УДК 62-50:519.7
DOI: 10.37069/1683-4720-2020-34-4

©2020. **Н.В. Жоголева, В.Ф. Щербак**

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ДЕМПФІРУВАННЯ ПОЛІНОМІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ Л'ЄНАРА

В багатьох інженерних застосуваннях коливальний рух складних об'єктів апроксимується системою, яка складається з одного або декількох пов'язаних між собою нелінійних осциляторів, динаміка яких визначається диференціальними рівняннями другого порядку. Система Л'єнара, а саме $\ddot{x}(t)+f(x(t))\dot{x}(t)+g(x(t))=0$, є узагальненою моделлю таких коливань, тут $f(x(t))$ і $g(x(t))$ – функції, що представляють закони демпфірування та відновлення в системі. В роботі розглянуто проблему побудови глобально збіжного ідентифікатора для визначення коефіцієнтів поліноміального подання $f(x(t))$ – закону демпфірування осцилятора. Використовується метод інваріантних співвідношень, який засновано на динамічному розширенні вихідної системи та побудові відповідних співвідношень, за якими невідомі параметри можуть бути виражені як функції від відомих величин на траєкторіях розширеної системи. Показано, що остаточні оцінки невідомих стають асимптотичними за умови відповідного вибору глобально притягуючого інваріантного многовиду в розширеному просторі станів.

MSC: 34C15, 34D20.

Keywords: *нелінійні коливання, поліноміальний осцилятор Л'єнара, ідентифікація параметрів, інваріантні співвідношення, асимптотичні оцінки.*

1. Вступ.

Сучасні об'єкти керування в техніці, економіці, медико-біологічних дослідженнях тощо являють собою складні, нелінійні багатовимірні системи. Однією з основних проблем при побудові адекватних математичних моделей для них є відсутність «апріорної» інформації про поточний стан об'єкта та його параметри. Тому важливим етапом аналізу та побудови законів керування є перевірка адекватності моделей, яка може бути здійснена за допомогою методів обернених задач керування системами вхід-вихід, які призначено для визначення стану об'єкта, його параметрів, вхідного впливу за даними про вихід системи. Відповідні методи є необхідними в багатьох інженерних задачах, зокрема задачах: (i) отримання інформації про стан і параметри процесу для побудови законів керування та при перевірці теоретичних моделей, (ii) налаштування параметрів контролера, оптимізації, (iii) розробки адаптивних алгоритмів керування, (iv) виявлення несправностей тощо [1].

В роботі розглядається задача ідентифікації коефіцієнтів поліноміальної системи Л'єнара [2]. Використано методику синтезу інваріантних співвідношень [3, 4], яка полягає у розширенні вихідної системи за рахунок введення у розгляд керованих диференціальних рівнянь ідентифікатора. Таке динамічне розширення виявляється корисним для обернених задач теорії керування [5], які призначено для відновлення тих чи інших компонент математичної моделі динамічних систем за даними про їх вихід. Основна ідея цього підходу полягає в тому, щоб занурити динаміку вихідної системи в систему більшої вимірності, яка завдяки своєї достатньо вільній структурі більш пристосована для побудови спостерігача чи ідентифікатора. Керування в розширенній системі використовуються для синтезу на її траєкторіях заздалегідь запропонованих співвідношень, які визначають невідомі компоненти математичної моделі (фазовий вектор, параметри) як функції від відомих величин.

За цією методикою в роботі запропоновано конструктивний метод синтезу додаткових співвідношень в задачі визначення коефіцієнтів поліноміальної системи Л'єнара. Для асимптотичного оцінювання за виходом коефіцієнтів поліному, що описує закон демпфірування руху осцилятора, побудовано нелінійний ідентифікатор.

2. Поліноміальна система Л'єнара.

Другий закон Ньютона описує рух механічної системи у вигляді

$$m\ddot{x}(t) + p(x(t), \dot{x}(t)) = u(t), \tag{1}$$

де $x(t)$ – переміщення, m – маса системи, $u(t)$ – зовнішня сила, $p(x(t), \dot{x}(t))$ – характеризує сили демпфування та відновлення в системі. Окремим випадком диференціального рівняння другого порядку загального виду, яке моделює коливання матеріальної точки, є рівняння осцилятора Л'єнара

$$\ddot{x}(t) + f(x(t))\dot{x}(t) + g(x(t)) = 0. \tag{2}$$

Перепишемо його у формі системи в просторі станів, зробивши попередньо заміну змінних Л'єнара, яка проводиться за формулами

$$x_1(t) = x(t), \quad x_2(t) = \dot{x}(t) + F(x(t)), \tag{3}$$

де $F(x(t)) = \int_0^x f(\sigma)d\sigma$. В результаті маємо систему Л'єнара

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) - F(x_1(t)),\ \dot{x}_2(t) = -g(x_1(t)). \tag{4}$$

Зауваження. Багато питань щодо стійкості, обмеженості коливань, існування періодичних розв'язків системи (4), наявності у неї граничних циклів тощо є предметом досліджень в останні десятиріччя. Зокрема, природніми для багатьох природних коливальних процесів є виконання умов

$$f(x) = f(-x), \quad g(x) = -g(-x).$$

Не розглядаючи ті чи інші якісні властивості системи Л'єнара, далі будемо вважати, що рівняння (4) моделюють процес перманентних коливань реального об'єкту, а їх розв'язок – функції $x_1(t), x_2(t)$ є неперервними, обмеженими і формують вихід системи Л'єнара, тобто є відомими як функції часу за даними спостереження процесу коливань.

Однією з класичних проблем теорії керування є проблема визначення за інформацією про вихід системи законів її функціювання. В разі, якщо ці закони представлено у вигляді деяких поліномів від змінної стану об'єкта, задача зводиться до ідентифікації сталих коефіцієнтів цих поліномів. Далі будемо вважати, що функції $f(x_1), g(x_1)$ є поліномами від переміщення x_1.

$$f(x_1) = a_1 + 2a_2x_1 + ... + na_nx_1^{n-1}, \quad g(x_1) = b_0 + b_1x_1 + ... + b_kx_1^k. \tag{5}$$

З урахуванням такого представлення система Л'єнара (4) приймає вигляд

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - a_1x_1 - a_2x_1^2 - ... - a_nx^n, \\ \dot{x}_2 &= -b_0 - b_1x_1 - ...b_kx_1^k, \end{aligned} \tag{6}$$

Задача параметричної ідентифікації. Знайти асимптотично точні оцінки коефіцієнтів $a_i, b_j, \ i = \overline{1,n}, j = \overline{0,k}$, за даними про вихід $x_1(t), x_2(t)$ системи (6).

3. Синтез додаткових співвідношень для визначення коефіцієнтів поліномів.

Згідно з методом синтезу інваріантних співвідношень розширимо систему (6) за рахунок $n + k + 1$ додаткових диференціальних рівнянь відносно керованих змінних $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)^T, \zeta = (\zeta_0, ..., \zeta_k)^T$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i(t) &= u_i(\xi(t), \zeta(t), x_1(t), x_2(t)), \\ \dot{\zeta}_j(t) &= v_j(\xi(t), \zeta(t), x_1(t), x_2(t)), \ i = \overline{1,n}, j = \overline{0,k}, \end{aligned} \tag{7}$$

де функції $u_i, v_j, \ i = \overline{1,n}, j = \overline{0,k}$ призначено для синтезу інваріантних співвідношень для розширеної системи (6),(7). Зазначемо, що оскільки в праві частини останніх рівнянь входять відомі функції часу $x_1(t), x_2(t)$, то при виборі тих чи інших керувань $u_i, v_j, \ i = \overline{1,n}, j = \overline{0,k}$, для будь-яких початкових умов $\xi(0) = \xi^*, \zeta(0) = \zeta^*$ відповідний розв'язок задачі Коші $\xi(t, \xi^*), \zeta(t, \zeta^*)$ будемо також вважати відомою фукцією часу.

Самі інваріантні співвідношення будемо шукати у вигляді

$$\begin{aligned} a_i &= \Phi_i(x_1(t)) + \xi_i(t), \\ b_j &= \Psi_j(x_2(t)) + \zeta_j(t), \ i = \overline{1,n}, j = \overline{0,k}. \end{aligned} \tag{8}$$

Тут функції $\Phi_i(.), \ \Psi_j(.)$ поки є вільними і будуть використані на останньому етапі побудови ідентифікаторів для стабілізації відхилень від відповідних співвідношень. Оскільки $n + k + 1$ рівностей (8) не можуть виконуватись тотожньо, введемо у розгляд ці відхилення: $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)^T, \ \delta = (\delta_0, ..., \delta_k)^T$, тобто замість (8) в загальному випадку маємо

$$\begin{aligned} a_i &= \Phi_i(x_1(t)) + \xi_i(t) + \varepsilon_i(t), \\ b_j &= \Psi_j(x_2(t)) + \zeta_j(t) + \delta_j(t), \ i = \overline{1,n}, j = \overline{0,k}, \end{aligned} \tag{9}$$

Якщо буде доведено, що в системі (6),(7) на деяких траєкторіях $\varepsilon(t) \equiv \delta(t) \equiv 0$, то тим самим буде встановлено факт існування інваріантних співвідношень (8) для розширеної системи.

Диференціюючи (9) в силу системи (6),(7), отримуємо систему диференціальних рівнянь для відхилень.

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_i &= -u_i - \Phi_i' \left(x_2 - (\Phi_1 + \xi_1 + \varepsilon_1)x_1 - ... - (\Phi_n + \xi_n + \varepsilon_n)x^n\right), \\ \dot{\delta}_j &= -v_j - \Psi_j' \left((\Psi_0 + \zeta_0 + \delta_0) - ... - (\Psi_k + \zeta_k + \delta_k)x_1^k\right), i = \overline{1,n}, j = \overline{0,k}. \end{aligned} \tag{10}$$

Визначимо функції $u_i, v_j, i = \overline{1,n}, j = \overline{0,k}$ в додаткових рівняннях (7) таким чином, щоб остання система диференціальних рівнянь допускала тривіальне рішення відносно $\varepsilon(t), \delta(t)$, забезпечивши тим самим існування інваріантних співвідношень для розширеної системи (6),(7). Для цього вимагатимемо щоб рівняння (7) мали наступний вигляд

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i &= \Phi_i' \left(-x_2 + (\Phi_1 + \xi_1)x_1 + (\Phi_2 + \xi_2)x_1^2 + ... + (\Phi_n + \xi_n)x^n\right), \\ \dot{\zeta}_j &= \Psi_j' \left((\Psi_0 + \zeta_0) + (\Psi_1 + \zeta_1)x_1 + ... + (\Psi_k + \zeta_k)x_1^k\right), i = \overline{1,n}, j = \overline{0,k}. \end{aligned} \tag{11}$$

За таким вибором u_i, v_j маємо, що в разі $\xi(t), \zeta(t)$ – будь-яке рішення задачі Коші для системи (11), то рівняння відносно відхилень $\varepsilon(t), \delta(t)$ стають однорідними,

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_i &= \Phi_i' \left(\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_1^2 + ... + \varepsilon_n x^n\right), \\ \dot{\delta}_j &= \Psi_j'(\delta_0 + \delta_1 x_1 + ... + \delta_k x_1^k), \ i = \overline{1,n}, j = \overline{0,k}, \end{aligned} \tag{12}$$

тобто допускають тривіальний розв'язок $\varepsilon(t) \equiv \delta(t) \equiv 0$.

Таким чином отримано сім'ю додаткових систем виду (7), залежну від $n+k+1$ вільних функцій $\Phi_i(x_1), \Psi_j(x_2)$ та їх похідних $\Phi_i'(x_1), \Psi_j'(x_2)$. Кожна з них, разом з вихідною системою (6), перетворює рівності (8) в інваріантні співвідношення, тобто на деяких траєкторіях розширеної системи ці рівності виконуються тотожньо. На інших траєкторіях з'являються ненульові доданки $\varepsilon_i(t), \delta_i(t)$, які залежать від $\Phi_i'(x_1), \Psi_j'(x_2)$. Тому останнім етапом побудови асимптотичних ідентифікаторів є вибір таких функцій $\Phi_i(x_1), \Psi_j(x_2)$, які забеспечать властивість глобальної асимптотичної стійкості положення рівноваги рівнянь у відхиленнях (12).

4. Визначення параметрів демпфування в системі Л'єнара.

Розглянемо задачу побудови ідентифікатора для знаходження асимптотичних оцінок коефіцієнтів $a_1, ..., a_n$. Диференціальні рівняння для відхилень від інваріантних співвідношень мають вигляд

$$\dot{\varepsilon}_i = \Phi_i' \left(\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_1^2 + ... + \varepsilon_n x^n\right), \ i = \overline{1,n} \tag{13}$$

Виберемо функції $\Phi_i(x_1)$ таким чином, щоб тривіальне рішення системи (13) мало властивість глобальної асимптотичної стійкості.

В якості кандидата на функцію Ляпунова беремо додатноозначену функцію

$$V(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) = \frac{1}{2}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + ... + \varepsilon_n^2). \tag{14}$$

Якщо вільні функції вибрати у вигляді

$$\Phi_i(x_1) = -\frac{x^{i+1}}{i+1}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{15}$$

то похідна за часом в силу системи (13) від функції Ляпунова становиться від'ємною напівозначеною

$$\frac{dV}{dt}(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) = -\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot x_1^i)\right)^2 \leq 0. \tag{16}$$

Позначимо $d(t) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot x_1^i$. Покажемо, що для асимптотичної стійкості тривіального рішення системи (13) достатньо виконання наступних вимог:

1. оскільки похідна за часом від функції Ляпунова $\frac{dV}{dt} \leq 0$, то сама функція не збільшується, її значення обмежені знизу нулем, отже існує $\lim\limits_{t\to\infty} V(t) = V^* < \infty$;
2. функції часу $\varepsilon_1(t), ..., \varepsilon_n(t)$ обмежені, оскільки $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2(t) \leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2(0)$;
3. згідно припущенню про обмеженість траєкторій вихідної системи Л'єнара (за припущенням $x_1(t)$ – компонента фазового вектору обмежених коливань вихідної системи) похідна (16) є рівномірно неперервною функцією часу;
4. за умов ненульових коливань траєкторій вихідної системи (6) рівність $d(t) = 0$ не є інваріантною для розширеної системи диференціальних рівнянь (6),(7).

Перші три твердження є доведеними. Розглянемо четверте з них. Нехай в противагу йому на деяких на траєкторіях розширеної системи при ненульових відхиленнях маємо

$$d(t) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(t) x_1^i(t) \equiv 0.$$

Тоді, згідно з рівняннями (13), маємо, що $\varepsilon_i(t) = \varepsilon_i^* - const, i = \overline{1, n}$. В цьому випадку компонента фазового вектора осцилятора $x_1(t)$ повинна бути коренем полінома

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^* x_1^i(t) = 0,$$

тобто сталою величиною, що суперечить припущенню про ненульові перманентні коливання вихідної системи Л'єнара. Отримане протиріччя доводить той факт, що наслідком умови $d(t) = 0$ є рівності $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = ... = \varepsilon_n(t) = 0$.

Відома лема Барбалата [6] (Barbalat's Lemma) стверджує:

Лема. Якщо $f(t)$ має скінчену границю при $t \to \infty$ і її похідна $\frac{df}{dt}$ є рівномірно неперервною, тоді $\frac{df}{dt} \to 0$ при $t \to \infty$.

Застосуємо лему Барбалата до функції $V(t)$. За лемою, наслідком тверджень 1)-3) є те, що похідна функції Ляпунова $\frac{dV}{dt} = -d(t)^2$ прямує з часом до нуля, тобто $d(t) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_1^i \to 0$ при $t \to \infty$. Крім того з 4) випливає те, що максимальна інваріантна множина системи (6),(7) має структуру $\{(\varepsilon, x_1, x_2) : \varepsilon = 0\}$. Отже, за принципом інваріантності ЛаСаля $\lim\limits_{t\to\infty} \varepsilon_i(t) = 0,\ i = \overline{1,n}$.

Таким чином, підсумовуючи попередні міркування, запишемо остаточний вигляд ідентифікатора параметрів $a_1, ..., a_n$, який визначає закон демпфірування руху осцилятора.

Твердження. Формули

$$\hat{a}_i = -\frac{x^{i+1}(t)}{i+1} + \xi_i(t),\ i = \overline{1,n}, \tag{17}$$

де $\xi_i(t)$ будь-який розв'язок задачі Коші для системи диференціальних рівнянь

$$\dot{\xi}_i(t) = x_1^i(t) \left(x_2(t) - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_1^{i+1}(t)}{i+1} - \xi_i(t) \right) \right),\ i = \overline{1,n}, \tag{18}$$

формують асимптотичні оцінки параметрів $a_1, ..., a_n$ поліноміалної системи Л'єнара (6).

5. Висновки.

Розглянуто використання методу синтезу інваріантних співвідношень в задачі ідентифікації сталих коефіцієнтів поліномів, які моделюють дисипацію та сили відновлення в системі Л'єнара. Показано, що невідомі коефіцієнти задовольняють додатковим співвідношенням на деяких траєкторіях розширеної за рахунок диференціальних зворотних зв'язків вихідної динамічної системи. Для полінома, який моделює закон демпфірування в системі, запропоновано алгоритми визначення асимптотичних оцінок невідомих за вихідними сигналами в реальному часі. Зазначений підхід отримання асимптотичних оцінок параметрів в подальшому буде використано в задачах адаптивного керування та синхронізації руху мережі осциляторів.

Цитована література

1. *Isermann R., Munchhof M.* Identification of Dynamic Systems: An Introduction with Applications. Springer. 2011. – 705 p.
2. *A. Lienard.* Etude des oscillations entretenues // Revue generale de l'electricite. – 1928. – 23. – P. 901–954.
3. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.

4. *Жоголева Н.В., Щербак В.Ф.* Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления // Труды ИПММ НАН Украины. – 2015. – Т. 29.– С. 69–76.
5. *Ковалев А.М., Щербак В.Ф.* Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем. – К.: Наук. думка, 1993.
6. *Hassan K. Khalil.* Nonlinear Systems, 3rd Edition. – Prentice-Hall, 2002. – 750 p.
7. *Жоголева Н.В., Щербак В.Ф.* Идентификация характеристик осцилляторных сетей // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. – 2016. – Т. 84. – С. 22–30.

References

1. Isermann, R., Munchhof, M. (2011). *Identification of Dynamic Systems: An Introduction with Applications.* Springer.
2. Lienard, A. (1928). Etude des oscillations entretenues. *Revue generale de l'electricite, 23*, 901–954.
3. Kharlamov, P.V. (1974). On invariant relations of a system of differential equations. *Mehanika tverdogo tela, 6*, 15–24 (in Russian).
4. Zhogoleva, N.V., Shcherbak, V.F. (2015). Sintez dopolnitelnyh sootnosheniy v obratnyh zadachah upravleniya. *Proc. IPMM NANU, 29*, 69–76 (in Russian).
5. Kovalev, A.M., Shcherbak, V.F. (1993). *Upravlyayemost', nablyudayemost', identifitsiruyemost' dinamicheskih sistem.* K., Nauk. dumka.
6. Hassan, K. Khalil. (2002). *Nonlinear Systems.* 3rd Edition. Prentice-Hall.
7. Zhogoleva, N.V., Shcherbak, V.F. (2016). Identification of oscillator networks characteristics. *Visnyk Kharkivskogo nacional'nogo universitetu im. V.N. Karazina, 84*, 22–30 (in Russian).

N.V. Zhogoleva, V.F. Shcherbak

Damping parameters identification of Lienard polynomial system.

In many applications of physics, biology, and other sciences, an approach based on the concept of model equations is used as an approximate model of complex nonlinear processes. The basis of this concept is the provision that a small number of characteristic types movements of simple mathematical models inherent in systems give the key to understanding and exploring a huge number of different phenomena. In particular, it is well known that the complex oscillatory motion can be modeled by a system consisting of one or more coupled nonlinear oscillators that governs by differential equation of a second-order. A Lienard system, namely $\ddot{x}(t) + f(x(t))\dot{x}(t) + g(x(t)) = 0$, is a generalization of the such models. Here $f(x(t))$ and $g(x(t))$ are functions that represent various nonlinear phenomena. The typical sources of nonlinearities in Lienard systems are as follows: large displacements of the structure provoking geometric nonlinearities, a nonlinear material behavior, complex law of damping dissipation, etc. In fact, parameter identification is the base of several engineering tasks: identification can be used for the following: (i) to gain knowledge about the process behavior, (ii) to validate theoretical models, (iii) to tune controller parameters, (iv) to design adaptive control algorithms, (v) to process supervision and fault detection, (vi) to on-line optimization. Hence, in order to represent these nonlinearities, identifying the parameters characterizing their behaviors is essential. The problem of constructing globally convergent identificator for polynomial representation of damping force in general Lienar oscillator is addressed. The method of invariant relations is used for identification scheme design. This aproach is based on dynamical extension of original system and construct of appropriate invariant relations, from which the unknowns parameters can be expressed as a functions of the known quantities on the trajectories of extended system. The final synthesis is carried out from the condition of obtaining asymptotic estimates of unknown parameters. It is shown that an asymptotic estimate of the unknown states can be obtained by rendering attractive an appropriately selected invariant manifold in the extended state space.

Keywords: *nonlinear oscillations, polinomial Lienard oscillator, parameter identification, invariant relations, asymptotic estimates.*

Ін-т прикл. математики і механіки НАН України, Слов'янськ
Отримано 18.05.20
zhogoleva.nadia@gmail.com,
scherbakvf@ukr.net