УДК 514.172
DOI: 10.37069/1683-4720-2020-34-8

©2020. **Т.М. Осіпчук**

ТОПОЛОГІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ СЛАБКО m-ОПУКЛИХ МНОЖИН

У роботі вивчаються топологічні властивості класів узагальнено опуклих множин багатовимірного дійсного евклідового простору $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, які називаються m-опуклими і слабко m-опуклими, $1 \leq m < n$. Множина простору $\mathbb{R}^n$ називається ***m*-опуклою**, якщо для кожної точки з доповнення цієї множини до всього простору існує m-вимірна площина, яка проходить через цю точку й не перетинає заданої множини. Відкрита множина простору $\mathbb{R}^n$ називається ***слабко m-опуклою***, якщо для кожної точки межі множини існує m-вимірна площина, яка проходить через цю точку й не перетинає заданої множини. Замкнена множина простору $\mathbb{R}^n$ називається ***слабко m-опуклою***, якщо вона апроксимується ззовні сім'єю відкритих слабко m-опуклих множин. Ці поняття ввів Юрій Борисович Зелінський. Відома топологічна класифікація (слабко) $(n-1)$-опуклих множин простору $\mathbb{R}^n$ із гладкою межею: кожна така множина є опуклою, або складається не більше ніж зі двох необмежених компонент зв'язності, або подається декартовим добутком $E^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$, де E^1 підмножина $\mathbb{R}$. Довільна відкрита m-опукла множина, вочевидь, є слабко m-опуклою. Зворотнє твердження, взагалі кажучи, неправильне. Відомо, що існують відкриті множини у просторі $\mathbb{R}^n$, які є слабко $(n-1)$-опуклими, проте не $(n-1)$-опуклими, і що такі множини складаються не менше ніж із трьох компонент зв'язності. Основними результатами роботи є дві теореми. В першій встановлюється, що для компактних слабко $(n-1)$-опуклих і не $(n-1)$-опуклих множин у просторі $\mathbb{R}^n$, справедлива така ж оцінка знизу числа їх компонент зв'язності, як і у випадку відкритих множин. Для цього, зокрема, будуються приклади відкритих і замкнених слабко $(n-1)$-опуклих і не $(n-1)$-опуклих множин з трьома і більше компонентами зв'язності. А також доводиться, що довільна компактна слабко m-опукла і не m-опукла множина простору $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $1 \leq m < n$, може апроксимуватися ззовні сім'єю відкритих слабко m-опуклих і не m-опуклих множин з тим самим числом компонент зв'язності, що має замкнена. У другій теоремі встановлюється існування слабко m-опуклих і не m-опуклих, $1 \leq m < n-1$, $n \geq 3$, областей у просторах $\mathbb{R}^n$. Спочатку будуються приклади слабко 1-опуклих і не 1-опуклих областей $E^p \subset \mathbb{R}^p$ для довільного $p \geq 3$. А також доводиться, що область $E^p \times \mathbb{R}^{m-1} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $1 \leq m < n-1$, слабко m-опукла і не m-опукла.

MSC: 332F17, 52A30

Ключові слова: *опукла множина, m-опукла множина, слабко m-опукла множина, евклідів простір.*

1. Вступ.

Із опуклого аналізу відомо, що множина багатовимірного дійсного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ називається ***опуклою***, якщо разом із двома довільними своїми точками вона містить увесь відрізок, що їх сполучає [2]. При цьому перетин довільного числа опуклих множин — це знову опукла множина. Опуклий перетин усіх опуклих множин, які містять задану множину $X \subset \mathbb{R}^n$, називається ***опуклою оболонкою*** множини X [2].

Розгляньмо інший клас множин, який володіє тією властивістю, що перетин довільного числа множин класу знову належить цьому класу.

Довільний m-вимірний афінний підпростір простору $\mathbb{R}^n$, $1 \leq m < n$, називається ***m-площиною*** [1].

Означення 1.([9]) Множина $E \subset \mathbb{R}^n$ називається ***m-опуклою відносно точки*** $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, $1 \le m < n$, якщо існує m-площина L, така, що $x \in L$ і $L \cap E = \varnothing$.

Означення 2.([3]) Множина $E \subset \mathbb{R}^n$ називається ***m-опуклою***, $1 \le m < n$, якщо вона m-опукла відносно кожної точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

Нескладно переконатися в тому, що перетин m-опуклих множин – це знову m-опукла множина [10]. Далі використовуватимемо такі стандартні позначення. Для множини $G \subset \mathbb{R}^n$ нехай $\overline{G}$ – її замикання, $\operatorname{Int} G$ — її внутрішність, та $\partial G = \overline{G} \setminus \operatorname{Int} G$ – її межа.

Означення 3.([8]) Відкрита множина $E \subset \mathbb{R}^n$ називається ***слабко m-опуклою***, $1 \le m < n$, якщо вона m-опукла відносно кожної точки $x \in \partial E$.

Означення 4.([4]) Кажуть, що множина A *апроксимується ззовні* сім'єю відкритих множин A^k, $k = 1, 2, \ldots$, якщо $\overline{A^{k+1}}$ міститься в A^k й $A = \cap_k A^k$.

Нескладно показати, що множина простору $\mathbb{R}^n$, яка апроксимується ззовні сім'єю відкритих множин, замкнена.

Означення 5.([8]) Замкнена множина простору $\mathbb{R}^n$ називається ***слабко m-опуклою***, якщо вона апроксимується ззовні сім'єю відкритих слабко m-опуклих множин.

Таким чином, слабко m-опуклі множини відкриті або замкнені і серед замкнених слабко m-опуклих можна також виділити множини з порожньою внутрішністю:

$$A = \overline{A} = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A = \partial A.$$

Нехай $\mathbf{C^n_m}$ і $\mathbf{WC^n_m}$ – це класи відповідно m-опуклих і слабко m-опуклих множин у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$. Очевидно, що будь-яка відкрита множина класу $\mathbf{C^n_m}$ є також множиною класу $\mathbf{WC^n_m}$. Зворотнє твердження, взагалі кажучи, неправильне. Клас $\mathbf{WC^n_{n-1}} \setminus \mathbf{C^n_{n-1}}$ відкритих слабко $(n-1)$-опуклих, але не $(n-1)$-опуклих множин простору $\mathbb{R}^n$ непорожній. При цьому відкриті множини класу $\mathbf{WC^n_{n-1}} \setminus \mathbf{C^n_{n-1}}$ незв'язні [11]. В наведеній далі теоремі оцінюється знизу число компонент зв'язності таких множин.

Теорема 1.([11]) *Відкрита множина класу* $\mathbf{WC^n_{n-1}} \setminus \mathbf{C^n_{n-1}}$ *складається не менше ніж із трьох компонент зв'язності.*

У роботі [7] отримано топологічну класифікацію $(n-1)$-опуклих множин простору $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, (тобто множин із класу $\mathbf{C^n_{n-1}}$, $n \ge 2$) із гладкою межею.

Теорема 2.([7]) *Нехай задано $(n-1)$-опуклу множину $E \subset \mathbb{R}^n$ із гладкою межею. Тоді*

1. *E опукла множина, або*

2. *E подається декартовим добутком $E^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$, або*

3. *E складається не більше ніж зі двох необмежених компонент.*

При цьому класи 1–3 теореми 2 не є взаємно виключними. Множина E може належати одночасно двом і навіть трьом класам. Аналогічна класифікація вірна для множин класу $\mathbf{WC^n_{n-1}}$ із гладкою межею [11].

Властивості $(n-1)$-опуклих множин також вивчалися в роботах [5, 6].

Дана робота продовжує дослідження Ю.Б. Зелінського і його учнів і присвячена вивченню топологічних і геометричних властивостей множин класу $\mathbf{WC^n_m} \setminus \mathbf{C^n_m}$, $1 \le m < n$. У розділі 2 будуються приклади відкритої й замкненої множин класу $\mathbf{WC^n_{n-1}} \setminus \mathbf{C^n_{n-1}}$, $n \ge 2$, із трьома і більше компонентами зв'язності, а також доводиться, що, як і у випадку відкритих множин, компактні (тобто замкнені й обмежені) множини класу $\mathbf{WC^n_{n-1}} \setminus \mathbf{C^n_{n-1}}$, $n \ge 2$, складаються не менше ніж із трьох компонент зв'язності. У розділі 3 встановлюється існування областей (тобто відкритих зв'язних множин) класу $\mathbf{WC^n_m} \setminus \mathbf{C^n_m}$, $n \ge 3$, $1 \le m < n-1$.

Надалі, якщо інше не буде окремо визначено, точки простору $\mathbb{R}^n$ позначатимемо малими латинським літерами з індексами чи без; прямі будемо позначати малими грецькими літерами з індексами чи без; відстань між точками $x, y \in \mathbb{R}^n$ позначатимемо $|x-y|$.

2. Властивості замкнених множин класу $\mathbf{WC^n_{n-1}} \setminus \mathbf{C^n_{n-1}}$, $n \ge 2$.

Побудуймо приклади відкритих і замкнених множин класу $\mathbf{WC^n_{n-1}} \setminus \mathbf{C^n_{n-1}}$ з трьома і більше компонентами зв'язності. Спочатку будуватимемо приклади відкритих і замкнених слабко 1-опуклих, але не 1-опуклих множин на площині.

Приклад 1. Нехай γ_k^α, $k = 1, 2, 3$, $\alpha = [0, 1]$, (див. Рис. 1 a)) – прямі, що попарно перетинаються в точках

$$a^\alpha = \gamma_1^\alpha \cap \gamma_2^\alpha,\ b^\alpha = \gamma_2^\alpha \cap \gamma_3^\alpha,\ c^\alpha = \gamma_3^\alpha \cap \gamma_1^\alpha,\ \alpha = [0, 1].$$

При цьому відстань між прямими $\gamma_k^{\alpha_1}$ й $\gamma_k^{\alpha_2}$, де $\alpha_1 < \alpha_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$, $k \in \{1, 2, 3\}$, дорівнює $\alpha_2 - \alpha_1$ і

$$\triangle a^{\alpha_1} b^{\alpha_1} c^{\alpha_1} \supset \triangle a^{\alpha_2} b^{\alpha_2} c^{\alpha_2}.$$

У кут між прямими γ_1^α, γ_2^α, який містить трикутник $a^\alpha b^\alpha c^\alpha$, вписуємо область E_1^α, обмежену трапецією, так, щоб

$$\overline{E_1^\alpha} \cap \overline{\triangle a^\alpha b^\alpha c^\alpha} = \varnothing \text{ та } E_1^{\alpha_1} \supset \overline{E_1^{\alpha_2}},\ \alpha_1 < \alpha_2,\ \alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1].$$

Аналогічно будуємо область E_2^α між прямими γ_2^α, γ_3^α та область E_3^α між прямими γ_3^α, γ_1^α.

Тоді кожна відкрита множина

$$E^\alpha = \bigcup_{l=1}^{3} E_l^\alpha, \quad \alpha \in [0, 1],$$

слабко 1-опукла та не 1-опукла, оскільки через кожну точку ∂E^α можна провести пряму, яка не перетинає E^α, проте довільна пряма, яка проходить через довільну точку внутрішності трикутника $a^\alpha b^\alpha c^\alpha$, $\alpha \in [0, 1]$, перетинає принаймні одну з компонент E_l^α, $l = 1, 2, 3$, множини E^α.

Приклад 2. Із сім'ї множин E^α, $\alpha \in [0,1)$, із прикладу 1, вочевидь, можна вибрати зчисленну підсім'ю E^k, $k = 1, 2, \ldots$, якою апроксимується ззовні множина $\overline{E^1} = \bigcup\limits_{l=1}^{3} \overline{E_l^1}$ (див. Рис. 1 а)). Отже, замкнена множина $\overline{E^1}$ слабко 1-опукла. При цьому вона не є 1-опуклою, оскільки довільна пряма, яка проходить через довільну точку $\overline{\triangle a^1 b^1 c^1}$, перетинає принаймні одну з компонент $\overline{E_l^1}$, $l = 1, 2, 3$, множини $\overline{E^1}$.

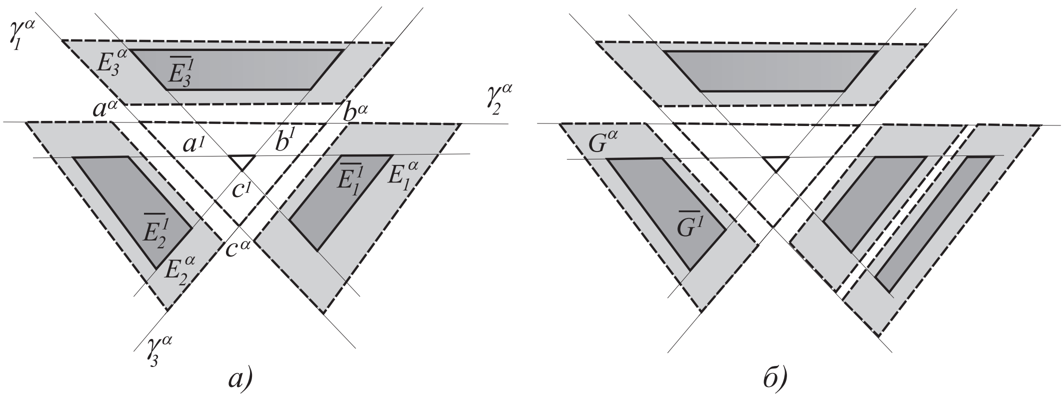

Рис. 1.

Приклад 3. За допомогою множин із прикладів 1, 2 легко побудувати відкриті множини G^α, $\alpha \in [0,1]$, і замкнену $\overline{G^1}$ класу $\mathbf{WC_1^2} \setminus \mathbf{C_1^2}$ з довільним скінченним більше трьох або навіть зчисленним числом компонент зв'язності, якщо продовжувати вписувати області, обмежені трапеціями з паралельними основами, у кути між прямими γ_k^α, $k = 1, 2, 3$, $\alpha \in [0,1]$ (див. Рис. 1 б)).

Для зручності подальших викладок дамо таке

Означення 5. Точка $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$ називається ***точкою m-неопуклості множини*** $E \subset \mathbb{R}^n$, якщо всі m-площини, які містять x, перетинають множину E.

Лема 1. *Нехай $E^p \subset \mathbb{R}^p$, $p \geq 2$, — це множина класу $\mathbf{WC_1^p} \setminus \mathbf{C_1^p}$. Тоді множина $E := E^p \times \mathbb{R}^{n-p} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, належить класу $\mathbf{WC_{n-p+1}^n} \setminus \mathbf{C_{n-p+1}^n}$.*

Доведення. Спочатку розгляньмо випадок, коли множина E^p, а отже і множина E відкриті. Покажімо, що множина E слабко $(n-p+1)$-опукла. Для довільної точки $x = (x_1, \ldots, x_p, x_{p+1} \ldots, x_n) \in \partial E$ справедливо, що $x^p = (x_1, \ldots, x_p) \in \partial E^p$. За умовою, існує пряма $\gamma(x^p) \subset \mathbb{R}^p$, яка проходить через точку x^p і така, що $\gamma(x^p) \cap E^p = \varnothing$. Тоді $(n-p+1)$-площина $\gamma(x^p) \times \mathbb{R}^{n-p}$, яка проходить через точку x, не перетинає множину E.

Нехай тепер множина E^p замкнена. Тоді за умовою вона апроксимується ззовні сім'єю відкритих слабко 1-опуклих множин $E_k^p \subset \mathbb{R}^p$, $p \geq 2$, $k = 1, 2, \ldots$. Множина E також замкнена і апроксимується ззовні сім'єю відкритих множин $E_k^p \times \mathbb{R}^{n-p} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $k = 1, 2, \ldots$, які, як доведено вище, слабко $(n-p+1)$-опуклі. Отже, E слабко $(n-p+1)$-опукла.

Покажімо, що відкрита або замкнена множина E не $(n-p+1)$-опукла. Розгляньмо точку $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n\setminus E$, де $y^p=(y_1,\dots,y_p)$ – це точка 1-неопуклості множини E^p. Через точку y проведемо p-площину $L^p(y)$, паралельну p-площині, яка містить множину E^p. Очевидно, що множина $E^p(y):=L^p(y)\cap E$ не 1-опукла. Тоді довільна пряма, яка лежить в p-площині $L^p(y)$ і проходить через точку y, перетинає множину E. Нехай $L^{n-p+1}(y)$ – це довільна $(n-p+1)$-площина, яка містить точку y. Перетин $L^{n-p+1}(y)\cap L^p(y)$ – це l-площина, $l\geq 1$, яка міститься в $L^p(y)$, а отже, $L^{n-p+1}(y)\cap E\neq\varnothing$. $\square$

Зауваження 1. Нехай $E^p\subset\mathbb{R}^p$, $p\geq 2$, – це відкрита множина класу $\mathbf{WC^p_1}\setminus\mathbf{C^p_1}$. І нехай K^{n-p}_β, $\beta\in(0,+\infty)$, – це $(n-p)$-вимірний відкритий куб у просторі $\mathbb{R}^{n-p}$, $n\geq 3$, з довжиною ребра 2β:

$$K^{n-p}_\beta=\underbrace{(-\beta,\beta)\times\ldots\times(-\beta,\beta)}_{n-p}.$$

Тоді, провівши для множини $E^p\times K^{n-p}_\beta$ міркування, схожі з доведенням леми 1, встановимо, що ця множина належить класу $\mathbf{WC^n_{n-p+1}}\setminus\mathbf{C^n_{n-p+1}}$.

Приклад 4. Розгляньмо відкриті множини E^α, G^α, $\alpha\in[0,1]$, з прикладів 1, 3 і замкнені $\overline{E^1}$, $\overline{G^1}$ з прикладів 2, 3. Тоді за лемою 1, при $p=2$, необмежені множини

$$E^\alpha\times\mathbb{R}^{n-2},\quad G^\alpha\times\mathbb{R}^{n-2},\quad \overline{E^1}\times\mathbb{R}^{n-2},\quad \overline{G^1}\times\mathbb{R}^{n-2}$$

простору $\mathbb{R}^n$, із трьома і більше компонентами зв'язності, належать класу $\mathbf{WC^n_{n-1}}\setminus\mathbf{C^n_{n-1}}$. Із зауваження 1 випливає, що обмежені відкриті множини

$$E^\alpha\times K^{n-2}_\beta,\quad G^\alpha\times K^{n-2}_\beta,\ \alpha\in[0,1],\ \beta\in(0,1],$$

належать класу $\mathbf{WC^n_{n-1}}\setminus\mathbf{C^n_{n-1}}$. Неважко показати, що множини $\overline{E^1}$, $\overline{G^1}$ апроксимуються ззовні відповідно сім'ями відкритих множин

$$E^\alpha\times K^{n-2}_{1-\alpha},\quad G^\alpha\times K^{n-2}_{1-\alpha},\ \alpha\in(0,1).$$

Тоді множини $\overline{E^1}\subset\mathbb{R}^n$, $\overline{G^1}\subset\mathbb{R}^n$ належать класу $\mathbf{WC^n_{n-1}}\setminus\mathbf{C^n_{n-1}}$, що випливає із зауваження 1 і того факту, що $\overline{E^1}$, $\overline{G^1}$ не є $(n-1)$-опуклими. При цьому у просторі $\mathbb{R}^n$ це замкнені множини з порожньою внутрішністю.

Лема 2. *Нехай компактна слабко m-опукла множина $E\subset\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, $1\leq m<n$, має скінченне число компонент зв'язності. Тоді існує сім'я відкритих слабко m-опуклих множин E^k, $k=1,2,\ldots$, якою апроксимується ззовні множина E, і така, що число компонент зв'язності кожної множини E^k дорівнює числу компонент зв'язності множини E.*

Доведення. Оскільки множина E слабко m-опукла, існує деяка сім'я відкритих слабко m-опуклих множин $\widetilde{E}^k$, $k=1,2,\ldots$, якою апроксимується ззовні множина E. Нехай кожна множина E^k_0, $k=1,2,\ldots$, складається тільки з компонент множини $\widetilde{E}^k$, які містять точки множини E. Якщо з відкритої слабко m-опуклої множини вилучити довільне число компонент зв'язності, отримана множина, вочевидь, залишиться слабко m-опуклою. Отже, кожна множина E_0^k, $k = 1, 2, \ldots$, слабко m-опукла і E апроксимується ззовні сім'єю цих множин.

Нехай $E(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, – це ε-окіл множини E, тобто

$$E(\varepsilon) := E \cup \{x : |x - y| < \varepsilon,\ y \in \partial E\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такий, що $E_0^k \subset E(\varepsilon)$ для усіх $k \geq k(\varepsilon)$. Справді, в іншому разі існують $\varepsilon' > 0$ і точка x, такі, що $x \in E_0^k$ для усіх $k = 1, 2, \ldots$ й $x \notin E(\varepsilon')$. Тоді $x \in \bigcap\limits_k E_0^k$ й $x \notin E(\varepsilon')$. Але це протирічить тому, що $\bigcap\limits_k E_0^k = E$ і $E \subset E(\varepsilon')$.

Нехай E_j, $j = \overline{1, s}$, $s \in \mathbb{N}$, – це компоненти зв'язності множини E. Розгляньмо відстані між ними:

$$d_{ij} := \min_{\substack{x_i \in E_i, \\ x_j \in E_j, \\ i \neq j}} |x_i - x_j|.$$

Нехай

$$d := \min_{i,j \in \overline{1,s}} d_{ij}.$$

Оскільки множина E обмежена і має скінченне число компонент, то $d > 0$.

Нехай $\varepsilon = \dfrac{d}{2}$. Тоді множина $E\left(\dfrac{d}{2}\right)$ має s компонент зв'язності. А отже, існує номер k_0, такий, що $E_0^k \subset E\left(\dfrac{d}{2}\right)$, $k = k_0, k_0 + 1, \ldots$, і кожна множина E_0^k також має s компонент зв'язності. Для завершення доведення леми залишилилося лише перенумерувати множини E_0^k, $k = k_0, k_0 + 1, \ldots$:

$$E^p := E_0^{k_0 + (p-1)}, \quad p = 1, 2, \ldots. \qquad \square$$

Лема 3. *Нехай замкнена множина $E \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, належить класу $\mathbf{WC_m^n} \setminus \mathbf{C_m^n}$, $1 \leq m < n$. Тоді для кожної сім'ї відкритих слабко m-опуклих множин E^k, $k = 1, 2, \ldots$, якою апроксимується ззовні множина E, існує номер $k_0 \in \mathbb{N}$, такий, що кожна множина E^k, $k = k_0, k_0 + 1, \ldots$, не m-опукла.*

Доведення. Оскільки E не m-опукла, існує точка $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, така, що довільна m-площина, яка містить x, перетинає E. Нехай

$$\varepsilon := \min_{y \in E} |x - y|.$$

Розгляньмо ε-окіл $E(\varepsilon)$ множини E. Очевидно, що $x \notin E(\varepsilon)$. Для сім'ї множин E^k, $k = 1, 2, \ldots$, існує номер $k_0 \in \mathbb{N}$, такий, що кожна множина $E^k \subset E(\varepsilon)$, $k = k_0, k_0 + 1, \ldots$, а отже, $x \in \mathbb{R}^n \setminus E^k$, $k = k_0, k_0 + 1, \ldots$. При цьому довільна m-площина, яка проходить через x, перетинає також і кожну множину $E^k \supset E$, $k = k_0, k_0+1, \ldots$. Отже, множини E^k, $k = k_0, k_0+1, \ldots$, не m-опуклі. $\square$

Теорема 3. *Довільна компкактна множина $E \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, класу $\mathbf{WC^n_{n-1}} \setminus \mathbf{C^n_{n-1}}$ складається не менше ніж із трьох компонент зв'язності.*

Доведення. Доводитимемо теорему від супротивного. Нехай $E \subset \mathbb{R}^n$ — це зв'язний компакт класу $\mathbf{WC^n_{n-1}} \setminus \mathbf{C^n_{n-1}}$. Тоді за лемами 2, 3 існує сім'я областей класу $\mathbf{WC^n_{n-1}} \setminus \mathbf{C^n_{n-1}}$, якою апроксимується ззовні можина E, що протирічить теоремі 1.

Припустімо, що компакт $E \subset \mathbb{R}^n$ класу $\mathbf{WC^n_{n-1}} \setminus \mathbf{C^n_{n-1}}$ складається з двох компонент зв'язності. Тоді за лемами 2, 3 існує сім'я відкритих множин класу $\mathbf{WC^n_{n-1}} \setminus \mathbf{C^n_{n-1}}$ з двома компонентами зв'язності, якою апроксимується ззовні множина E, що знову протирічить теоремі 1. Приклади 2–4 завершують доведення. $\square$

3. Зв'язні множини класу $\mathbf{WC^n_m} \setminus \mathbf{C^n_m}$, $n \geq 3$, $1 \leq m < n-1$.

Виявляється, що для відкритих множин $E \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, класу $\mathbf{WC^n_m} \setminus \mathbf{C^n_m}$, $1 \leq m < n-1$, оцінка числа компонент зв'язності не така, як для множин класу $\mathbf{WC^n_{n-1}} \setminus \mathbf{C^n_{n-1}}$.

Теорема 4. *Існують області у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, класу $\mathbf{WC^n_m} \setminus \mathbf{C^n_m}$, $1 \leq m < n-1$.*

Доведення. Доведемо твердження, побудувавши приклади відповідних множин. Спочатку будуватимемо область класу $\mathbf{WC^3_1} \setminus \mathbf{C^3_1}$ у просторі $\mathbb{R}^3$.

Розгляньмо відкриту множину E^0 із прикладу 1. Нехай $\tilde{\tilde{E}}^3 := E^0 \times [0,1]$. Нехай $P^2 \subset \mathbb{R}^2$ – це опукла оболонка множини E^0. Побудуймо призми $P^3_1 := P^2 \times \left[-\frac{1}{3}, 0\right]$, $P^3_2 := P^2 \times \left[1, 1\frac{1}{3}\right]$. Тепер розгляньмо множину

$$\tilde{E}^3 := \operatorname{Int}(P^3_1 \cup \tilde{\tilde{E}}^3 \cup P^3_2).$$

Вона 1-опукла відносно кожної точки $\partial\tilde{E}^3$, окрім точок трикутників

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \partial\tilde{E}^3 : (x_1, x_2) \in \operatorname{Int}(\triangle a^0 b^0 c^0), x_3 = 0, 1\}. \tag{1}$$

Щоб побудувати множину, 1-опуклу відносно кожної точки її межі, вилучмо з множини $\tilde{E}^3$ смуги, які містять трикутники (1) (див. Рис. 2). Нехай h – це висота $\triangle a^0 b^0 c^0$, опущена з вершини c^0. Тоді множини

$$L^2_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \tilde{E}^3 : (x_1, x_2) \in h \times (-\infty, \infty), x_3 = 0\},$$

$$L^2_2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \tilde{E}^3 : (x_1, x_2) \in h \times (-\infty, \infty), x_3 = 1\}$$

містять трикутники (1), а множина

$$E^3 := \tilde{E}^3 \setminus (\overline{L^2_1} \cup \overline{L^2_2}) \tag{2}$$

слабко 1-опукла. При цьому точки відкритої призми $L^3 := \mathrm{Int}\,(\triangle a^0 b^0 c^0) \times (0,1)$ — це точки 1-неопуклості множини E^3. Отже, відкрита зв'язна множина $E^3 \subset \mathbb{R}^3$ належить класу $\mathbf{WC_1^3} \setminus \mathbf{C_1^3}$.

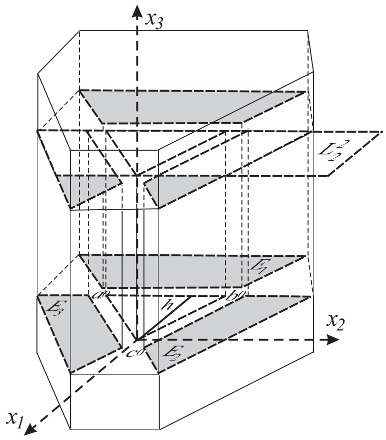

Рис. 2.

Побудуймо область класу $\mathbf{WC_1^4} \setminus \mathbf{C_1^4}$ у просторі $\mathbb{R}^4$. Розгляньмо область $E^3 \subset \mathbb{R}^3$ (2). Нехай $\tilde{\tilde{E}}^4 := E^3 \times [0,1]$. Нехай $P^3 \subset \mathbb{R}^3$ – це опукла оболонка множини E^3. Побудуймо призми $P_1^4 := P^3 \times \left[-\dfrac{1}{3}, 0\right]$, $P_2^4 := P^3 \times \left[1, 1\dfrac{1}{3}\right]$. Тепер розгляньмо множину
$$\tilde{E}^4 := \mathrm{Int}\,(P_1^4 \cup \tilde{\tilde{E}}^4 \cup P_2^4).$$
Вона 1-опукла відносно кожної точки $\partial \tilde{E}^4$, окрім точок призм
$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \partial \tilde{E}^4 : (x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{Int}\,(\triangle a^0 b^0 c^0) \times (0,1), x_4 = 0, 1\}. \qquad (3)$$
Щоб побудувати множину, 1-опуклу відносно кожної точки її межі, вилучмо з множини $\tilde{E}^4$ тривимірні смуги, які містять призми (3)
$$L_1^3 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \tilde{E}^3 : (x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{Int}\,(\triangle a^0 b^0 c^0) \times (-\infty, \infty), x_4 = 0\},$$
$$L_2^3 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \tilde{E}^3 : (x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{Int}\,(\triangle a^0 b^0 c^0) \times (-\infty, \infty), x_4 = 1\}$$
Тоді множина
$$E^4 := \tilde{E}^4 \setminus (\overline{L_1^3} \cup \overline{L_2^3})$$
слабко 1-опукла. При цьому точки відкритої призми
$$L^4 := \mathrm{Int}\,(\triangle a^0 b^0 c^0) \times (0,1) \times (0,1)$$
– це точки 1-неопуклості множини E^4. Отже, відкрита зв'язна множина $E^4 \subset \mathbb{R}^4$ належить класу $\mathbf{WC_1^4} \setminus \mathbf{C_1^4}$.

Поширюючи процес побудови множин E^n по індукції на простори $\mathbb{R}^n$, $n > 4$, отримаємо області класу $\mathbf{WC^n_1} \setminus \mathbf{C^n_1}$ для довільних $n \geq 3$. Тоді за лемою 1 області

$$E^{n-m+1} \times \mathbb{R}^{m-1} \subset \mathbb{R}^n, \quad n \geq 3,\ 1 \leq m < n-1,$$

– це множини класу $\mathbf{WC^n_m} \setminus \mathbf{C^n_m}$. $\square$

Питання існування зв'язних замкнених множин класів $\mathbf{WC^n_m} \setminus \mathbf{C^n_m}$, $n \geq 3$, $1 \leq m < n-1$, лишається відкритим. В межах цієї роботи також лишається не встановленим мінімальне число компонент зв'язності замкнених необмежених слабко $(n-1)$-опуклих, але не $(n-1)$-опуклих множин простору $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Як відмічалося раніше, для відкритих множин з означень 2, 3 випливає включення класів $\mathbf{C^n_m} \subset \mathbf{WC^n_m}$. Для замкнених множин таке твердження не очевидне і його справедливість також потребує доведення.

Задача. *Чи буде довільна замкнена m-опукла множина простору $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $1 \leq m < n$, слабко m-опуклою?*

Цитована література

1. *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1966. – 648 с.
2. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 336 с.
3. *Зелинский Ю.Б.* Многозначные отображения в анализе. – К.: Наукова думка, 1993. – 264 с.
4. *Айзенберг Л.А.* О разложении голоморфных функций многих комплексных переменных на простейшие дроби // Сиб. мат. журн. – 1967. – Т. 8, № 5. – С. 1124–1142.
5. *Герасин А.И.* Об $(n-1)$-выпуклых множествах // Некоторые вопросы анализа и дифференциал. геометрии. – К.: Ин-т матем.АН УССР. – 1988. – С. 8–14.
6. *Герасин А.И.* Обозримость $(n-1)$-выпуклых множеств // Комплексный анализ алгебра и топология. – К.: Ин-т матем.АН УССР. – 1990. – С. 20–28.
7. *Мельник В.Л.* Топологічна класифікація (n–1)-опуклих множин // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, № 9. – С. 1236–1243.
8. *Зелинский Ю.Б., Момот И.В.* О (n, m)-выпуклых множествах // Укр. мат. журн. – 2001. – Т. 53, № 3. – С. 422–427.
9. *Зелинский Ю.Б.* Обобщенно выпуклые оболочки множеств и задача о тени // Укр. мат. вісник. – 2015. – Т. 12, № 2. – С. 278–289.
10. *Стефанчук М.В.* Узагальнено опуклі множини та їх застосування // Рукопис дис. канд. фіз.-мат. наук / Інститут математики НАН України. – К., 2016.
11. *Даккіл Х.К.* Задачі про тінь та відображення постійної кратності // Рукопис дис. канд. фіз.-мат. наук / Інститут математики НАН України. – К., 2017.

References

1. Rozenfeld, B.A. (1966). *Multi-dimensional spaces.* M., Nauka (in Russian).
2. Leuhtweis, K. (1985). *Convex sets.* M., Nauka (in Russian).
3. Zelinskii, Yu.B. (1993). *Multi-valued mappings in analysis.* K., Naukova Dumka (in Russian).
4. Aizenberg, L.A. (1967). Decomposition of holomorphic functions of several complex variables into partial fractions. *Sib. Mat. Zhurnal, 8*(5), 859–872 (in Russian).
5. Gerasin, A.I. (1988). On $(n-1)$-convex sets. *Some questions of anal. and differential geom.* K., Institute of Mathematics of AS USSR, 8–14 (in Russian).

6. Gerasin, A.I. (1990). Observableness of $(n-1)$-convex sets. *Complex analysis, algebra, and topology.* K., Institute of Mathematics of AS USSR, 20–28 (in Russian).
7. Melnyk, V.L. (1998). Topological classification of $(n-1)$-convex sets. *Ukr. Mat. Zhurnal, 50*(9), 1236–1243 (in Ukrainian).
8. Zelinskii, Yu.B., Momot, I.V. (2001). On (n,m)-convex sets. *Ukr. Mat. Zhurnal, 53*(3), 422–427 (in Russian).
9. Zelinskii, Yu.B. (2015). Generalized convex envelopes of sets and the problem of shadow. *J. Math. Sci., 211*(5), 710–717 (in English).
10. Stefanchuk, M.V. (2016). *Generally convex sets and their applications.* Candthesis. K., Institute of Mathematics of NASU (in Ukrainian).
11. Dakhil, H.K. (2017). *The shadows problems and mappings of fixed multiplicity.* Candthesis. K., Institute of Mathematics of NASU (in Ukrainian).

T.M. Osipchuk

On topological properties of weakly m-convex sets.

The topological properties of classes of generally convex sets in multidimensional real Euclidean space $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, known as m-convex and weakly m-convex, $1 \leq m < n$, are studied in the present work. A set of the space $\mathbb{R}^n$ is called ***m*-convex** if for any point of the complement of the set to the whole space there is an m-dimensional plane passing through this point and not intersecting the set. An open set of the space is called ***weakly m-convex***, if for any point of the boundary of the set there exists an m-dimensional plane passing through this point and not intersecting the given set. A closed set of the space is called ***weakly m-convex*** if it is approximated from the outside by a family of open weakly m-convex sets. These notions were proposed by Professor Yuri Zelinskii. It is known the topological classification of (weakly) $(n-1)$-convex sets in the space $\mathbb{R}^n$ with smooth boundary. Each such a set is convex, or consists of no more than two unbounded connected components, or is given by the Cartesian product $E^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$, where E^1 is a subset of $\mathbb{R}$. Any open m-convex set is obviously weakly m-convex. The opposite statement is wrong in general. It is established that there exist open sets in $\mathbb{R}^n$ that are weakly $(n-1)$-convex but not $(n-1)$-convex, and that such sets consist of not less than three connected components.
The main results of the work are two theorems. The first of them establishes the fact that for compact weakly $(n-1)$-convex and not $(n-1)$-convex sets in the space $\mathbb{R}^n$, the same lower bound for the number of their connected components is true as in the case of open sets. In particular, the examples of open and closed weakly $(n-1)$-convex and not $(n-1)$-convex sets with three and more connected components are constructed for this purpose. And it is also proved that any compact weakly m-convex and not m-convex set of the space $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $1 \leq m < n$, can be approximated from the outside by a family of open weakly m-convex and not m-convex sets with the same number of connected components as the closed set has. The second theorem establishes the existence of weakly m-convex and not m-convex domains, $1 \leq m < n-1$, $n \geq 3$, in the spaces $\mathbb{R}^n$. First, examples of weakly 1-convex and not 1-convex domains $E^p \subset \mathbb{R}^p$ for any $p \geq 3$, are constructed. Then, it is proved that the domain $E^p \times \mathbb{R}^{m-1} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $1 \leq m < n-1$, is weakly m-convex and not m-convex.

Keywords: *convex set, m-convex set, weakly m-convex set, Euclidean space.*

Ін-т математики НАН України, Київ
osipchuk@imath.kiev.ua

Отримано 05.08.20