

УДК 539.3:534.1

©2017. Н. В. Жоголева, В. П. Шевченко

## АНАЛИЗ ВТОРЫХ ГАРМОНИК ЛОКАЛИЗОВАННЫХ SH ВОЛН В АНИЗОТРОПНОМ СЛОЕ МЕЖДУ АНИЗОТРОПНЫМИ ПОЛУПРОСТРАНСТВАМИ ПРИ ПРОСКАЛЬЗЫВАЮЩЕМ КОНТАКТЕ МАТЕРИАЛОВ

В работе используется модель геометрически и физически нелинейного деформирования анизотропной упругой среды. Построено теоретическое численно-аналитическое решение краевой задачи определения нелинейных ангармонических возмущений, которые генерируются при распространении локализованных сдвиговых волн в волноводе в виде слоя из монокристалла класса  $m\bar{3}m$  кубической системы, вмещенного с неидеальным проскальзывающим механическим контактом между однотипными полупространствами монокристаллического материала класса  $m\bar{3}m$  кубической системы. Численные исследования проведены для комбинации материалов волновода: слой хлорида натрия между полупространствами из материала кремния. Исследованы и обобщены амплитудно-частотные зависимости для кинематических характеристик упругих волновых смещений сдвиговых волн и их нелинейных вторых гармоник. Проанализированы эффекты влияния физико-механических характеристик волноводной структуры на амплитудные уровни и формы волновых движений нелинейных вторых гармоник исследуемых локализованных упругих волн.

MSC: 74J05.

**Ключевые слова:** геометрическая и физическая нелинейность, ангармонические эффекты, нелинейные вторые гармоники локализованных волн, анизотропный слой между анизотропными полупространствами.

### 1. Введение.

Одними из наиболее актуальных и открытых для исследования проблем механики деформируемого твердого тела на сегодняшний день являются задачи исследования нелинейных упругих волн. В современных работах освещаются вопросы анализа ангармонических нелинейных эффектов в процессах возбуждения и распространения упругих волн малой интенсивности в анизотропных упругих средах, в которых применяется методика разложения характеристик волновых движений в ряд по малому параметру в виде акустического числа Маха. Освещенные в научных публикациях соответствующие исследования в настоящее время по большей части касаются вопросов определения нелинейных ангармонических возмущений в полях объемных волн деформаций в изотропных и отдельных типах кристаллических сред, в полях сдвиговых и продольно-сдвиговых нормальных упругих волн в монокристаллическом слое из материалов кубической системы. В то время как проблемы исследования характеристик нелинейных ангармонических возмущений

---

Исследования проведены в рамках программы фундаментальных исследований Министерства образования и науки Украины (проект № 0116U002522) и при грантовой поддержке ДФФД (проект № Ф71/47-2017).

в полях локализованных упругих волн исследованы преимущественно лишь для поверхностных волн релеевского типа в изотропном полупространстве. Актуальными являются исследования ангармонических возмущений с применением модели геометрически и физически нелинейной среды поскольку они используются в технологиях свертки и интегрирования волновых сигналов в кристаллических акустоэлектронных устройствах, а также в схемах ультразвуковой диагностики упругих сред. Несмотря на важность, указанные вопросы изучены лишь в отдельных случаях [5, 6]. Таким образом, целью данной работы является построение и исследование решения задачи определения характеристик нелинейных вторых гармоник локализованных монохроматических сдвиговых упругих волн SH типа, которые распространяются в слое монокристалла хлорида натрия класса m3m кубической системы между кремниевыми упругими полупространствами аналогичного класса анизотропии, для случая неидеального скользящего контакта компонент волновода.

## 2. Постановка и основные соотношения задачи.

Исследуемая волноводная структура отнесена к системе прямоугольных координат, в которой слой занимает область  $V_1 = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, -h \leq x_3 \leq h\}$ , а полупространства – области  $V_2 = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, -\infty < x_3 < -h\}$  и  $V_3 = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, h < x_3 < \infty\}$ . Физико-механические свойства компоненты волновода  $V_p$  из материала класса m3m кубической системы характеризуются матричными упругими постоянными второго порядка  $c_{ij}^{(p)}$ , третьего порядка  $c_{ijk}^{(p)}$  и плотностью  $\rho^{(p)}$ . Кристаллографические направления компонент волновода коллинеарны. В работе осуществляется переход к безразмерным координатным переменным и кинематическим характеристикам:  $x_j = \tilde{x}_j/R_*$ , где  $R_* = h$ ; функции волновых упругих смещений  $u_j = \tilde{u}_j/u_*$ , где  $u_*$  – максимальный уровень амплитуд. Совокупность нормированных постоянных второго порядка  $c_{ij}^{(p)}$  определяется тремя независимыми величинами  $c_{11}^{(p)}$ ,  $c_{12}^{(p)}$ ,  $c_{44}^{(p)}$ , а нормированные постоянные третьего порядка  $c_{ijk}^{(p)}$  – шестью независимыми величинами  $c_{111}^{(p)}$ ,  $c_{112}^{(p)}$ ,  $c_{114}^{(p)}$ ,  $c_{155}^{(p)}$ ,  $c_{123}^{(p)}$ ,  $c_{456}^{(p)}$ .

Для анализа нелинейных ангармонических эффектов при распространении локализованных SH волн вдоль координатного направления  $Ox_1$  используется модель физически и геометрически нелинейного динамического деформирования материала, базирующаяся на представлении упругого потенциала  $U$  в форме

$$U = \frac{1}{2}c_{jqrk}\varepsilon_{jq}\varepsilon_{rk} + \frac{1}{6}c_{jqrklm}\varepsilon_{jq}\varepsilon_{rk}\varepsilon_{lm} \quad (j, q, r, k, l, m = \overline{1, 3}) \quad (1)$$

и нелинейных представлениях компонент тензора механических деформаций

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2}(u_{l,k} + u_{k,j} + u_{l,j}u_{l,k}), \quad (2)$$

где  $u_{r,k} = \partial u_r / \partial x_k$ ,  $u_r$  компоненты вектора волновых упругих перемещений.

Соответствующие такому выбору упругого потенциала компоненты тензора механических напряжений  $\sigma_{jd}$ , представляются в виде суммы линейных и нелинейных составляющих

$$\sigma_{jd} = \sigma_{jd}^{(l)} + \sigma_{jd}^{(n)}, \quad (3)$$

где

$$\sigma_{jd}^{(l)} = c_{jdrk}u_{r,k}, \quad \sigma_{jd}^{(n)} = \frac{1}{2}c_{jdrk}u_{l,r}u_{l,k} + c_{pdrk}u_{j,p}u_{r,k} + \frac{1}{2}c_{jdrklm}u_{r,k}u_{l,m}. \quad (4)$$

Уравнения движения для образующих рассматриваемую волноводную структуру упругих сред при отсутствии объемных сил можно представить в тензорном виде

$$\rho\ddot{u}_j^{(p)} - \sigma_{jd,d}^{(p,l)} = \sigma_{jd,d}^{(p,n)}, \quad (j = \overline{1,3}). \quad (5)$$

В представлениях (5) и последующих соотношениях верхний индекс  $p$  у характеристик напряженно-деформированного состояния указывает на то, что соответствующая характеристика относится к компоненте  $V_p$  рассматриваемого волновода.

Проведенное исследование малых нелинейных волновых эффектов базируется на методе малого параметра [2, 3], при котором нормированные комплексные функции волновых перемещений  $u_j^{(p)}$  ( $j = \overline{1,3}$ ) отыскиваются в виде представлений

$$u_j = u_j^{(l)} + \delta u_j^{(n)}, \quad \delta = u_*/R_* \ll 1. \quad (6)$$

### 3. Численно-аналитическое решение.

В рассматриваемой задаче о распространении обобщенных линейных сдвиговых волн в слое монокристалла класса m3m кубической системы между однотипными полупространствами из монокристаллов аналогичного класса кубической системы при условии неидеального проскальзывающего контакта компонент волновода линейные составляющие исследуемого волнового поля определяются из однородной спектральной краевой задачи

$$\sigma_{2j,j}^{(p,l)} - \rho_p \ddot{u}_2^{(p)} = 0, \quad (p = 1, 3), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (u_3^{(1,l)})_{x_3=-1} &= (u_3^{(2,l)})_{x_3=-1}, & (u_3^{(1,l)})_{x_3=1} &= (u_3^{(3,l)})_{x_3=1}, \\ (\sigma_{33}^{(1,l)})_{x_3=-1} &= (\sigma_{33}^{(2,l)})_{x_3=-1}, & (\sigma_{33}^{(1,l)})_{x_3=1} &= (\sigma_{33}^{(3,l)})_{x_3=1}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$(\sigma_{3j}^{(1,l)})_{x_3=-1} = 0, \quad (\sigma_{3j}^{(1,l)})_{x_3=1} = 0,$$

$$(\sigma_{3j}^{(2,l)})_{x_3=-1} = 0, \quad (\sigma_{3j}^{(3,l)})_{x_3=1} = 0, \quad (j = \overline{1,2})$$

Комплексные вектор-функции линейных волновых перемещений  $\vec{u}^{(p,l)}$  характеризуются единственной ненулевой компонентой  $u_2^{(p,l)}$ . Краевые условия задачи линейного приближения трансформируются в условия свободных от напряжений

граничных поверхностей срединного слоя  $V_1$ . Таким образом, можно записать представления для комплексных функций волновых смещений  $u_2^{(p,l)}$  с нормирующим безразмерным параметром  $u_{2q}^{(0)}$  для компоненты  $V_p$  рассматриваемого волновода:

$$\begin{aligned} u_{2q}^{(l,1)} &= u_{2q}^{(0)} \cos(\alpha^{(q)} x_3) e^{-i(\omega t - k_q x_1)}, \\ u_{2q}^{(l,2)} &= 0, \\ u_{2q}^{(l,3)} &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\alpha^{(q)} = q\pi/2$  ( $q = \overline{0, \infty}$ ), а дисперсионное соотношение, связывающее частоту  $\omega$  и волновое число  $k_q$  имеет вид

$$((\Omega_1^2 - k_q^2)/(c_{44}^{(1)})^{1/2} = q\pi/2, \quad \Omega_1^2 = \rho_1 \omega^2 R_*^2 / c_*. \quad (10)$$

В построенном далее решении будем рассматривать случаи  $q > 0$ .

Структура (9) далее используется при определении соотношений задачи поиска соответствующих нелинейных ангармонических возмущений для локализованных SH волн. Соотношения второго приближения и краевые условия на контактирующих границах  $x_1 = \pm 1$  в рассматриваемом волноводе имеют вид:

$$(\sigma_{ij,j}^{(p,l)})_{\bar{u}^{(p)} = \bar{u}^{(p,n)}} - \rho_p \ddot{u}_i^{(p,n)} = -(\sigma_{ij,j}^{(p,n)})_{\bar{u}^{(p)} = \bar{u}^{(p,l)}}. \quad (11)$$

$$u_1^{(2,n)} = u_1^{(1,n)}, \quad u_3^{(2,n)} = u_3^{(1,n)} \quad \text{при } x_3 = -1,$$

$$(\sigma_{3i}^{(1,l)})_{\bar{u}^{(1)} = \bar{u}^{(1,n)}} + (\sigma_{3i}^{(1,n)})_{\bar{u}^{(1)} = \bar{u}^{(1,l)}} = 0, \quad (i = 1, 2)$$

$$(\sigma_{33}^{(1,l)})_{\bar{u}^{(1)} = \bar{u}^{(1,n)}} + (\sigma_{33}^{(1,n)})_{\bar{u}^{(1)} = \bar{u}^{(1,l)}} = (\sigma_{33}^{(2,l)})_{\bar{u}^{(2)} = \bar{u}^{(2,n)}} + (\sigma_{33}^{(2,n)})_{\bar{u}^{(2)} = \bar{u}^{(2,l)}};$$

$$u_1^{(3,n)} = u_1^{(1,n)}, \quad u_3^{(3,n)} = u_3^{(1,n)} \quad \text{при } x_3 = 1,$$

$$(\sigma_{3i}^{(1,l)})_{\bar{u}^{(1)} = \bar{u}^{(1,n)}} + (\sigma_{3i}^{(1,n)})_{\bar{u}^{(1)} = \bar{u}^{(1,l)}} = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (12)$$

$$(\sigma_{33}^{(1,l)})_{\bar{u}^{(1)} = \bar{u}^{(1,n)}} + (\sigma_{33}^{(1,n)})_{\bar{u}^{(1)} = \bar{u}^{(1,l)}} = (\sigma_{33}^{(3,l)})_{\bar{u}^{(2)} = \bar{u}^{(2,n)}} + (\sigma_{33}^{(3,n)})_{\bar{u}^{(2)} = \bar{u}^{(2,l)}}.$$

Компоненты комплексного вектора напряженности вторых гармоник определяются из соотношений краевой задачи (11), (12) в аналитической форме методами компьютерной алгебры. Из анализа структуры краевой задачи (11), (12) априори выходит, что вторыми гармониками исследуемых линейных локализованных волн являются волны P-SV типа. При этом вторые гармоники для материала слоя представляются в виде суммы частного и общего решения соответствующей неоднородной краевой задачи, а для полупространств ангармоническое возмущение описывается лишь общим решением задачи для системы однородных дифференциальных уравнений.

Структура аналитического решения задачи поиска упругих волновых перемещений  $u_j^{(n,p)}$  ( $j = 1, j = 3$ ) в нелинейных вторых гармониках исследуемых волн может быть записана в форме:

$$\begin{aligned}
 u_1^{(1,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\lambda}_{11} \cos(\zeta_1^{(1)} x_3) + \tilde{\lambda}_{12} \cos(\zeta_2^{(1)} x_3)) + \tilde{\mu}_{11} \sin(\zeta_1^{(1)} x_3) + \tilde{\mu}_{12} \sin(\zeta_2^{(1)} x_3) + \\
 &\quad + \tilde{\nu}_1 + \tilde{\chi}_1 \cos(2\alpha^{(1)} x_3) + \tilde{\xi}_1 \sin(2\alpha^{(1)} x_3) \exp(-2i(\omega t - kx_1)), \\
 u_3^{(1,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\lambda}_{31} \sin(\zeta_1^{(1)} x_3) + \tilde{\lambda}_{32} \sin(\zeta_2^{(1)} x_3) + \tilde{\mu}_{31} \cos(\zeta_1^{(1)} x_3) + \tilde{\mu}_{32} \cos(\zeta_2^{(1)} x_3) + \\
 &\quad + \tilde{\nu}_3 + \tilde{\chi}_3 \sin(2\alpha^{(1)} x_3) + \tilde{\xi}_3 \cos(2\alpha^{(1)} x_3) \exp(-2i(\omega t - kx_1)), \quad (13) \\
 u_1^{(2,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\beta}_{11}^{(2)} \exp(\zeta_1^{(2)} x_3) + \tilde{\beta}_{12}^{(2)} \exp(\zeta_2^{(2)} x_3)) \exp(-2i(\omega t - kx_1)), \\
 u_3^{(2,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\beta}_{31}^{(2)} \exp(\zeta_1^{(2)} x_3) + \tilde{\beta}_{32}^{(2)} \exp(\zeta_2^{(2)} x_3)) \exp(-2i(\omega t - kx_1)), \\
 u_1^{(3,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\beta}_{11}^{(3)} \exp(\zeta_1^{(3)} x_3) + \tilde{\beta}_{12}^{(3)} \exp(\zeta_2^{(3)} x_3)) \exp(-2i(\omega t - kx_1)), \\
 u_3^{(3,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\beta}_{31}^{(3)} \exp(\zeta_1^{(3)} x_3) + \tilde{\beta}_{32}^{(3)} \exp(\zeta_2^{(3)} x_3)) \exp(-2i(\omega t - kx_1)).
 \end{aligned}$$

Коэффициенты  $\tilde{\lambda}_{ij}$ ,  $\tilde{\mu}_{ij}$ ,  $\tilde{\beta}_{ij}^{(p)}$  в представлении общего решения и коэффициенты  $\nu_i$ ,  $\chi_i$ ,  $\xi_i$  в представлении частного решения получены в аналитической форме методами компьютерной алгебры и имеют крайне громоздкие выражения.

#### 4. Анализ численных результатов.

Анализ отдельных свойств кинематических характеристик нелинейных вторых гармоник исследуемых локализованных волн проводился для волновода, состоящего из слоя  $V_1$  хлорида натрия, размещенного между кремниевыми полупространствами  $V_2$  и  $V_3$ . Физико-механические свойства используемых материалов характеризуются следующими независимыми упругими константами и плотностью [1]:

$$\begin{aligned}
 \text{монокристалл NaCl} - c_{11}^{(1)} &= 4,958c_*, c_{12}^{(1)} = 1,306c_*, c_{44}^{(1)} = 1,279c_*, \\
 c_{111}^{(1)} &= -86,36c_*, c_{112}^{(1)} = -4,96c_*, c_{123}^{(1)} = 0,93c_*, c_{144}^{(1)} = 1,32c_*, \\
 c_{456}^{(1)} &= 0,71c_*, c_{155}^{(1)} = -5,87c_*, \rho_1 = 2,1678\rho_*; \text{монокристалл Si} - c_{11}^{(2)} = 16,7c_*, \\
 c_{12}^{(2)} &= 7,9c_*, c_{44}^{(2)} = 6,5c_*, \\
 c_{111}^{(2)} &= -82,5c_*, c_{112}^{(2)} = -45,1c_*, c_{123}^{(2)} = -6,4c_*, c_{144}^{(2)} = 1,2c_*, \\
 c_{456}^{(2)} &= -6,4c_*, c_{155}^{(2)} = -31,0c_*, \rho_2 = 2,33\rho_*;
 \end{aligned}$$

Величины параметров  $c_*$ ,  $\rho_*$  составляют  $c_* = 10^{10}$  ( $N/m^2$ ),  $\rho_* = 10^3$  ( $kg/m^3$ ).

Для определения ряда характеристик исследуемых нелинейных волновых эффектов проведены расчеты распределений нормированных амплитуд упругих сдвиговых колебаний  $|u_2^{(l)}|/u_2^{(0)}$  в линейных локализованных в слое SH волнах и распределений соответствующих характеристик  $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ ,  $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$  для их вторых гармоник вдоль толщинной координаты  $x_3$  волновода в зоне слоя  $x_3/h \in [-1; 1]$  и полупространств  $x_3/h \in [-5; -1] \cup (1; 5]$ .

Нормированные функции интенсивности сдвиговых колебаний  $|u_2^{(l)}|/u_2^{(0)}$  и интенсивности нелинейных ангармонических возмущений  $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ ,  $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ , соответственно представлены на рис. 1 и на рис. 2 - рис. 3 для волн приведенных частот  $\Omega(k_1) = 3$  и  $\Omega(k_2) = 3$ , которые принадлежат двум нижним ветвям дисперсионного спектра  $q \in \{1; 2\}$ .

Стоит отметить, что амплитуды нелинейных вторых гармоник пропорциональны квадрату нормирующего множителя  $u_2^{(0)}$ , который для локализованных SH волн с реальными параметрами интенсивности при  $\delta \ll 1$  является малой величиной. Таким образом, реальный уровень нелинейных ангармонических эффектов может быть оценен при указании конкретного значения малой амплитуды линейной локализованной SH волны.

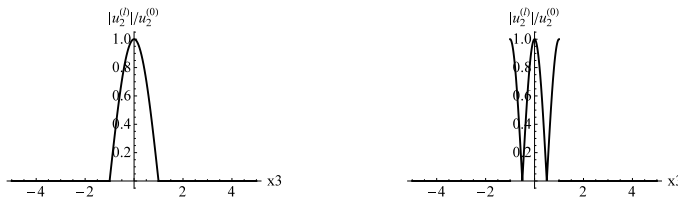


Рис. 1. Распределение нормированных значений  $|u_2^{(l)}|/u_2^{(0)}$  для мод  $q = 1, q = 2$

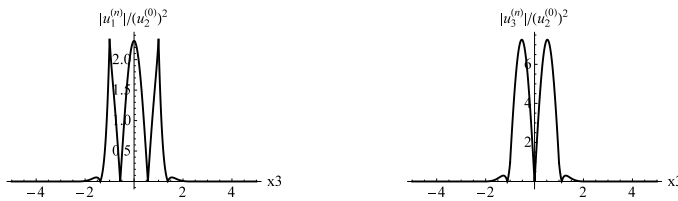


Рис. 2. Распределение нормированных значений  $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ ,  $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$  при  $\Omega_1 = 3$

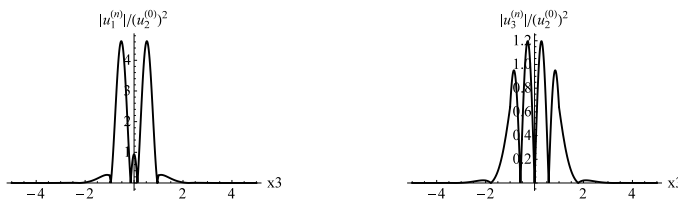


Рис. 3. Распределение нормированных значений  $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ ,  $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$  при  $\Omega_2 = 3$

Рис.1 показывает ситуацию локализации линейной сдвиговой волны исключительно в слое и полное отсутствие перемещений в полупространствах. Однако учет геометрической и физической нелинейности компонент волновода демонстрирует

существование волновых движений удвоенной частоты (нелинейных вторых гармоник) в полупространствах с локализацией около контактных поверхностей.

В распределениях  $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ ,  $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$  общим априорным свойством является угасание интенсивности волновых смещений при отходе от границы  $x_3 = \pm 1$  вглубь полупространств. для случая нижней ветви моды ( $q = 1$ ) наблюдается доминирование SV-компоненты. Максимумы интенсивности  $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$  характеризуются тремя пиками, которые расположены в центре слоя и в зонах контакта материалов слоя и полупространств. Наибольшие значения  $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$  достигаются в зонах контакта компонент волновода и в количественном значении превышают максимумы  $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$  в три раза.

Исследование  $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ ,  $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$  для второй ветви моды ( $q = 2$ ) показывает наличие двух пиков максимума для компоненты  $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$  и четырех скачков, локализованных в зоне слоя и на границе контакта материалов, для  $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ . Сопоставление амплитуд  $|u_1^{(n)}|/|u_3^{(n)}|$  свидетельствует о доминировании Р-компоненты.

### Цитированная литература

1. Блистанов А.А., Бондаренко В.С., Переломова Н.В. и др. Акустические кристаллы: Справочник / Под ред. М. П. Шаскольской. – М.: Наука, 1982. – 632 с.
2. Красильников В.А., Лямов В.Е. Нелинейное взаимодействие упругих волн в кристаллах и обработка сигнальной информации // Акуст. журн. – 1973. – Т. 19, № 5. – С. 801–804.
3. Русичицкий Я.Я. Особливості розвитку теорії пружних нелінійних хвиль // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – Т. 46, № 3. – С. 90–105.
4. Шевченко В.П., Жоголева Н.В. Нелінійні другі гармоніки локалізованих хвиль зсуву в анізотропному шарі між анізотропними півпросторами за умов неідеального контакту / Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – Т. 59, № 3. – С. 169–179.
5. Kurennaia K.I., Storozhev V.I. Nonlinear acoustic effects while spreading of the normal waves in anisotropic elastic layer // In: Proc. 10th International Congress on Sound and Vibration (Stockholm, Sweden, 7–10 July 2003). – Stockholm: IIAV, 2003. – Vol. 7. – P. 3605–3612.
6. Storozhev V.I., Kuslivaya A.A. Nonlinear anharmonic effects for normal waves in monocrystal anisotropic germanium layer with flexible not extensible coverings of sides // In: Proc. 9th Conference on Dynamical Systems: Theory and Applications (December 17–20, 2007), Lodz, Poland. – 2007. – Vol. 1. – P. 433–440.

### References

1. Blistanov, A.A., Bondarenko, V.S., Perelomova, N.V. and others. (1982). Acoustic crystals: manual. Edited by M.P. Shashkol'skaya. M.: Science, 632 p. (in Russian).
2. Krasil'nikov, V.A., Lyamov, V.E. (1973). Nonlinear interaction of elastic waves in crystals and signal information processing. Acoust. journal, 19, № 5, pp. 801–804 (in Russian).
3. Rushtchitsky, J.J. (2003). Features of the development of the theory of elastic nonlinear waves. Math. methods and phys.-mech. fields, 46, № 3, pp. 90–105 (in Ukrainian).
4. Shevchenko, V.P., Zhogoleva, N.V. (2016). Nonlinear second harmonics of localized shear waves in anisotropic layer between anisotropic halfspaces under condition of imperfect contact. Math. methods and phys.-mech. fields, Vol. 59, № 3, pp. 169–179 (in Ukrainian).
5. Kurennaia, K.I., Storozhev, V.I. (2003). Nonlinear acoustic effects while spreading of the normal waves in anisotropic elastic layer. In: Proc. 10th International Congress on Sound and Vibration (Stockholm, Sweden, 7–10 July 2003). Stockholm: IIAV, Vol. 7, pp. 3605–3612.

6. Storozhev, V.I., Kuslivaya, A.A. (2007). Nonlinear anharmonic effects for normal waves in mono-crystal anisotropic germanium layer with flexible not extensible coverings of sides. In: Proc. 9th Conference on Dynamical Systems: Theory and Applications (December 17–20, 2007), Lodz, Poland, Vol. 1, pp. 433–440.

**N. V. Zhogoleva, V. P. Shevchenko**

**The analysis of localised SH waves second harmonics in anisotropic layer between half-spaces under the sliding contact of materials.**

The model of geometrically and physically nonlinear deformation of anisotropic elastic medium is used in this work. A theoretical numerical-analytic solution of the boundary value problem of determining nonlinear anharmonic disturbances that are generated because of localized shear waves propagation in a waveguide in the form of a single-crystal layer of the  $m\bar{3}m$  class of a cubic system localised with nonideal slipping mechanical contact between the same half-spaces of a single-crystal material of  $m\bar{3}m$  class of a cubic system is constructed. Numerical investigations have been carried out for a combination of waveguide materials: a layer of sodium chloride between half-spaces of silicon. Amplitude-frequency dependences for kinematic characteristics of elastic wave displacements of shear waves and their nonlinear second harmonics are researched and generalized. The effects of influence of physical and mechanical characteristics of waveguide structure on amplitude levels and forms of nonlinear second harmonics wave movements of the investigated localized elastic waves are analyzed.

**Keywords:** *geometrical and physical nonlinearity, anharmonic effects, nonlinear second harmonic of localized waves, anisotropic layer between the anisotropic half-spaces.*

**Н. В. Жоголева, В. П. Шевченко**

**Аналіз других гармонік локалізованих SH хвиль в анізотропному шарі між півпросторами при ковзному контакті матеріалів.**

В роботі використовується модель геометрично та фізично нелінійного деформування анізотропного пружного середовища. Побудовано теоретичний чисельно-аналітичний розв'язок крайової задачі визначення нелінійних ангармонічних збурень, які генеруються при поширенні локалізованих зсувних хвиль в хвилеводі у вигляді шару з монокристала класу  $m\bar{3}m$  кубічної системи, вміщеного з неідеальним ковзним механічним контактом між однотипними півпросторами монокристалічного матеріалу класу  $m\bar{3}m$  кубічної системи. Числові дослідження проведені для комбінації матеріалів хвилеводу – шар хлориду натрію між півпросторами з матеріалу кремнію. Досліджено та узагальнено амплітудно-частотні залежності для кінематичних характеристик пружних хвильових зсувів SH хвиль та їх нелінійних других гармонік. Проаналізовано ефекти впливу фізико-механічних характеристик хвилеводної структури на амплітудні рівні і форми хвильових рухів нелінійних других гармонік досліджуваних локалізованих пружних хвиль.

**Ключові слова:** *геометрична та фізична нелінійність, ангармонічні ефекти, нелінійні другі гармоніки локалізованих хвиль, анізотропний шар між анізотропними півпросторами.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Славянск  
Донецкий нац. ун-т им. Василя Стуса, Винница  
*zhogoleva.nadia@gmail.com*

Получено 19.04.18