УДК 62-50, 519.7

©2016. **Н. В. Жоголева, В. Ф. Щербак**

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ УПРУГОЙ СВЯЗИ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ

Рассмотрена задача наблюдения состояния и идентификации параметров математической модели, представленной системой двух связанных осцилляторов Ван дер Поля. Такие системы возникают при моделировании многих физических, биологических процессов, имеющих циклический характер. Для решения использован метод синтеза инвариантных соотношений, разработанный для решения обратных задач теории управления. Метод позволяет формировать конечные соотношения, определяющие искомые неизвестные как функции от известных величин.

Ключевые слова: *наблюдатель, идентификация параметров, инвариантные соотношения, связанные осцилляторы Ван дер Поля.*

Во многих приложениях физики, биологии в качестве модели нелинейных циклических процессов, имеющих, вне зависимости от начальных условий, устойчивый предельный цикл, используют систему, состоящую из одного или нескольких связанных между собой осцилляторов Ван дер Поля [1]. Определение характеристик колебаний таких систем по результатам измерения выходных сигналов в реальном масштабе времени является актуальной проблемой медико-биологических исследований [2, 3]. В работе предлагается способ получения асимптотических оценок скоростей и параметров, характеризующих взаимовлияние связанных осцилляторов Ван дер Поля по информации об их движении. Способ основан на разработанном в аналитической механике методе инвариантных соотношений [4], который в задачах управления позволяет синтезировать дополнительные связи между известными и неизвестными величинами [5, 6].

1. Задача определение характеристик осциллятора Ван дер Поля.

Рассмотрим уравнения движения, описывающие совместные колебания двух осцилляторов Ван дер Поля [7], соединенных линейной упругой связью

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - \mu_1(1-x^2)\dot{x} + {\omega_1}^2 x + \alpha(x-y) = 0,\\ &\ddot{y} - \mu_2(1-y^2)\dot{y} + {\omega_2}^2 y + \beta(x-y) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x, y означают отклонения колеблющихся точек от положения равновесия $x = y = 0$, коэффициенты при нелинейных слагаемых μ_1, μ_2 характеризует величину демпфирования. Режим $\mu_1 = \mu_2 = 0$ соответствует колебаниям без трения двух связанных гармонических осцилляторов с собственными частотами ω_1, ω_2, соответственно.

Работа содержит результаты исследований, выполненных в рамках конкурсного проекта Ф71-19845 ДФФД (Державний фонд фундаментальних досліджень).

Системы вида (1) возникают во многих физических, медико-биологических прикладных исследованиях. Различают модели с однонаправленной связью, когда один из параметров α или β равен нулю, и модели, учитывающие взаимное влияние активных подсистем. В частности, система (1) используется при моделировании характеристик кардиостимуляторов с обратной связью (значения функций времени $x(t), y(t)$ доступны измерению) [8]. Современные кардиостимуляторы – это программируемые адаптивные устройства, использующие сложные алгоритмы для слежения за сердечной деятельностью. Для таких систем актуальной является задача определения в реальном масштабе времени значений параметров α, β.

Обозначив $x_1 = x,\ x_2 = dx/dt,\ x_3 = y,\ x_4 = dy/dt$, перепишем (1) в виде системы

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2, \quad \dot{x_2} = -{\omega_1}^2 x_1 + \mu_1(1 - x_1^2)x_2 + \alpha(x_1 - x_3), \\ \dot{x_3} &= x_4, \quad \dot{x_4} = -{\omega_2}^2 x_3 + \mu_2(1 - x_3^2)x_4 + \beta(x_1 - x_3), \\ \dot{\alpha} &= 0, \quad \dot{\beta} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим задачу определения значений неизвестных компонент фазового вектора $x_2(t), x_4(t)$ и параметров α, β как задачу наблюдения и одновременной идентификации системы (2) по известной информации о движении. Такой информацией является выход – функции времени $x_1(t), x_3(t)$, а также те величины, которые могут быть получены с использованием только лишь значений выхода. В частности, далее известным будем считать любое решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi} = U(\xi, x_1(t), x_3(t)),\ \xi(0) = \xi_0 \in R^p,\ p \geqslant 1, \tag{3}$$

в которой функции $U(\xi, x_1, x_3)$ удовлетворяют достаточным условиям теорем существования и единственности решений для $t \in [0, \infty)$.

Для решения исходной задачи наблюдения и идентификации используем метод синтеза инвариантных соотношений в задачах определения состояния и параметров динамических систем, который позволяет получать в процессе функционирования системы асимптотические оценки неизвестных [6].

Задача. Найти асимптотически точные оценки переменных $x_2(t), x_4(t)$ и параметров α, β системы (2) по известным значениям выхода $x_1(t), x_3(t)$.

Замечание. Достаточным условием локальной наблюдаемости и идентифицируемости [9] системы (2) является невырожденность якобиевой матрицы

$$J = \partial(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)/\partial(x_2, x_4, \alpha, \beta),$$

где производные от выхода $x_1(t), x_3(t)$ взяты в силу системы (2). Поскольку величина $\det J = (x_1(t) - x_3(t))^2$, то система становится неидентифицируемой при $x_1(t) = x_3(t)$.

Будем предполагать, что рассматриваемые подсистемы не являются синхронизированными по выходу в процессе получения асимптотических оценок параметров, т.е. на рассматриваемом интервале времени величина $x_1(t)-x_3(t)$ не стремится к нулю. Тогда условия идентифицируемости нарушаются лишь на дискретном множестве моментов времени, не имеющем точек сгущения. Полагаем далее, что построение инвариантных соотношений проводится на интервалах знакопостоянства величины $x_1(t)-x_3(t)$.

2. Синтез дополнительных соотношений.

Подход, связанный с синтезом инвариантных соотношений, состоит в динамическом расширении исходной системы дифференциальных уравнений (2) уравнениями (3), где p равно 4 – числу неизвестных: функций времени $x_2(t), x_4(t)$ и постоянных параметров α, β. Далее ищутся независимые соотношения, связывающие неизвестные и известные величины

$$F_i(x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha, \beta, \xi) = 0,\ i = \overline{1,4}. \tag{4}$$

При этом правые части $U(\xi, x_1, x_3)$ подбираются таким образом, чтобы соотношения (4) стали инвариантными для расширенной системы дифференциальных уравнений (2),(3) и при этом обладали бы следующими свойствами:

I_1. Соотношения (4) формируют дополнительные независимые уравнения для неизвестных, т.е.

$$rank \frac{\partial(F_1, F_2, F_3, F_4)}{\partial(x_2, x_4, \alpha, \beta)} = 4.$$

I_2. Соответствующее (4) инвариантное многообразие

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha, \beta, \xi) \subseteq R^{10} :\ F_i(x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha, \beta, \xi) = 0,\ i = \overline{1,4}\}$$

обладает свойством глобального притяжения для любых решений расширенной системы (2),(3). Иными словами, на любых решениях

$$\lim_{t\to\infty} F_i(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), \xi(t), \alpha, \beta) = 0,\ i = \overline{1,4}.$$

Покажем, что для рассматриваемой задачи соотношения вида (4) существуют. Чтобы свойство I_1 было выполнено во всей рассматриваемой области будем искать их в виде

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, \xi) = x_2 - \xi_1 - \Psi_1(x_1) = 0,\ F_2(x_1, \alpha, \xi) = \alpha - \xi_2 - \Psi_2(x_1) = 0,\\ &F_3(x_3, x_4, \xi) = x_4 - \xi_3 - \Psi_3(x_3) = 0,\ F_4(x_3, \beta, \xi) = \beta - \xi_4 - \Psi_4(x_3) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

где переменные $\xi_i(t)$ являются решениями системы дифференциальных уравнений (3), а на функции $\Psi_i, U_i,\ i = \overline{1,4}$ пока не накладываем никаких ограничений, кроме требования непрерывной дифференцируемости по своим аргументам. Если эти функции выбраны так, что соотношения (5) становится инвариантными на рассматриваемом решении, то тогда неизвестные $x_2(t), x_4(t), \alpha, \beta$ могут быть найдены непосредственно из равенств (5).

Поскольку перекрестные связи между подсистемами в уравнениях (2) зависят от известных функций времени $x_1(t), x_3(t)$ то задачу 1 будем решать для каждого отдельно взятого осциллятора. Рассмотрим, например, первую подсистему, правая часть которой зависит от известной функции времени $x_3(t)$

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2, \\ \dot{x_2} &= -{\omega_1}^2 x_1 + \mu_1(1 - x_1^2)x_2 + \alpha(x_1 - x_3). \end{aligned} \tag{6}$$

Утверждение. Для любых дифференцируемых функций $\Psi_1(x_1),\ \Psi_2(x_1)$ существуют управления $U_1(\xi_1, \xi_2, x_1, x_3), U_2(\xi_1, \xi_2, x_1, x_3)$ такие, что первые два равенства (5) выполняются тождественно на некоторых решениях расширенной системы дифференциальных уравнений (2),(3).

Доказательство. Введем переменные $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, которые характеризуют невязку в формулах (5) на решениях системы (2),(3).

$$x_2 = \xi_1 + \Psi_1(x_1) + \varepsilon_1, \quad \alpha = \xi_2 + \Psi_2(x_1) + \varepsilon_2. \tag{7}$$

Сделаем в уравнениях (2) замену переменных. Перейдем по формулам (7) от переменных x_2, α к переменным $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ соответственно. Дифференцируя (7) в силу системы (6),(3), получаем дифференциальные уравнения для отклонений

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon_1} &= -\,U_1 - {\omega_1}^2 x_1 + (\xi_1 + \Psi_1 + \varepsilon_1)\left[(\mu_1(1 - x_1^2) - \Psi_1'\right] + \\ &\quad + (x_1 - x_3)(\xi_2 + \Psi_2 + \varepsilon_2), \\ \dot{\varepsilon_2} &= -\,U_2 - \Psi_2'(\xi_1 + \Psi_1 + \varepsilon_1), \end{aligned} \tag{8}$$

где знак $'$ означает дифференцирование по переменной x_1.

Чтобы равенства (5) выполнялись тождественно на некоторых решениях системы дифференциальных уравнений (6),(3), достаточно показать, что система дифференциальных уравнений (8) допускает тривиальное решение $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) \equiv 0$.

Для этого фиксируем вид правых частей (3), а именно: для любых $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$ положим

$$\begin{aligned} U_1(\xi_1, \xi_2, x_1, x_3) &= -{\omega_1}^2 x_1 + [\mu_1(1 - x_1^2) - {\Psi_1}'](\xi_1 + \Psi_1) + (x_1 - x_3)(\xi_2 + \Psi_2), \\ U_2(\xi_1, \xi_2, x_1, x_3) &= -{\Psi_2}'(\xi_1 + \Psi_1). \end{aligned} \tag{9}$$

В результате система дифференциальных уравнений для отклонений $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ становится однородной

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon_1} &= [\mu_1(1 - x_1^2) - {\Psi_1}'(x_1)]\varepsilon_1 + (x_1 - x_3)\varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon_2} &= -{\Psi_2}'(x_1)\varepsilon_1, \end{aligned} \tag{10}$$

а значит, допускает тривиальное решение. Утверждение доказано. □

Аналогичным образом доказывается существование для любых дифференцируемых функций $\Psi_3(x_3)$, $\Psi_4(x_3)$ управлений $U_3(\xi_3, \xi_4, x_1, x_3), U_4(\xi_3, \xi_4, x_1, x_3)$, при которых последние два равенства (5) становятся инвариантными.

Таким образом, можно утверждать, что для любых дифференцируемых функций $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1), \Psi_3(x_3), \Psi_4(x_3)$ начальные значения $\xi(0)$ в задаче Коши для дифференциальных уравнений (4) могут быть выбраны таким образом, что в момент $t = 0$ формулы (5) становятся верными равенствами. В частности, это означает, что начальные значения для отклонений $\varepsilon_i(0) = 0,\ i = \overline{1,4}$. В этом случае равенства (5) на траектории расширенной системы (2),(3) выполняются тождественно, образуя, тем самым, систему дополнительных соотношений, в которых единственными неизвестными остаются $x_2(t), x_4(t), \alpha, \beta$.

В общем случае осуществить такой выбор $\xi(0)$ не удается, поскольку для этого необходимо знать значения $x_2(0), x_4(0), \alpha, \beta$, которые, собственно, и являются искомыми величинами. Для того, чтобы использовать формулы (5) для оценки $x_2(t), \alpha$ на любом решении системы (2),(3) требуется из фактически произвольного множества функций $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1), \Psi_3(x_3), \Psi_4(x_3)$ выбрать такие, при которых тривиальное решение системы уравнений в отклонениях обладало бы свойством глобальной асимптотической устойчивости.

3. Стабилизация отклонений от инвариантного соотношения.

Как и в случае доказательства существования инвариантных соотношений, решение задачи стабилизации отклонений проведем для подсистемы (6). При этом найденные законы управления переносятся на вторую подсистему простой заменой соответствующих индексов.

Чтобы обеспечить глобальную асимптотическую устойчивость тривиального решения системы (10) используем функции $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$. Введем обозначения:

$$V_1(x_1) = \mu_1(1 - x_1^2) - {\Psi_1}'(x_1), \quad V_2(x_1) = -{\Psi_2}'(x_1), \tag{11}$$

и перепишем систему (10) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon_1} &= V_1(x_1)\varepsilon_1 + (x_1 - x_3)\varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon_2} &= V_2(x_1)\varepsilon_1. \end{aligned} \tag{12}$$

Будем рассматривать функции $V_1(x_1), V_2(x_1)$ как управления, с помощью которых необходимо обеспечить глобальную асимптотическую устойчивость тривиального решения системы (12).

Пусть $k = -\mathrm{sign}\,(x_1 - x_3)$, т.е. $k(x_1 - x_2) = -|x_1 - x_3|$. В качестве функции Ляпунова, в зависимости от знака разности $x_1 - x_3$, будем использовать с положительно определенную функцию

$$V(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{2}[{\varepsilon_1}^2 + (\varepsilon_1 + k\varepsilon_2)^2]. \tag{13}$$

Ее производная, взятая в силу системы (12), равна

$$\frac{dV}{dt} = (2V_1 + kV_2){\varepsilon_1}^2 + (kV_1 + V_2 + 2x_1 - 2x_3)\varepsilon_1\varepsilon_2 + k(x_1 - x_3){\varepsilon_2}^2.$$

Пусть $V_1 = 3k(x_1 - x_3),\ V_2 = -5(x_1 - x_3)$. Тогда

$$\frac{dV}{dt} = -|x_1 - x_3|({\varepsilon_1}^2 + {\varepsilon_2}^2) < 0,$$

следовательно, при $x_1(t) \neq x_3(t)$ производная от функций Ляпунова отрицательна. Поэтому значения функций $V(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ строго убывают на интервалах знакопостоянства величины $x_1(t) - x_3(t)$. Поскольку $V(0,0) = 0$, то можно утверждать, что

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon_i(t) = 0,\ i = 1,2.$$

Так как $V_1(x_1), V_2(x_1)$ выбраны, то равенства (11) можем рассматривать как дифференциальные уравнения для искомых функций $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$, формирующих инвариантные соотношения (5). Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} {\Psi_1}' &= \mu_1(1 - x_1^2) - 3k(x_1 - x_3), \\ {\Psi_2}' &= 5(x_1 - x_3). \end{aligned} \tag{14}$$

Для завершения построений соответствующих инвариантных соотношений достаточно в формулы (5),(9) подставить любое частное решение системы (14). Пусть $\Psi_1(0) = \Psi_2(0) = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \Psi_1(x_1) &= x_1\left[\mu_1\left(1 - \frac{{x_1}^2}{3}\right) - 3kx_1\left(\frac{x_1}{2} - x_3\right)\right], \\ \Psi_2(x_1) &= 5x_1\left(\frac{x_1}{2} - x_3\right). \end{aligned} \tag{15}$$

В результате проведенных построений первые две из формул (5), предназначенные для оценки неизвестных $x_2(t), \alpha$, принимают вид

$$\begin{aligned} x_2 &= \xi_1 + x_1\left[\mu_1(1 - \frac{x_1^2}{3}) - 3k\left(\frac{x_1}{2} - x_3\right)\right] + O(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2), \\ \alpha &= \xi_2 + 5x_1\left(\frac{x_1}{2} - x_3\right) + O(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2), \end{aligned} \tag{16}$$

где функции $\xi_1(t), \xi_2(t)$ являются решением задачи Коши для вспомогательной системы дифференциальных уравнений (3), которую, с учетом формул (9),(15), можем записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\xi_1} =& -{\omega_1}^2 x_1 + 3|x_1 - x_3|\left\{\xi_1 + x_1\left[\mu_1\left(1 - \frac{{x_1}^2}{3}\right) - 3kx_1\left(\frac{x_1}{2} - x_3\right)\right]\right\} + \\ &+ (x_1 - x_3)\left[\xi_2 + 5x_1\left(\frac{x_1}{2} - x_3\right)\right], \\ \dot{\xi_2} =& -5(x_1 - x_3)\left\{\xi_1 + x_1\left[\mu_1\left(1 - \frac{{x_1}^2}{3}\right) - 3kx_1\left(\frac{x_1}{2} - x_3\right)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{17}$$

Уравнения (16),(17), определяют семейство наблюдателей, параметризованное начальными условиями $\xi_1(0), \xi_2(0)$. При этом каждый из них обеспечивает получение асимптотических оценок искомых неизвестных $x_2(t), \alpha$. Последние два соотношения (5), определяющие асимптотические оценки для неизвестных $x_4(t), \beta$, конструируются аналогичным образом.

1. *Кузнецов А.П., Селиверстова Е.С., Трубецков Д.И., Тюрюкина Л.В.* Феномен уравнения ван дер Поля // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2014. – Т. 22, № 4. – С. 3–42.
2. *Grudzinski K., Zebrowski J.J.* Modeling cardiac pacemakers with relaxation oscillators // Physica A 336. – 2003. – P. 153–162.
3. *Булдаков Н. С., Самочетова Н. С., Ситников А. В., Суятинов С. И.* Моделирование связей в системе «сердце-сосуды» // Наука и образование, Электронный научно-технический журнал. – 2013. – С. 123.
4. *Харламов П. В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6.
5. *Щербак В. Ф.* Синтез дополнительных соотношений в задаче наблюдения // Механика тведого тела. – 2004. – Т. 33. – С. 197–216.
6. *Жоголева Н. В., Щербак В. Ф.* Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления // Труды ИПММ НАН Украины. – 2015. – Т. 29. – С. 69–76.
7. *Van der Pol B.* On relaxation oscillations // The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. and J. of Sci. – 1927. – V. 2(7). – P. 978–992.
8. *Gholizade-Narm H., Azemi A., Khademi M., Karimi-Ghartemani M.* A State Observer and a Synchronization Method for Heart Pacemakers // Journal of Applied Sciences. – 2008. – 8(18). – P. 3175–3182.
9. *Ковалев А. М., Щербак В. Ф.* Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем. – К.: Наук. думка, 1993.

N. V. Zhogoleva, V. F. Shcherbak

Identification of elastic coupling parameters of van der Pole oscillators .

The observation and identification problem for mathematical model of coupled Van der Pol oscillators is considered. Such systems arise under modeling of many cyclical hisical or biological processes. The synthesis of invariant relationships method is used developed for the solution of inverse control problems. The method allows to synthesize additional relations between the known and unknown quantities of the mathematical model of the object.

Keywords: *observer, identification of parameters, invariant relations, coupled Van der Pol oscillators.*

Н. В. Жоголева, В. Ф. Щербак

Ідентифікація параметрів пружного зв'язку осциляторів Ван дер Поля.

Розглянуто задачу спостереження стану та ідентифікації параметрів математичної моделі, яка представлена у вигляді системи двох взаємозалежних осциляторів Ван дер Поля. Такі системи виникають при моделюванні багатьох фізичних або біологічних процесів, що мають циклічний характер. Використано метод синтезу інваріантних співвідношень, який розроблено для обернених задач теорії управління. Метод дозволяє синтезувати кінцеві співвідношення, що визначають шукані невідомі як функції від відомих величин.

Ключові слова: *спостерігач, ідентифікація параметрів, інваріантні співвідношення, пов'язані осцилятори Ван дер Поля.*

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
Славянск
scherbakvf@ukr.net

Получено 21.05.16