагованого поля

$$U(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{i\alpha x} dx, \quad \alpha = \sigma + i\tau. \quad (7)$$

Застосовуючи перетворення (7) до рівняння (1), отримаємо:

$$\partial_y^2 U(\alpha, y) - \gamma^2 U(\alpha, y) = 0. \quad (8)$$

Тут $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - k^2}$. Вибір вітки γ визначає умова випромінювання $\text{Re } \gamma > 0$; також справедлива рівність $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \alpha^2}$; функція $U(\alpha, y)$ – регулярна у смузі $\Pi: \{-\tau_0 < \tau < \tau_0\}$, де $\tau_0 \leq \min\{\text{Im } k, \text{Re } \gamma_1\}$, $\text{Re } \gamma_1 < \text{Re } \gamma_j$, $j > 1$.

Далі вводимо такі позначення:

$$U(\alpha, y) = U^+(\alpha, y) + U^-(\alpha, y), \quad U'(\alpha, y) = U'^+(\alpha, y) + U'^-(\alpha, y), \quad (9)$$

де

$$U^+(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} u(x, y) e^{i\alpha x} dx, \quad U^-(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 u(x, y) e^{i\alpha x} dx; \quad (10)$$

$$U'^+(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \partial_y u(x, y) e^{i\alpha x} dx, \quad U'^-(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \partial_y u(x, y) e^{i\alpha x} dx. \quad (11)$$

Тут $U^+(\alpha, y)$, $U'^+(\alpha, y)$ та $U^-(\alpha, y)$, $U'^-(\alpha, y)$ – функції, регулярні відповідно у верхній ($\tau > -\tau_0$) та нижній ($\tau < \tau_0$) півплощинах змінної α .

Беручи до уваги позначення (10), (11) і (7), крайові умови (2), (3) запишемо у просторі Фур'є-трансформант:

$$U'^-(\alpha, 0) + \eta U^-(\alpha, 0) = \frac{i\beta_j}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)}, \quad (12)$$

$$U'(\alpha, -d) = 0, \quad (13)$$

де $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \partial_y u^{\text{inc}}(x, 0) e^{i\alpha x} dx = -\frac{i\beta_j}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)}$. Тут $U'^-(\alpha, 0)$ та $U^-(\alpha, 0)$ – транс-

форманти Фур'є відповідно поля напружень та зміщень на поверхні дефекту Γ ; $U'(\alpha, -d) = 0$ – трансформанта поля напружень на нижній грані шару $y = -d$.

Загальний розв'язок рівняння (8) подамо у вигляді

$$U(\alpha, y) = B(\alpha) e^{\gamma y} + C(\alpha) e^{-\gamma y}, \quad (14)$$

де $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ – невідомі функції, які визначимо з крайових умов (12), (13).

Продиференціювавши вираз (15) за змінною y , з умови (13) знайдемо:

$$C(\alpha) = B(\alpha) e^{-2\gamma d}. \quad (15)$$

Врахувавши вираз (16), запишемо:

$$U'(\alpha, y) = \gamma B(\alpha) e^{-\gamma y} (1 - e^{-2\gamma(d-y)}). \quad (16)$$

Беручи до уваги подання (9), з рівності (17) для $y = 0$ отримаємо:

$$B(\alpha) = \frac{U'^+(\alpha, 0) + U'^-(\alpha, 0)}{\gamma(1 - e^{-2\gamma d})}. \quad (17)$$

Далі, застосувавши вираз (17), шукану функцію (14) подамо так:

$$U(\alpha, y) = (U'^+(\alpha, 0) + U'^-(\alpha, 0)) \frac{e^{\gamma y} (1 + e^{-2\gamma(d+y)})}{\gamma (1 - e^{-2\gamma d})}. \quad (18)$$

Використавши інтегральне перетворення Фур'є до крайової умови (4) і доповнивши інтервал до повного ($-\infty < x < \infty$), дістанемо:

$$U^-(\alpha, 0) = \frac{U'^+(\alpha, 0) + U'^-(\alpha, 0)}{\gamma} \frac{1 + e^{-2\gamma d}}{1 - e^{-2\gamma d}}. \quad (19)$$

Виразивши $U'^-(\alpha, 0)$ через $U^-(\alpha, 0)$ з останньої рівності і підставивши одержаний вираз у формулу (12), прийдемо до функціонального рівняння Вінера–Гопфа:

$$M(\alpha)U'^+(\alpha, 0) + \frac{i\beta_j M(\alpha)}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)} - \bar{U}^-(\alpha, 0) = 0, \quad \alpha \in \Pi. \quad (20)$$

Тут $\bar{U}^-(\alpha, 0) = d^{-1}U^-(\alpha, 0)$. Характеристична функція

$$M(\alpha) = \frac{\text{ch}(\gamma d)}{\gamma d \text{sh}(\gamma d) + \bar{\eta} \text{ch}(\gamma d)} \quad (21)$$

є парною і мероморфною у комплексній площині α ; у смузі Π вона регулярна, а за її межами має прості нулі та полюси. Коли $|\alpha| \rightarrow \infty$, справедлива асимптотична оцінка $M(\alpha) = O(\alpha^{-1})$; $\bar{\eta} = d\eta$.

Необхідний вираз для трансформанти Фур'є поля змішень тепер запишемо так:

$$U(\alpha, y) = \left[U'^+(\alpha, 0) - \bar{\eta} \bar{U}^-(\alpha, 0) + \frac{i\beta_j}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)} \right] \frac{\text{ch}(\gamma(y+d))}{\gamma \text{sh}(\gamma d)}. \quad (22)$$

Розв'язання рівняння Вінера–Гопфа. Перший крок до розв'язання рівняння (20) полягає у факторизації функції $M(\alpha)$ у вигляді

$$M(\alpha) = M_+(\alpha)M_-(\alpha), \quad (23)$$

де функції $M_+(\alpha)$ і $M_-(\alpha)$ – регулярні і не мають нулів відповідно у верхній ($\tau > -\tau_0$) та нижній ($\tau < \tau_0$) півплощинах. Позначимо через $\pm i\gamma_{nc}$ та $\pm i\gamma_{ns}$ нулі та полюси функції $M(\alpha)$, де

$$\gamma_{nc} = d^{-1} \sqrt{4^{-1} \pi^2 (2n-1)^2 - k^2 d^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (24)$$

$$\gamma_{ns} = d^{-1} \sqrt{\varphi_n^2 - k^2 d^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (25)$$

Тут φ_n – корені трансцендентного рівняння

$$\varphi \sin \varphi - \bar{\eta} \cos \varphi = 0. \quad (26)$$

У таблиці наведено перші десять коренів φ_n рівняння (26) для різних значень параметра $\bar{\eta}$, отримані числово зі застосуванням методу Ньютона.

Значення коренів характеристичного рівняння (27)

φ_n	$\bar{\eta} = 0$	$\bar{\eta} = 0,2$	$\bar{\eta} = 1$	$\bar{\eta} = 1,8$	$\bar{\eta} = 6$	$\bar{\eta} = -0,2$	$\bar{\eta} = -1$	$\bar{\eta} = -1,8$	$\bar{\eta} = -6$
φ_1	0,000	0,433	0,860	1,045	1,350	-0,463i	-1,2i	-1,884i	-6,000i
φ_2	3,141	3,204	3,426	3,605	4,112	3,077	2,798	2,522	1,873
φ_3	6,283	6,315	6,437	6,551	6,992	6,251	6,121	5,991	5,450
φ_4	9,424	9,446	9,529	9,610	9,967	9,404	9,318	9,232	8,828
φ_5	12,566	12,582	12,645	12,707	12,999	12,550	12,486	12,422	12,106
φ_6	15,707	15,721	15,771	15,821	16,065	15,695	15,644	15,593	15,335
φ_7	18,849	18,860	18,902	18,944	19,153	18,839	18,796	18,754	18,537
φ_8	21,991	22,000	22,036	22,073	22,254	21,982	21,946	21,909	21,722
φ_9	25,132	25,141	25,172	25,204	25,365	25,125	25,093	25,061	24,896
φ_{10}	28,274	28,281	28,31	28,338	28,482	28,267	28,239	28,211	28,064

За умови $|\bar{\eta}| \ll 1$ корені цього рівняння можемо подати в аналітичному вигляді:

$$\varphi_1 \approx \sqrt{\bar{\eta}}; \quad \varphi_n \approx \pi(n-1) + \frac{\bar{\eta}}{\pi(n-1)}, \quad n=2,3,\dots \quad (27)$$

Зауважимо, що ними також будуть значення $-\varphi_n$.

Подавши функції у чисельнику та знаменнику виразу (21) як нескінченні добутки Вейерштрасса [18], одержимо:

$$M_{\pm}(\alpha) = \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 \pm \frac{\alpha}{i\gamma_{nc}} \right] e^{\pm i\alpha \frac{d}{\pi n}}}{\sqrt{\bar{\eta} - kd \operatorname{tg}(kd)} \left[1 \pm \frac{\alpha}{i\gamma_{1s}} \right] \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 \pm \frac{\alpha}{i\gamma_{(n+1)s}} \right] e^{\pm i\alpha \frac{d}{\pi n}}}. \quad (28)$$

Використовуючи асимптотику нулів та полюсів характеристичної функції (28), отримаємо, що в областях регулярності $M_{\pm}(\alpha) = O(|\alpha|^{-1/2})$ за $|\alpha| \rightarrow \infty$.

Оскільки функція $M_{-}(\alpha)$ відмінна від нуля в смузі регулярності Π , то, поділивши обидві частини рівняння (21) на $M_{-}(\alpha)$, дістанемо рівняння

$$M_{+}(\alpha)U'^{+}(\alpha,0) + \frac{i\beta_j M_{+}(\alpha)}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)} = \frac{\bar{U}^{-}(\alpha,0)}{M_{-}(\alpha)}, \quad \alpha \in \Pi. \quad (29)$$

Перший доданок у лівій його частині (29) є регулярною функцією змінної α в області $\tau > -\tau_0$, а другий – регулярний у смузі Π . Функція у правій частині цього рівняння є регулярною у півплощині $\tau < \tau_0$. Тепер для розв'язання рівняння (20), використовуючи розклад функції, регулярної в смузі Π [18], другий доданок подамо у як суму функцій $S_{+}(\alpha)$ та $S_{-}(\alpha)$, регулярних відповідно в областях $\tau > -\tau_0$ та $\tau < \tau_0$:

$$\frac{i\beta_j M_+(\alpha)}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)} = S_+(\alpha) + S_-(\alpha). \quad (30)$$

$$\text{Тут } S_+(\alpha) = \frac{i\beta_j}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)} (M_+(\alpha) - M_+(i\gamma_j)), \quad S_-(\alpha) = \frac{i\beta_j M_+(i\gamma_j)}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)}.$$

Враховуючи подання (30), рівняння (29) перепишемо так:

$$M_+(\alpha)U'^+(\alpha, 0) + S_+(\alpha) = \frac{\bar{U}^-(\alpha, 0)}{M_-(\alpha)} - S_-(\alpha). \quad (31)$$

Тут права частина є регулярною функцією в області $\tau < \tau_0$, а ліва – для $\tau > -\tau_0$. Асимптотичну поведінку невідомих функцій $U'^+(\alpha, 0)$ і $\bar{U}^-(\alpha, 0)$ в областях регулярності для $|\alpha| \rightarrow \infty$ встановлюємо з умов в околі вершини дефекту (6):

$$U'^+(\alpha, 0) = O(|\alpha|^{-1/2}), \quad |\alpha| \rightarrow \infty, \quad \text{коли } \alpha > -\tau_0;$$

$$\bar{U}^-(\alpha, 0) = O(|\alpha|^{-3/2}), \quad |\alpha| \rightarrow \infty, \quad \text{коли } \alpha < \tau_0.$$

Оскільки півплощини регулярності функцій у правій та лівій частинах рівняння (31) перекриваються на смугі Π , регулярні і прямують у ній до нуля на нескінченності, то згідно з теоремою Ліувілля вони визначають цілу функцію, рівну нулю в усій комплексній площині. Тому, прирівнявши до нуля ліву і праву частини, шуканий розв'язок рівняння Вінера–Гопфа (20) запишемо так:

$$U'^+(\alpha, 0) = -\frac{i\beta_j}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)} \left(1 - \frac{M_+(i\gamma_j)}{M_+(\alpha)} \right), \quad (32)$$

$$\bar{U}^-(\alpha, 0) = \frac{i\beta_j M_+(i\gamma_j) M_-(\alpha)}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)}. \quad (33)$$

Тепер, підставляючи вирази (32) і (33) у (22), знаходимо трансформанту Фур'є поля зміщень. Для переходу в координатний простір пружного шару використовуємо обернене перетворення Фур'є. Отриманий інтеграл виражаємо через суму лишків, деформуючи контур інтегрування у нижню півплощину, коли $x > 0$, та у верхню, якщо $x < 0$, де забезпечується виконання леми Жордана. Врешті-решт дифраговане поле зміщень

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y), & x > 0; \\ u_2(x, y), & x < 0, \end{cases} \quad (34)$$

де функції $u_{1(2)}(x, y)$ мають вигляд розвинень, членами яких є елементарні хвилі/моди

$$u_1 = u_1(x, y) = \sum_{q=1}^{\infty} R_{jq} e^{-\gamma_{qc} x} \sin\left(\frac{\pi(2q-1)}{2d} y\right), \quad (35)$$

$$u_2 = u_2(x, y) = -u^{\text{inc}}(x, y) + \sum_{q=1}^{\infty} T_{jq} e^{\gamma_{qs} x} \cos\left(\frac{\Phi_q(y+d)}{d}\right), \quad (36)$$

які поширюються без загасання, коли радикали в експонентах є уявними, і загасають, коли вони є дійсними або комплексними, $\text{Re } \gamma_{qc(s)} \geq 0$; R_{jq} , T_{jq} – коефіцієнти трансформації мод в околі вершини дефекту відповідно для областей $x > 0$ і $x < 0$;

$$R_{jq} = \frac{\pi \beta_j M_+(i\gamma_j) (2q-1) M_+(i\gamma_{qc})}{2d (\gamma_{qc} + \gamma_j) \gamma_{qc}}, \quad q=1,2,\dots, \quad j=1,2,\dots; \quad (37)$$

$$T_{jq} = \frac{\beta_j M_+(i\gamma_j)}{d} \frac{\Phi_q}{M_+(i\gamma_{qs}) \gamma_{qs} \cos(\Phi_q) (\Phi_q + (1 + \bar{\eta}) \operatorname{tg}(\Phi_q)) (\gamma_{qs} - \gamma_j)}, \quad q=1,2,\dots, \quad j=1,2,\dots. \quad (38)$$

На основі асимптотичної оцінки виразів (37), (38) встановлюємо, що $R_{jq}, T_{jq} = O(q^{-3/2})$ за умови $q \rightarrow \infty$. Отже, якщо $y = 0$, то $u = O(x^{1/2})$, і $du/dy = O(x^{-1/2})$, коли $x \rightarrow -0$. Ця оцінка забезпечує рівномірну збіжність рядів (35), (36) та їх похідних в області $\{-\infty < x < 0 \cup 0 < x < +\infty, -d \leq y \leq 0\}$. Безпосередньою перевіркою переконуємося у виконанні крайових умов на вільній поверхні шару $y = -d$ і на поверхні з'єднання $y = 0$. Зауважимо, що за умови $\bar{\eta} \rightarrow 0$ вирази (34)–(36) набувають вигляду відомих, отриманих раніше [4].

Отже, вони дають точний розв'язок задачі, який забезпечує виконання усіх необхідних умов. Із формул (35), (36), а також (24), (25) безпосередньо випливає, що у плоскому шарі безрозмірної товщини kd без загасання може поширюватись тільки скінченна кількість хвилевідних мод. Безрозмірні частоти цих хвиль визначають з умов $\operatorname{Re}(\gamma_{nc}) = 0$, $\operatorname{Re}(\gamma_{ns}) = 0$, тобто вони рівні $\pi(2n-1)/2$ і φ_n , де $n = 1, 2, \dots$, і повинні бути меншими за значення kd . Зауважимо, що ці безрозмірні частоти для кожного фіксованого номера n є критичними, оскільки визначають максимальну кількість мод, що поширюються без загасання у відповідній області.

Числове дослідження. Щоб дослідити вплив міжфазного дефекту на структуру поля зміщень, вивчали залежності модулів комплексних коефіцієнтів трансформації $|R_{jq}|$ та $|T_{jq}|$, заданих формулами (37), (38), від хвильової товщини шару kd для різних дійсних значень імпедансу $\bar{\eta}$ (див. рис. 2). За цих умов корені рівняння (26) є дійсними (див. таблицю).

Виявили (рис. 2a), що при $kd = \pi/2$, що відповідає формуванню першої незагасальної моди в області $x > 0$, то абсолютне значення коефіцієнта відбивання $|R_{11}|$ досягає максимуму, а на інтервалі $\pi/2 < kd < \pi$ монотонно спадає, причому швидкість спадання зростає зі збільшенням значення $\bar{\eta}$. Коли $kd = \varphi_2$ (див. таблицю), що відповідає формуванню другої незагасальної моди в області $x < 0$, функція $|R_{11}|$ має характерний злам. За подальшого зростання товщини kd параметр $|R_{11}| \rightarrow 0$ для всіх значень $\bar{\eta}$.

Інший характер мають залежності для коефіцієнта трансформації $|R_{12}|$ (див. рис. 2b). Він досягає максимального значення, коли $kd = \varphi_2$, яке зі збільшенням $\bar{\eta}$ зменшується. Виявили, що $|R_{12}| = 0$ за умови $kd = \pi/2$, а у точці, де $kd = 3\pi/2$, криві мають характерний злам для всіх значень $\bar{\eta}$. Для товщини $kd = \varphi_3$ (див. таблицю), що відповідає критичній частоті третьої моди для кожного зі значень $\bar{\eta}$, зафіксували незначний стрибок. З подальшим збільшенням значень kd коефіцієнт $|R_{12}| \rightarrow 0$.

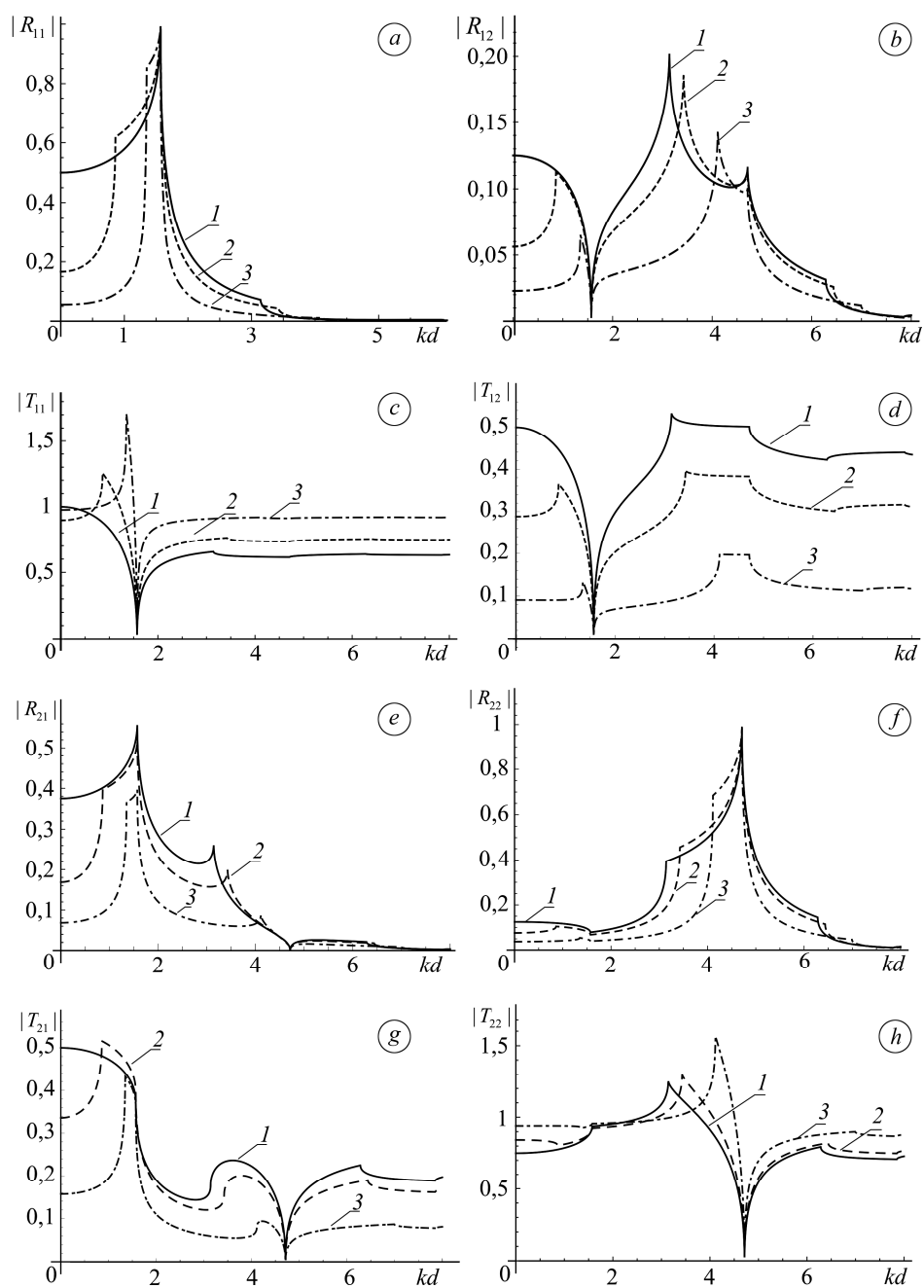


Рис. 2. Залежність модулів коефіцієнтів трансформації мод $|R_{11}|$, $|R_{12}|$, $|R_{21}|$, $|R_{22}|$ (a, b, e, f) та $|T_{11}|$, $|T_{12}|$, $|T_{21}|$, $|T_{22}|$ (c, d, g, h) від параметра kd для різних значень імпедансу $\bar{\eta}$: 1 – $\bar{\eta} = 0$; 2 – 1; 3 – 6.

Fig. 2. Dependence of the modulus of transformation coefficients modes $|R_{11}|$, $|R_{12}|$, $|R_{21}|$, $|R_{22}|$ (a, b, e, f) and $|T_{11}|$, $|T_{12}|$, $|T_{21}|$, $|T_{22}|$ (c, d, g, h) on the parameter kd for different values of the impedance $\bar{\eta}$: 1 – $\bar{\eta} = 0$; 2 – 1; 3 – 6.

За умови $kd = \pi/2$ коефіцієнт трансформації $|T_{11}| = 0$ (рис. 2c) і нормальна пружна хвиля не поширюється під дефект ($x < 0$); для $kd > \pi/2$ зі зростанням

імпедансу $\bar{\eta}$ значення $|T_{11}|$ збільшується. Для фіксованої товщини kd коефіцієнт $|T_{12}|$ (див. рис. 2d) зменшується зі збільшенням імпедансу $\bar{\eta}$. З ростом величини kd коефіцієнти $|T_{11}|$ і $|T_{12}|$ прямують до деяких постійних значень, відмінних від нуля. Рис. 2e, f, g, h ілюструють аналогічну поведінку коефіцієнтів $|R_{2q}|$ та $|T_{2q}|$, $q=1, 2$ за поширення другої нормальної моди.

На рис. 3 побудовано залежності модуля повного поля зміщень $|u^{\text{tot}}| = |u^{\text{tot}}(x, y)| = |u(x, y) + u^{\text{inc}}(x, y)|$ на поверхні шару $P(y=-d)$ від нормованої координати x/d за різних фіксованих значень kd та $\bar{\eta}$. Отримані розподіли поля зміщень формують домінують доданки рядів (35), (36), кількість яких визначає кількість мод, здатних поширюватись без загасання вздовж осі Ox .

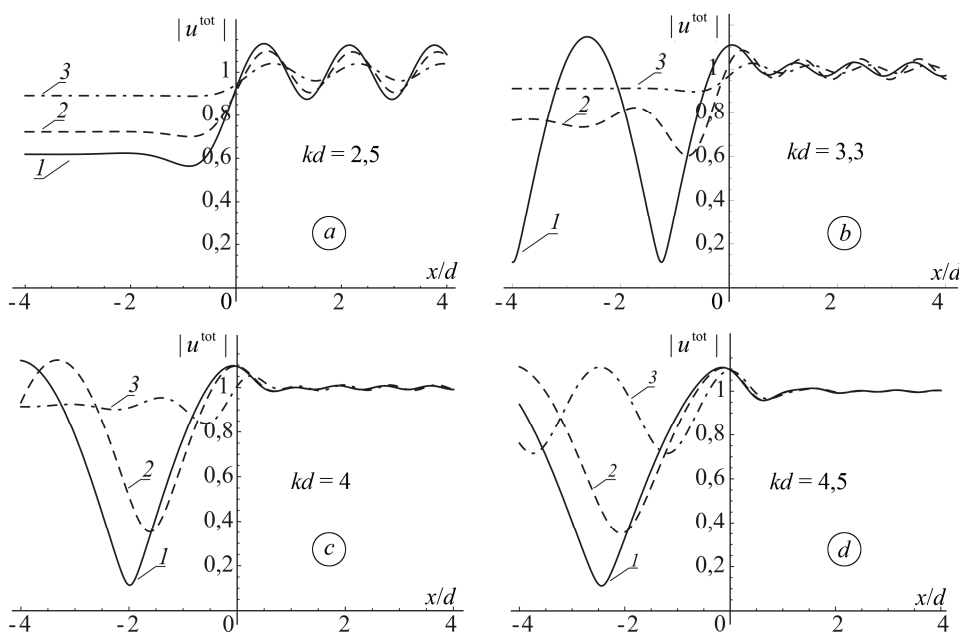


Рис. 3. Залежність поля зміщень $|u^{\text{tot}}|$ на вільній поверхні шару від нормованої координати x/d для різних значень імпедансу та частоти: 1 – $\bar{\eta}=0$; 2 – 1; 3 – 6.

Fig. 3. Dependence of the displacement field $|u^{\text{tot}}|$ at the free face of the layer on the normalized coordinate x/d for different values of the impedance and frequency: 1 – $\bar{\eta}=0$; 2 – 1; 3 – 6.

Нехай $\pi/2 < kd < 3\pi/2$. Тоді тільки перший доданок у виразі (35) є незагасальною функцією від поздовжньої координати x , а отже, поза відшаруванням ($x > 0$) може поширюватись без загасання тільки перша мода падаючої хвилі (5). За цієї умови критичні частоти, які відповідають формуванню двох перших нормальних незагасальних мод під відшаруванням (дефектом) ($x < 0$), визначають два перші корені $\varphi_n(\bar{\eta})$, $n=1,2$ характеристичного рівняння (26), тобто $\varphi_1(0)=0$, $\varphi_2(0)=3,141$ для $\bar{\eta}=0$; $\varphi_1(1)=0,860$, $\varphi_2(1)=3,426$ для $\bar{\eta}=1$ та $\varphi_1(6)=1,350$, $\varphi_2(6)=4,112$ для $\bar{\eta}=6$. На рис. 3a зображено залежність поля зміщень за різних значень імпедансу $\bar{\eta}$ ($kd=2,5$). За $\bar{\eta}=0$ (крива 1), тобто за утворення тріщини, якщо $x < 0$, поширюватиметься лише перша мода і розподіл

$|u^{tot}|$ на поверхні шару під нею практично не залежатиме від координати x/d . Зростання імпедансу $\bar{\eta}$ вказує на зменшення пошкодженості (неповне відшарування) і збільшення поля $|u^{tot}|$, яке також мало залежать від координати x/d (див. криві 2 і 3 на рис. 3a). Тобто за умови, коли під розшаруванням поширюється тільки одна мода, що забезпечують вибором частоти зондування, зменшення амплітуди поля зміщень на поверхні шару свідчить про зростання пошкодженості з'єднання.

Якщо $\bar{\eta}=0$, то в області $x < 0$ зі збільшенням товщини kd ($\varphi_2(0) < kd < \varphi_1(1)$) без загасання поширюються дві моди, тому тут спостерігали осциляції поля $|u^{tot}|$ (крива 1 на рис. 3b), а коли $\bar{\eta}=1$ або 6, поширюється тільки одна мода і криві 2, 3 змінюються слабо залежно від координати x/d . Отже, осциляції поля зміщень (уздовж осі Ox) на поверхні $P(y=-d)$ за умови $x < 0$ є ознакою повного відшарування, а їх відсутність – часткового пошкодження з'єднання. Причому, як і у попередньому випадку, менша пошкоджуваність характеризується збільшенням значення $|u^{tot}|$. Якщо $kd=4$, то для $\bar{\eta}=0$ та 1 в області $x < 0$ поширюються дві незагасальні моди (криві 1, 2 на рис. 3c), а при $\bar{\eta}=6$ – одна (крива 3). За цих умов в області $x < 0$ осциляції поля виникають як за повного відшарування, так і за часткового пошкодження з'єднання (криві 1, 2), проте їх амплітуда менша. Ця закономірність проявляється і за формування двох незагасальних мод в області $x < 0$ за усіх трьох значень імпедансу (див. поведінку кривих 1–3 на рис. 3d). Отже, за величиною $|u^{tot}|$, а також розмахом її осциляцій як функції параметра x/d можна діагностувати пошкодження з'єднання шару з півпростором.

Для дослідження енергетичних характеристик дифрагованих на дефекті хвиль шар інтерпретуватимемо як об'єднання двох напівнескінчених хвилеводів $P_1: \{x > 0, y \in (-d, 0), z \in (-\infty, \infty)\}$ та $P_2: \{x < 0, y \in (-d, 0), z \in (-\infty, \infty)\}$, на нижніх стінках яких задано нульові напруження (крайові умови Неймана), а на верхніх – відповідно, умови Неймана та імпедансного типу. З'єднані хвилеводи на межі $x=0$, $-d \leq y \leq 0$. Приймемо, що $\bar{\eta}$ – дійсна величина, та дослідимо енергетичні характеристики відбиття і проникнення пружної хвилі в окремі підобласті. Для вибраної гармонічної залежності від часу поля зміщень коефіцієнти відбивання (V_j) та проходження (W_j) на межі поділу підобластей загалом визначають так [19–21]:

$$V_j = \frac{\int_0^{-d} \operatorname{Re} [i\tau_{xz}^1(u_1)^*] dy}{\int_{-d}^0 \operatorname{Re} [i\tau_{xz}^{\text{inc}}(u_j^{\text{inc}})^*] dy}, \quad W_j = \frac{\int_0^{-d} \operatorname{Re} [i\tau_{xz}^2(u_2)^*] dy}{\int_{-d}^0 \operatorname{Re} [i\tau_{xz}^{\text{inc}}(u_j^{\text{inc}})^*] dy}, \quad (39)$$

де $u_1 = u(0+, y)$, $u_2 = u(0-, y)$, $\tau_{xz}^1 = \tau_{xz}(0+, y)$, $\tau_{xz}^2 = \tau_{xz}(0-, y)$; символом * позначено комплексне спряження; $u_j^{\text{inc}} = u^{\text{inc}}$, де u^{inc} визначено за формулою (5). Після простих перетворень вирази (39) набудуть вигляду

$$V_j = \sum_{q=1}^{N_a} \frac{|\gamma_{qc}|}{|\gamma_j|} |R_{jq}|^2; \quad W_j = \sum_{p=1}^{N_b} \frac{|\gamma_{ps}|}{|\gamma_j|} \left| 1 + \frac{\sin(2\varphi_p)}{2\varphi_p} \right| |T_{jp}|^2, \quad (40)$$

де $N_a = \left[\frac{kd}{\pi} + \frac{1}{2} \right]$, $N_b = \max_n (kd > \varphi_n)$ – кількість незагасальних мод, відповідно, в областях $x > 0$ та $x < 0$; через $[a]$ позначено цілу частину числа a .

На рис. 4 подано розподіл коефіцієнтів відбивання та проходження (40) першої моди падаючої хвилі в інтервалі $\pi/2 < kd < 3,5$ за різних значень імпедансу $\bar{\eta}$. Як бачимо, коефіцієнти V_1 монотонно спадають, а W_1 – зростають. Зі збільшенням значення $\bar{\eta}$ для фіксованої товщини kd тенденція така ж. Проте на всьому інтервалі $\pi/2 < kd < 3,5$ коефіцієнти V_1 , W_1 задовольняють умову $V_1 + W_1 = 1$, що відтворює розподіл енергії випромінювання хвилевідними областями.

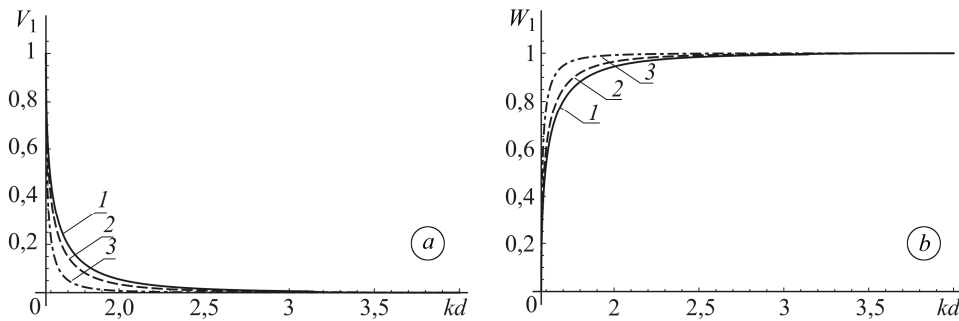


Рис. 4. Залежність коефіцієнтів відбивання (а) та проходження (б) від параметра kd для різних значень імпедансу $\bar{\eta}$: 1 – $\bar{\eta} = 0$; 2 – 1; 3 – 6.

Fig. 4. Dependence of the reflection (a) and transmission (b) coefficients on the parameter kd for different values of the impedance $\bar{\eta}$: 1 – $\bar{\eta} = 0$; 2 – 1; 3 – 6.

ВИСНОВКИ

Розв'язано задачу про поширення нормальних SH-хвиль у пружному шарі, жорстко з'єднаному з півпростором за наявності міжфазного дефекту, який змодельовано напівнескінченною імпедансною півплощиною: нульове значення імпедансу відповідає максимальному пошкодженню – утворенню тріщини, а зростання вказує на зменшення пошкодженості з'єднувальної півплощини. Отримано точний розв'язок задачі методом Вінера–Гопфа. Досліджено частотні залежності коефіцієнтів трансформації мод дефектом та енергетичних коефіцієнтів відбивання/проходження хвиль за дійсного значення імпедансу. Вивчено просторовий модовий спектр поля зміщень в шарі з імпедансом. Встановлено вплив хвилюватої товщини шару та імпедансу його пошкодженого з'єднання з півпростором на розподіл поля зміщень вільної поверхні шару. Виявлено особливості цього впливу і оцінено пошкодженість міжфазного з'єднання.

1. *Технічна діагностика матеріалів і конструкцій / Довідн. пос. у 8-ми т. Т. 2: Математичне моделювання взаємодії фізичних полів із дефектами матеріалів / За заг. ред. акад. НАН України З. Т. Назарчука. – Львів: Простір-М, 2018. – 512 с.*
2. *Rokhlin S. I. Diffraction of Lamb waves by a finite crack in an elastic layer // J. Acoust. Soc. Amer. – 1980. – 67, № 4. – P. 1157–1165.*
3. *Kurylova O. I. and Mykhas'kiv V. V. Harmonic vibration and resonance effects in the case of longitudinal shear of a hollow cylinder with crack // Materials Science. – 2019. – 55, № 1. – P. 114–123.*
4. *On the interaction of an elastic SH-wave with an interface crack in the perfectly rigid joint of a plate with a half-space / Z. T. Nazarchuk, D. B. Kuryliak, M. V. Voytko, and Ya. P. Kulynych // J. Math. Sci. – 2013. – 192, № 6. – P. 609–622.*

- (Про взаємодію пружної SH-хвилі з міжфазною тріщиною в абсолютно жорсткому з'єднанні пластини з півпростором / З. Т. Назарчук, Д. Б. Куриляк, М. В. Войтко, Я. П. Кулинич // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2012. – **55**, № 2. – С. 107–118.)
5. Golub M. V., Zhang C., and Wang Y. SH-wave propagation and resonance phenomena in a periodically layered composite structure with a crack // *J. Sound and Vibr.* – 2011. – **330**. – P. 3141–3154.
 6. Auld B. A. Acoustic fields and waves in solids. – New York: John Wiley & Sons, 1973. – Vol. 2. – 416 p.
 7. Miklowitz J. The theory of elastic waves and wave guides. – Amsterdam; New York; Oxford: North-Holland Publication Company, 1978. – 618 p.
 8. Graff K. F. Wave motion in elastic solids. – New York: Dover Publications, 1991. – 650 p.
 9. Castro L. P. and Kapanadze D. The impedance boundary-value problem of diffraction by a strip // *J. Math. Anal. Appl.* – 2008. – **337**, № 2. – P. 1031–1040.
 10. Lee K.-M. An inverse scattering problem from an impedance obstacle // *J. of Comput. Phys.* – 2007. – **227**. – P. 431–439.
 11. Lee K.-M. Inverse scattering problem from an impedance crack via a composite method // *Wave Motion.* – 2015. – **56**. – P. 43–51.
 12. Voitko M. V. Determination of the resonance frequencies in the course of sounding of impedance defects on the boundary of the rigid joint of a plate and a half space by elastic SH-waves // *Materials Science.* – 2014. – **49**, № 6. – P. 849–856.
 13. Kress R. and Lee K.-M. Integral equation methods for scattering from an impedance crack // *J. of Comput. and Appl. Math.* – 2003. – **161**, № 1. – P. 161–177.
 14. Büyükkaksoy A. and Çinar G. Solution of a matrix Wiener–Hopf equation connected with the plane wave diffraction by an impedance loaded parallel plate waveguide // *Math. Methods Appl. Sci.* – 2005. – **28**. – P. 1633–1645.
 15. TayyarI. H., Büyükkaksoy A., and Isikyer A. A Wiener–Hopf analysis of the parallel plate waveguide with finite length impedance loading // *Radio Sci.* – 2008. – **43**. – RS5005.
 16. Tiryakioglu B. and Demir A. Radiation analysis of sound waves from semi-infinite coated pipe // *Int. J. Aeroacoust.* – 2018. – **18**, № 1. – P. 92–111.
 17. Öztürk H. Wiener–Hopf approach for the coaxial waveguide with an impedance-coated groove on the inner wall // *J. Eng. Math.* – 2020. – **124**, № 1. – P. 75–88.
 18. Mittra R. and Le S. W. Analytical techniques in the theory of guided waves. – New York: Macmillan Company, 1971. – 302 p.
 19. Семків М. Я. Дифракція нормальних SH-хвиль у хвилеводі з розрізом // *Акуст. вісник.* – 2011. – **14**, № 2. – С. 57–69.
 20. Tan T. H. Theorem on the scattering and the absorption cross section for scattering of plane, time-harmonic, elastic waves // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1976. – **59**, № 6. – P. 1265–1267.
 21. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.

Одержано 10.02.2021