УДК 531.38
DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-7

©2019. **Н.В. Жоголева, В.Ф. Щербак**

АСИМПТОТИЧНЕ ОЦІНЮВАННЯ СТАНУ ТА ЖОРСТКОСТІ ОСЦИЛЯТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ

Розглянуто задачу спостереження та ідентифікації математичної моделі осцилятора ван дер Поля. Шукані невідомі характеризують швидкість коливань та жорсткість осцилятора. Такі моделі виникають при спрощеному моделюванні багатьох складних фізичних, біологічних нелінійних процесів, що мають циклічний характер і для яких актуальною є задача відновлення характеристик коливань в режимі реального часу за даними вимірювань. Для побудови відповідних схем спостереження та ідентифікації використано метод синтезу інваріантних співвідношень, розроблений для розв'язку обернених задач математичної теорії керування. Метод дозволяє формувати скінченні співвідношення, які визначають шукані невідомі як функції від відомих величин на траєкторіях досліджуваної системи в процесі її функціювання. Для вихідної задачі побудовано нелінійний спостерігач та ідентифікатор, за допомогою яких знаходяться асимптотичні оцінки шуканого параметра і повного фазового вектора за даними про залежність від часу положення осцилятора ван дер Поля.

MSC: 34A60,34D20, 34N05.
Ключові слова: *нелінійний спостерігач, ідентифікація, інваріантні співвідношення, осцилятор ван дер Поля.*

1. Вступ.

У багатьох прикладних дослідженнях фізики, біології та інших наук в якості наближеною моделі складних нелінійних процесів використовується підхід, який засновано на концепції модельних рівнянь. В основі такої концепції лежить положення про те, що невелике число характерних типів рухів (патернів), властивих простим математичним моделям та/або їх комбінаціям, дає ключ до розуміння природи багатьох складних явищ. При цьому апріорі передбачається, що все фізичне різноманіття динамічних взаємозв'язків в досліджуваній системі може бути представлено у формі досить простих модельних рівнянь. Оскільки такі базові моделі окремо добре вивчені та їх параметри мають фізичну інтерпретацію, то це сприяє якісному дослідженню на цій основі складних систем різної природи.

Приміром, у багатьох прикладних дослідженнях коливальний рух різних систем, який має явно виражений нелінійний характер, моделюється системою, що складається з одного або декількох пов'язаних між собою осциляторів ван дер Поля [1]. Системи такого роду досить широко представлені, наприклад, при дослідженні та моделюванні біологічних функцій організму, таких як серцева діяльність, дихання, локомоторна активність [2], [3]. У зв'язку з появою пристроїв, які відстежують і регулюють стан та параметри патернів живих організмів, задача визначення в реальному масштабі часу характеристик таких систем за результатами вимірювання вихідних сигналів є актуальною [4], [5]. Проблеми ідентифікації параметрів коливальних пристроїв виникають також у зв'язку з розвитком різних технічних смарт-систем. Зокрема, в сучасних інтелектуальних електронно-обчислювальних MEMS-системах широко застосовуються мініатюрні електромеханічні елементи, резонатори - нелінійні осцилятори з параметрами, які треба налаштовувати [6].

Одна із притаманних для таких ситуацій задача про визначення характеристик модельної системи, а саме, задача знаходження повного вектора стану та ідентифікації параметра, що характеризує жорсткість пружини осцилятора ван дер Поля за інформацією про рух, розглянута в даній статті. Для отримання асимптотичних оцінок невідомих використовується розроблений в аналітичній механіці метод інваріантних співвідношень [7], модифікація якого в задачах математичної теорії керування дозволяє синтезувати додаткові зв'язки між відомими і невідомими величинами [8]. Метод не передбачає лінеаризації вихідної системи і є суттєво нелінійним.

2. Задача визначення характеристик осцилятора ван дер Поля.

Розглянемо рівняння ван дер Поля, які описують процес релаксаційних коливань [1]

$$\ddot{s} + \mu(1 - s^2)\dot{s} + \omega^2 s = 0. \tag{1}$$

Тут s – відхилення точки від положення рівноваги, μ - коефіцієнт при нелінійній складовій рівняння, який характеризує величину змінного демпфірування, $\mu \geqslant 0$. Режим $\mu = 0$ відповідає коливанням без тертя і описується рівнянням гармонічного осцилятора з власною частотою ω. Однією із задач, що виникають при вивченні та спрощеному моделюванні нелінійних коливальних процесів за допомогою осциляторних систем, в припущенні, що значення $s(t)$ доступні вимірюванню, є задача визначення невідомої компоненти фазового вектора $\dot{s}(t)$ – швидкості коливань і параметра ω – жорсткості осцилятора.

Позначимо $s_1 = s,\ s_2 = \dot{s}$ і перепишемо (1) у вигляді системи

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= s_2, \\ \dot{s}_2 &= -\omega^2 s_1 + \mu(1 - s_1^2)s_2, \\ y &= s_1(t). \end{aligned} \tag{2}$$

Розглянемо задачу знаходження невідомих $s_2(t)$ і ω як класичну задачу спостереження і одночасної ідентифікації системи (2) за відомою інформацією про рух, $y(t) = s_1(t)$ [9]. Такою інформацією є вихід - функція $y(t)$, а також ті величини, які можуть бути отримані з використанням тільки лише значень виходу. Зокрема, далі відомим будемо вважати будь-яке рішення задачі Коші для системи диференціальних рівнянь

$$\dot{\xi} = U(\xi, x_1(t)),\ \xi(0) = \xi_0 \in R^p,\ p \geqslant 1, \tag{3}$$

в якій функції $U(\xi, x_1)$ задовольняють умовам теорем існування та єдиності рішень для $t \in [0, \infty)$.

Застосовуючи до системи (2) перетворення Лієнара [10]

$$x_1 = s_1,\ x_2 = s_2 + \mu(s_1^3/3 - s_1), \tag{4}$$

отримуємо систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \mu(x_1 - x_1^3/3), \\ \dot{x}_2 &= -\omega^2 x_1, \\ y &= x_1(t). \end{aligned} \tag{5}$$

Оскільки: вихід системи (2) $s_1(t)$ збігається з $x_1(t)$-виходом системи (5); шукана змінна s_2 виражається через x_2 за формулою $s_2 = x_2 - \mu(x_1^3/3 - x_1)$; параметр ω один і той же для обох систем, то далі будемо розглядати таку задачу.

Задача. Знайти асимптотично точні оцінки змінної $x_2(t)$ і параметра ω системи (5) по відомим значенням виходу $y = x_1(t)$.

Достатньою умовою локальної спостережливості та ідентифікованості [9] системи (5) є факт невиродження якобієвої матриці $J = \partial(\dot{y}, \ddot{y})/\partial(x_2, \omega)$, де похідні від функції виходу $y(t) = x_1(t)$ взяті в силу системи (5). Оскільки $\det J = -2\omega x_1$, то система є ідентифікованою тільки на інтервалах знакосталості $x_1(t)$. Тому далі будемо вважати виконаним більш сильну умову ідентифікованості.

Припущення. Будемо вважати, що в процесі виконання сформульованої задачі значення виходу відокремлено від нуля досить малою сталою $\delta > 0$.

У загальному випадку природним є порушення умови $|x_1(t)| > \delta$. Тоді, якщо виход не дорівнює тотожно нулю, величина δ завжди може бути підібрана так, що існує деяка послідовність часових інтервалів T_α, на кожному з яких умову знакосталості виходу $x_1(t)$ виконано. Пропонована нижче схема рішення задачі передбачає послідовне поліпшення оцінок шуканих невідомих на кожному з таких інтервалів.

3. Синтез додаткових співвідношень.

Для вирішення вихідної задачі спостереження та ідентифікації будемо використовувати метод синтезу інваріантних співвідношень, який дозволяє отримувати в процесі функціонування системи асимптотичні оцінки невідомих [8]. Суть цього підходу полягає в динамічному розширенні вихідної системи диференціальних рівнянь (5) рівняннями (3), де p дорівнює 2 – числу невідомих, а саме: функції $x_2(t)$ і сталої ω. При цьому праві частини $U(\xi, x_1)$ підбираються таким чином, щоб отримана розширена система диференціальних рівнянь (3), (5) допускала сім'ю інваріантних співвідношень

$$F_i(x_1, x_2, \xi, \omega) = 0,\ i = 1, 2, \tag{6}$$

з наступними властивостями:

1) Співвідношення (6) формують додаткові незалежні рівняння для невідомих, тобто $rank \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x_2, \omega)} = 2$;

2) Відповідний до рівностей (6) інваріантний многовид

$$M = \{(x_1, x_2, \xi) \subseteq R^{2+p}: \ F_i(x_1, x_2, \xi, \omega) = 0, \ i = 1, 2\}$$

має властивість глобального тяжіння для будь-яких рішень розширеної системи (3), (5). Іншими словами, на будь-якому рішенні

$$\lim_{t\to\infty} F_i(x_1(t), x_2(t), \xi(t), \omega) = 0, \ i = 1, 2.$$

4. Існування інваріанних співвідношень.

Покажемо, що для даної задачі інваріантні співвідношення виду (6) існують. Щоб властивість 1) було виконано у всій розглянутій області шукатимемо їх у вигляді

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \xi, \omega) = x_2 - \xi_1 - \Psi_1(x_1) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \xi, \omega) = \omega^2 - \xi_2 - \Psi_2(x_1) = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

де $\xi_1(t), \xi_2(t)$ є рішеннями системи диференціальних рівнянь (3).

На функції $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1), U_1(\xi_1, \xi_2, x_1), U_2(\xi_1, \xi_2, x_1)$ поки не накладаємо ніяких обмежень, окрім вимоги безперервної диференційованості по своїх аргументах у розглянутій області. Якщо ці функції обрані так, що співвідношення (7) стають інваріантними на даному рішенні, то тоді невідомі $x_2(t), \omega$ можуть бути знайдені безпосередньо з рівностей (7).

Твердження 1. *Для будь-яких диференційовних функцій $\Psi_1(x_1)$, $\Psi_2(x_1)$ існують керування $U_1(\xi_1, \xi_2, x_1), U_2(\xi_1, \xi_2, x_1)$ такі, що рівності (7) виконуються тотожно на деяких рішеннях розширеної системи диференціальних рівнянь (3), (5).*

Доказ. Введемо змінні $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, які характеризують невязку в формулах (7) на рішеннях системи (3),(5).

$$x_2(t) - \xi_1(t) - \Psi_1(x_1(t)) = \varepsilon_1, \quad \omega^2 - \xi_2(t) - \Psi_2(x_1(t)) = \varepsilon_2. \tag{8}$$

Диференціюючи (8) в силу системи (3), (5), отримуємо диференціальні рівняння для відхилень

$$\begin{aligned} \dot\varepsilon_1 &= -U_1 - \Psi_1'(x_1)[\varepsilon_1 + \xi_1 + \Psi_1(x_1) + \mu(x_1 - x_1^3/3)] - x_1(\varepsilon_2 + \xi_2 + \Psi_2(x_1), \\ \dot\varepsilon_2 &= -U_2 - \Psi_2'(x_1)[\xi_1 + \varepsilon_1 + \Psi_1(x_1) + \mu(x_1 - x_1^3/3)], \end{aligned} \tag{9}$$

де знак $'$ означає операцію диференціювання.

Щоб рівності (7) виконувалися тотожно на деяких рішеннях системи диференціальних рівнянь (3), (5) досить показати, що система диференціальних рівнянь (9) допускає тривіальне рішення $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) \equiv 0$.

Для цього накладемо обмеження на частину вільних функцій, а саме: зафіксуємо вигляд правих частин допоміжньої системи диференіальних рівнянь (3)

$$\begin{aligned} \dot\xi_1 &= U_1(\xi_1, \xi_2, x_1) = -\Psi_1'(x_1)[\xi_1 + \Psi_1(x_1) + \mu(x_1 - x_1^3/3)] - x_1(\xi_2 + \Psi_2(x_1)), \\ \dot\xi_2 &= U_2(\xi_1, \xi_2, x_1) = -\Psi_2'(x_1)[\xi_1 + \Psi_1(x_1) + \mu(x_1 - x_1^3/3)]. \end{aligned} \tag{10}$$

В результаті система диференціальних рівнянь для відхилень $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ стає однорідною

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= -{\Psi_1}'(x_1)\varepsilon_1 - x_1\varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon}_2 &= -{\Psi_2}'(x_1)\varepsilon_1, \end{aligned} \tag{11}$$

тобто вона допускає тривіальне рішення. *Твердження доведено.*□

Таким чином, можна стверджувати, що для будь-яких $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$ початкові значення $\xi_1(0), \xi_2(0)$ в задачі Коші для диференціальних рівнянь (10) можуть бути обрані таким чином, що в момент $t = 0$ формули (7) стають вірними рівностями. Зокрема, це означало б, що початкові значення для відхилень $\varepsilon_1(0) = \varepsilon_2(0)$ дорівнюють нулю. В цьому випадку рівності (7) для цієї траєкторії розширеної системи (3), (5) виконуються тотожно, утворюючи тим самим систему додаткових рівнянь, в яких єдиними невідомими залишаються $x_2(t), \omega$.

У загальному випадку здійснити такий вибір $\xi_1(0), \xi_2(0)$ не вдається, оскільки для цього необхідно знати значення $x_2(0), \omega$, які, власне, і є шуканими величинами. Для того, щоб використовувати формули (7) для оцінки $x_2(t), \omega$ на будь-якому рішенні системи (3), (5) потрібно з множини функцій $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$ вибрати такі, при яких тривіальне рішення системи (11) мало б властивість глобальної асимптотичної стійкості.

5. Стабілізація відхилень.

Розглянемо задачу підбору поки ще невизначених функцій $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$ з метою забезпечення глобальної асимптотичної стійкості тривіального рішення системи (11). Введемо позначення:

$$V_1(x_1) = -{\Psi_1}'(x_1), \quad V_2(x_1) = -{\Psi_2}'(x_1)$$

і перепишемо систему (11) у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= V_1(x_1)\varepsilon_1 - x_1\varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon}_2 &= V_2(x_1)\varepsilon_1. \end{aligned} \tag{12}$$

В силу наявної свободи на вибір функції $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$ будемо розглядати задачу визначення функцій $V_1(x_1), V_2(x_1)$ як задачу синтезу управлінь, за якими тривіальне рішення системи (12) стає глобально асимптотично стійким.

Твердження 2. *Нехай значення абсолютної величини виходу системи (5) протягом всього процесу вимірювань відокремлені від нуля,* $|x_1(t)| \geq x_{min} > 0$. *Тоді існують* $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$, *такі, що в фазовому просторі розширеної системи диференціальних рівнянь (5), (10) існує інваріантний многовид* M, *який визначається співвідношеннями (7) і має властивість глобального тяжіння для всіх траєкторій даної системи.*

Доказ. Доказ проведемо в два етапи. На першому з них знайдемо сім'ю управлінь $V_1(x_1), V_2(x_1)$, при яких змінні $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ пов'язані однорідним інваріантним співвідношенням. На другому етапі за допомогою відповідного синтезу керуючих функцій забезпечимо це однорідне співвідношення властивістю тяжіння для траєкторій (12) в просторі $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Далі підберемо вільні функції таким чином, щоб одна із змінних $\varepsilon_i, i = 1, 2$ прямувала до нуля. Тоді наявність такого однорідного співвідношення автоматично забезпечить прямування до нуля іншої координати.

Зажадаємо спочатку, щоб рівняння (12) мали лінійний інваріантний многовид виду $\{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_2 = k\varepsilon_1\}$, де k – стала, така, що $\operatorname{sign} k = -\operatorname{sign} x_1(t)$. У загальному випадку траєкторії (12) не знаходяться на цій прямій, тому введемо також змінну η - відхилення траєкторій від цього многовиду:

$$\varepsilon_2 = k\varepsilon_1 + \eta.$$

Замінивши у рівняннях (12) змінну ε_2 на η, перепишемо їх у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= (V_1(x_1) - kx_1)\varepsilon_1 - x_1\eta, \\ \dot{\eta} &= kx_1\eta + (V_2(x_1) - kV_1(x_1) + k^2x_1)\varepsilon_1. \end{aligned} \tag{13}$$

Розглянемо в якості функції Ляпунова вираз

$$V = \frac{1}{2}(\varepsilon_1^2 + \eta^2)$$

і обчислимо його похідну, взяту в силу системи диференціальних рівнянь (13). Отримуємо

$$\dot{V} = (V_1 - kx_1)\varepsilon_1^2 + [V_2 - kV_1 + (k^2 - 1)x_1]\varepsilon\eta + kx_1\eta^2.$$

На другому етапі будемо вимагати, щоб невизначені поки величини $V_1(x_1), V_2(x_1)$ задовольняли наступним рівностям

$$V_1 = kx_1 - 1, \quad V_2 = k + x_1. \tag{14}$$

Тоді

$$\dot{V} \leq -(\varepsilon_1^2 + |kx_1|\eta^2),$$

що за умови $|x_1(t)| \geq x_{min} > 0$ дозволяє стверджувати: змінні $\varepsilon_1(t), \eta(t)$ асимптотично прямують до нуля. Оскільки при цьому виконується рівність $\varepsilon_2(t) = k\varepsilon_1(t) + \eta(t)$, то змінна $\varepsilon_2(t)$ також прямує до нуля. А це означає, що многовид M, який породжено інваріантними співвідношеннями (7) є притягуючим для всіх траєкторій розширеної системи диференціальних рівнянь (3), (10). *Твердження доведено.*□

6. Спостерігач.

Сформуємо остаточний вигляд рівнянь, що реалізують запропоновану схему рішення задачі спостереження та ідентифікації. Для цього визначемо остаточній вигляд вільних функцій, щоб задовольнити усі наведені вище обмеження. Передбачається, що вихідна задача вирішується на часовому інтервалі, при якому значення виходу $|x_1(t)| \geq x_{min}$.

Оскільки $V_1(x_1) = -\Psi_1{}'(x_1)$, $V_2(x_1) = -\Psi_2{}'(x_1)$, то з урахуванням (14) покладемо

$$\Psi_1 = k\frac{x_1^2}{2} - x_1, \quad \Psi_2 = \frac{x_1^2}{2} + kx_1. \tag{15}$$

Тоді асимптотичні оцінки невідомих отримуємо за формулами

$$x_2(t) = \xi_1(t) + k\frac{x_1^2}{2} - x_1, \quad \omega^2 = \xi_2(t) + \frac{x_1^2}{2} + kx_1, \tag{16}$$

де змінні $\xi_1(t), \xi_2(t)$ задовольняють додатковим диференціальним рівнянням (10) з будь-якими початковими значеннями $\xi_1(0), \xi_2(0)$.

З урахуванням перетворення Ліенара остаточно маємо оцінку для швидкості коливань вихідної системи

$$s_2(t) = x_2(t) - \mu(s_1^3(t)/3 - s_1(t)).$$

7. Висновки.

Розглянуто задачу спостереження стану і одночасної ідентифікації параметра, що характеризує жорсткість пружного зв'язку для осцілятора ван дер Поля. Запропоновано метод побудови нелінійного ідентифікатора, який дозволяє отримувати асимптотичні оцінки шуканих невідомих за результатами вимірювання вихідного сигналу в реальному масштабі часу. Використовується розроблений в аналітичній механіці метод інваріантних співвідношень, який в задачах управління дозволяє синтезувати додаткові зв'язки між відомими і невідомими величинами. Розроблений підхід асимптотичного оцінювання в подальшому буде використано в задачах адаптивного керування характером коливань осциляторних мереж.

Цитована література

1. *Кузнецов А.П., Селиверстова Е.С., Трубецков Д.И., Тюрюкина Л.В.* Феномен уравнения ван дер Поля // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2014. – Т. 22, № 4. – С. 3–42.
2. *Bernardo D.D., Signorini M. G., Cerutti S.* A model of two non-linear coupled oscillators for the study of heartbeat dynamics // Int. J. Bifurcation Chaos. – 1998. – 8. – P. 1975–1985.
3. *Grudzinski K., Zebrowski J.J.* Modeling cardiac pacemakers with relaxation oscillators // Physica A 336. – 2004. – P. 153–162.
4. *Brandt M. E., G.Wang, H-T Shih.* Feedback control of a nonlinear dual-oscillator heartbeat model. – Bifurcation Control.– Eds. G. Chen, D. J. Hill, X. Yu. – Springer. –2003. – P. 265–273.
5. *Aoyagi T.* Network of neural oscillators for retrieving phase information // Phys. Rev. Lett. – 1995. – Vol. 74. – P. 4075–4078.
6. *Hoppensteadt F.C, Izhikevich E.M.* Synchronization of MEMS resonators and mechanical neurocomputing // Transactions on circuits and systems. – 2001. – Vol. 48. – P. 133–138.
7. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
8. *Жоголева Н.В., Щербак В.Ф.* Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления // Труды ИПММ НАН Украины. – 2015. – Т. 29. – С. 69–76.
9. *Ковалев А.М., Щербак В.Ф.* Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1993.

10. *Lienard A.* Etude des oscillations entretenues // Revue generale de l'electricite. – 1928. – V. 23.

References

1. Kuznetsov, A.P., Seliverstova, E.S., Trubetskov, D.I., Tyuryukina, L.V. (2014). The phenomenon of van der Pol's equation. *Izvestiya Vuzov. Prikladnaja nelinejnaja dynamika, 22*(4), 3-42 (in Russian).
2. Grudzinski, K., Zebrowski, J.J. (2004). Modeling cardiac pacemakers with relaxation oscillators. *Physica A 336*, 153-162.
3. Bernardo, D.D., Signorini, M.G., Cerutti, S. (1998). A model of two non-linear coupled oscillators for the study of heartbeat dynamics. *Int. J. Bifurcation Chaos, 8*, 1975-1985.
4. Brandt, M.E., Wang, G., Shih, H-T. (2003). *Feedback control of a nonlinear dual-oscillator heartbeat model. Bifurcation Control.* Eds. G. Chen, D. J. Hill, X. Yu. Springer, 265-273.
5. Aoyagi, T. (1995). Network of neural oscillators for retrieving phase information. *Phys. Rev. Lett., 74*(20), 4075–4078.
6. Hoppensteadt, F.C, Izhikevich, E.M. (2001). Synchronization of MEMS resonators and mechanical neurocomputing. *Transactions on circuits and systems, 48*, 133–138.
7. Kharlamov, P.V. (1974). Ob invariantnykh sootnosheniyakh sistemy differentsial'nykh uravneniy. *Mekhanika tverdogo tela, 6*, 15-24 (in Russian).
8. Zhogoleva, N.V., Shcherbak, V.F. (2015). Sintez dopolnitel'nykh sootnosheniy v obratnykh zadachakh upravleniya. *Proc. IAMM NASU, 29*, 69-76.
9. Kovalev, A.M., Shcherbak, V.F. (1993). *Upravlyayemost', nablyudayemost', identifitsiruyemost' dinamicheskikh sistem.* Kiyev: Nauk. dumka.
10. Lienard, A. Etude des oscillations entretenues. (1928). *Revue generale de l'electricite, 23.*

N.V. Zhogoleva, V.F. Shcherbak

Asymptotic evaluation of the state and stiffness of the van der Paul oscillator.

In many applications of physics, biology, and other sciences, an approach based on the concept of model equations is used as an approximate model of complex nonlinear processes. The basis of this concept is the provision that a small number of characteristic types movements of simple mathematical models inherent in systems gives the key to understanding and exploring a huge number of different phenomena. With this approach it is a priori assumed that the entire physical diverseness can be represented in the form of fairly simple model equations. It is contributes to a qualitative study of complex systems for various physical nature since basic models individually are well studied, their parameters have a physical interpretation. In particular, it is well known that oscillatory motion of various systems with a stable limit cycle can be modeled by a system consisting of one or more coupled van der Pol oscillators. Such systems are widely represented in various technical devices and in the study and modeling of some biological functions of the body, such as cardiac activity, respiration, locomotor activity, etc. It is considered a typical situation for many practical applications of control theory when the complete state vector of the system is unknown and only some of the functions of the state variables – the outputs of the system are accessible to measurement. Therefore, the problem of determining in real time the state and parameters of such systems based on the results of measuring the output signals are relevant. One of these inverse control problems, namely, the problem of observability and parameter identification of an model oscillatory system is considered in this article. For observation and identification scheme design the method of invariant relations developed in analytical mechanics is used. Its modification in control problems allows us to synthesize additional relationships between known and unknown quantities of a dynamical system that arise during the observed motion. The method does not involve linearization of the original system and is essentially non-linear. The constructed nonlinear observer provides an asymptotic estimation of unknown parameter and velocity of oscillations.

Keywords: *nonlinear observer, identification, invariant relations, van der Pol oscillator.*

Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ
zhogoleva.nadia@gmail.com, scherbakvf@ukr.net

Отримано 05.09.19