УДК 62-50:519.7
DOI: 10.37069/1683-4720-2021-35-3

©2021. **Н.В. Жоголева, І.С. Дмитришин**

ВИМУШЕНА СИНХРОНІЗАЦІЯ КУТОВИХ ШВИДКОСТЕЙ ТВЕРДИХ ТІЛ

Розглядається задача синхронізації для нелінійних динамічних систем вхід-вихід при неповній інформації про стан системи. У лінійному випадку ця задача може бути розв'язана за допомогою побудови асимптотичного спостерігача, в разі нелінійного об'єкту відповідний "separation principle" гарантує лише локальний результат. Пропонований в роботі спосіб засновано на використанні динамічного розширення вихідної системи її прототипом і нелінійних методах синтезу керувань, стабілізуючих відхилення від заданого інваріантного многовиду системи диференціальних рівнянь. В якості додатка запропонованої схеми синхронізації для динамічних рівнянь Ейлера, що описують обертання твердого тіла навколо нерухомої точки, розв'язана задача синхронізації кутових швидкостей двох ідентичних твердих тіл при певних обмеженнях на їхні моменти інерції.

MSC: 34C15, 34D20.

Keywords: *нелінійні динамічні системи, синхронізація траєкторій, інваріантні співвідношення, рівняння Ейлера.*

1. Зведення задачі синхронізації до задачі стабілізації відхилень по частині змінних.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x), \quad x(t) \in R^n, \\ y &= h(x), \quad y \in R^k. \end{aligned} \tag{1}$$

Тут $y(t)$ – вихід системи, значення якого відомі на будь-якій траєкторії системи (1). Передбачається, що функції $f(x), h(x)$ є диференційованими функціями своїх аргументів, а розв'язок $x(t)$ – обмежена функція часу. Розіб'ємо вектор x на два підвектора $x = (x_1, x_2)^T$, де $x_1 = (x^1, x^2, \ldots, x^k)^T, x_2 = (x^{k+1}, x^{k+2}, \ldots, x^n)^T$. Без додаткових обмежень можна вважати, що система (1) за допомогою заміни змінних приведена до виду, при якому вимірюються перші k координат, тобто $y(t) = x_1(t)$. Крім того, обмежимо клас даних об'єктів системами, праві частини рівнянь яких лінійні відносно невідомих змінних $x_2(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2, \\ \dot{x_2} &= f_2(x_1) + g_2(x_1)x_2, \\ y &= x_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Тут $g_1(x), g_2(x)$ – матриці розмірностей $k \times (n-k)$ та $(n-k) \times (n-k)$ відповідно.

Поряд з системою (2) розглянемо рівняння її керованого прототипу. Перепишемо рівняння (2), припускаючи що їх праві частини можуть містити n довільних функцій $u_1(.) \in R^k, u_2(.) \in R^{n-k}$:

$$\begin{aligned} \dot{p_1} &= f_1(p_1) + g_1(p_1)p_2 + u_1, \\ \dot{p_2} &= f_2(p_1) + g_2(p_1)p_2 + u_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Задача керованої синхронізації траєкторій систем (2), (3) полягає у виборі функцій $u_1(.), u_2(.)$ таким чином, щоб розв'язок системи (3) з довільними початковими умовами асимптотично прямував до того розв'язку системи (2), який відповідає спостережуваному виходу: $y(t) = x_1(t)$.

Розглядаючи спільно рівняння (2),(3), отримуємо систему $2n$ диференціальних рівнянь, що містять n керувань $u_1(.), u_2(.)$. Інформація про фазовий вектор $x(t)$ вихідної системи невідома, доступні виміру лише його k координат $x_1(t)$. В теорії керування одним із шляхів розв'язання проблеми неповноти вимірюваної інформації про стан системи є отримання оцінки вектора стану на основі даних про значеннях виходів за допомогою спостерігача – спеціальної динамічної системи, стан якої з плином часу досить швидко наближається до стану вихідної системи. Основна проблема при побудові спостерігача складається в тому, щоб забезпечити задану динаміку зменшення помилки спостереження. Зазвичай бажаним є її експоненціальне за часом спадання.

Припустимо, що для задачі синхронізації траєкторій динамічних систем знайдено розв'язок у вигляді зворотного зв'язку $u(x)$ і відома оцінка $\hat{x}$, що отримана за допомогою спостерігача. Тоді можна розглянути керування, яке виходить із зворотного зв'язку заміною стану системи на його оцінку. Виникає питання, чи буде отриманий таким чином закон керування у вигляді зворотного зв'язку $u(\hat{x})$ розв'язком вихідної задачі. Для лінійних стаціонарних систем відповідь на це питання позитивна і відповідає відомому "separation principle" [1]: якщо для лінійної стаціонарної системи побудовано експонентний спостерігач і знайдено лінійний зворотний зв'язок, який глобально асимптотично стабілізує задане положення рівноваги – то при відповідному зворотному зв'язку $u(\hat{x})$ глобальна асимптотична стійкість положення рівноваги зберігається. Для нелінійних систем в загальному випадку відповідь на це питання негативна: відомі приклади нелінійних систем, до яких принцип поділу непридатний. Причина цього – можливе явище необмеженого зростання розв'язків системи з керуванням $u(\hat{x})$ за скінченний час, перш ніж помилка оцінки стану системи за допомогою спостерігача зійдеться до нуля.

З урахуванням відсутності інформації про повний фазовий вектор вихідної системи будемо розв'язувати задачу синтезу керувань, вважаючи виконаними наступні припущення:

А1) Керування $u_1(.), u_2(.)$ можуть залежати лише від відомих величин $x_1(t)$ і фазового вектора системи (3) – координат $p_1(t), p_2(t)$;

А2) Для замкнутої системи (2), (3), отриманої в результаті підстановки функцій $u_1(x_1, p_1, p_2), u_2(x_1, p_1, p_2)$ в праві частини (2), виконано умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші $\forall p(0) \in R^n, t > 0$.

Будь-які функції $u_1(.), u_2(.)$, що задовольняють припущеннями A1, A2, будемо вважати допустимими керуваннями. З урахуванням цих обмежень далі можемо вважати, що розв'язки системи (3), які відповідають допустимим керуванням, є відомими функціями часу. Позначимо через $e_i = p_i - x_i, i = 1, 2$ відхилення між собою траєкторій систем (2), (3). Віднімаючи з рівнянь (3) рівняння (2), отримаємо систему диференціальних рівнянь у відхиленнях

$$\begin{aligned} \dot{e_1} &= G_1(x_1, p_1) + g_1(x_1)e_2 + u_1, \\ \dot{e_2} &= G_2(x_1, p_1) + g_2(x_1)e_2 + u_2, \end{aligned} \tag{4}$$

де складові $G_i(x_1, p_1) = [g_i(p_1) - g_i(x_1)]p_2 + f_i(p_1) - f_i(x_1),\ i = 1, 2$ залежать тільки від відомих величин x_1, p_1, p_2. Тому, не порушуючи умови A1, введемо нові керування v_1, v_2 за формулами $v_i = G_i(x_1, p_1) + u_i, \quad i = 1, 2$. Тоді рівняння у відхиленнях матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \dot{e_1} &= g_1(x_1)e_2 + v_1, \\ \dot{e_2} &= g_2(x_1)e_2 + v_2. \end{aligned} \tag{5}$$

З урахуванням зроблених перетворень задача синхронізації зазвичай розглядається як задача безпосереднього підбору керувань $v_1(.), v_2(.)$, стабілізуючих значення змінних e_1, e_2 в розширеній системі диференціальних рівнянь (2), (5). При цьому умова A1 накладає наступне обмеження: керуючі функції $v_1(.), v_2(.)$ можуть залежати лише від змінних x_1, p_1, p_2 або, що те ж саме, від x_1, e_1, p_2.

2. Синтез інваріантних співвідношень.

Для побудови законів синхронізації, на відміну від загального підходу, використаємо розроблений в аналітичній механіці метод інваріантних співвідношень [2], який призначено для пошуку частинних розв'язків (залежностей між змінними) в задачах динаміки твердого тіла з нерухомою точкою. Модифікація цього методу до проблем теорії керування, спостереження, ідентифікації дозволяє синтезувати між відомими і невідомими величинами вихідної системи додаткові зв'язки, що виникають в процесі руху її розширеної моделі [3, 4].

Щоб уникнути можливого необмеженого росту розв'язків і забезпечити лінійну динаміку для відхилення траєкторій скористаємося керуваннями для синтезу інваріантного для траєкторій систем (2), (5) многовида. Зробимо додаткове припущення, вважаючи, що траєкторії системи (2), (5) належать деякому, поки невизначеному, інваріантному диференціальному многовиду в просторі змінних x, e, який описується системою $n - k$ рівностей

$$e_2 - \Phi(x_1, e_1) = 0, \tag{6}$$

що задовольняють граничній умові $\Phi(x_1, 0) = 0$. Тоді для розв'язання вихідної задачі досить підібрати керування $v_1(.), v_2(.)$ і фукцію $\Phi(x_1, e_1)$ так, щоб для траєкторій розширеної системи (2), (3) або, що те ж саме, системи (2), (5), виконувалися умови:

1) $\lim_{t\to\infty} e_1 = 0$;

2) рівняння (6) описують інваріантний многовид M в просторі змінних $\{x_1, x_2, e_1, e_2\}$ з функцією $\Phi(x_1, e_1)$, що задовольняє граничним умовам $\Phi(x_1, 0) = 0$;

3) вказаний многовид має властивість глобального асимптотичного тяжіння, тобто для будь-якого розв'язку системи (2)

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(x_1(t), 0)) = 0.$$

Розглянемо спочатку задачу про синтез керувань, при яких многовид, що визначається формулами (6), буде інваріантним многовидом розширеної системи (2), (5). Зробимо заміну змінних e_2 за формулою $\eta = e_2 - \Phi(x_1, e_1)$, де вектор η характеризує відхилення траєкторій системи (2), (5) від многовида (6). У нових змінних рівняння відхилень такі

$$\begin{aligned} \dot{e_1} &= g_1(x_1)(\Phi + \eta) + v_1, \\ \dot{\eta} &= [g_2(x_1) + (\Phi_{x_1} - \Phi_{e_1})g_1(x_1)](\Phi + \eta) - \Phi_{x_1}[f_1(x_1) + g_1(x_1)p_2] + v_2 - \Phi_{e_1}v_1, \end{aligned} \tag{7}$$

де через Φ_{x_1}, Φ_{e_1} позначено якобієві матриці

$$\Phi_{x_1} = \frac{\partial\Phi(x_1, e_1)}{\partial x_1}, \quad \Phi_{e_1} = \frac{\partial\Phi(x_1, e_1)}{\partial e_1}.$$

Оберемо керування v_2 таким, що

$$v_2 = -[g_2(x_1) + (\Phi_{x_1} - \Phi_{e_1})g_1(x_1)]\Phi + \Phi_{x_1}(f_1(x_1) + g_1(x_1)p_2) + \Phi_{e_1}v_1.$$

Тоді система (7) приймає вигляд

$$\begin{aligned} \dot{e_1} &= g_1(x_1)(\Phi + \eta) + v_1, \\ \dot{\eta} &= [g_2(x_1) + (\Phi_{x_1} - \Phi_{e_1})g_1(x_1)]\eta. \end{aligned} \tag{8}$$

Звідси випливає, що функція $\eta(t) = 0$ задовольняє системі (8), отже, якщо в певний момент часу рівність (6) виконано, то вона буде виконано тотожньо для всіх t.

Для того щоб забезпечити властивість глобального тяжіння для інваріантного різномаїття (6) і спрямувати відхилення $e_1(t)$ до нуля, в нашому розпорядженні залишається вибір виду функції $\Phi(x_1, e_1)$ і керування $v_1(.)$.

3. Синтез стабілізуючих керувань.

Нехай функція $\Phi(x_1, e_1)$ є частинним розв'язком системи рівнянь в частинних похідних першого порядку

$$g_2(x_1) + (\Phi_{x_1} - \Phi_{e_1})g_1(x_1) = -(\lambda, \ldots, \lambda)^T, \quad \Phi(x_1, 0) = 0,$$

де $\lambda > 0$. Тоді, якщо відповідне цьому розв'язку керування $v_2(x_1, e_1)$ буде задовольняти обмеженню А2, то многовид, який визначається формулами (6), буде мати властивість глобального тяжіння, а самі ці формули визначать асимптотичну оцінку змінних $x_2(t) = p_2(t) - e_2(t)$.

Для забезпечення асимптотичної стійкості нульового розв'язку системи (8) оберемо керування $v_1 = -g_1(x_1)\Phi(x_1, e_1) - \Gamma e_1$, де $\Gamma = \mathtt{diag}(\gamma, \dots, \gamma), \gamma > 0$. В результаті система (8) матиме вигляд

$$\begin{aligned} \dot{e_1} &= g_1(x_1)\eta - \Gamma e_1, \\ \dot{\eta} &= -\Lambda\eta, \end{aligned} \tag{9}$$

де $\Lambda = \mathtt{diag}(\lambda, \dots, \lambda)$.

Нехай $V(t) = \frac{1}{2}(e_1^T e_1 + \eta^T \eta)$ – функція Ляпунова для системи (9). Її похідна в силу системи (9) дорівнює

$$\dot{V}(t) = -e_1^T \Gamma e_1 + e_1^T g_1(x_1)\eta - \eta^T \Lambda \eta.$$

Згідно зробленим припущенням, траєкторія $x(t)$ є обмеженою функцією часу. Тобто за додаткової вимоги обмеженості значень $g_1(x_1)$ з останньої рівності випливає, що значення γ, λ можуть бути обрані таким чином, що похідна функції Ляпунова $\dot{V}(t)$ стає від'ємною функцією часу. Таким чином, в результаті запропонованої схеми синтезу керувань отримуємо, що

1) тракторії системи (3),(6) прямують до многовиду $e_2 - \Phi(x_1, e_1) = 0$;

2) $\lim_{t\to\infty} e_1 = 0$;

3) з граничної умови $\Phi(x_1, 0) = 0$ для функції $\Phi(x_1, e_1)$, яка є диференційована, а значить неперервна, випливає, що $\lim_{t\to\infty} e_2 = 0$.

4. Задача синхронізації за виходом кутових швидкостей твердих тіл. Як додаток даного способу розв'язання задачі синхронізації розглянемо рівняння, що описують обертання по інерції твердого тіла навколо нерухомої точки, яка співпадає з центром мас тіла.

Позначивши

$$a_1 = \frac{A_2 - A_3}{A_1}, \quad a_2 = \frac{A_3 - A_1}{A_2}, \quad a_3 = \frac{A_1 - A_2}{A_3}$$

запишемо рівняння Ейлера

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1 x_2 x_3, \\ \dot{x}_2 &= a_2 x_3 x_1, \\ \dot{x}_3 &= a_3 x_1 x_2, \end{aligned} \tag{10}$$

де A_1, A_2, A_3 – означають моменти інерції тіла відносно головних вісей, вектор $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ – описує кутову швидкість тіла. Будемо вважати, що вихід системи (10) задано функціями

$$y_1(t) = x_1(t),\ y_2(t) = x_2(t),$$

тобто перші дві компоненти вектора кутової швидкості вимірюються і є відомими як функції часу, а компонента $x_3(t)$ залишається невідомою.

Оскільки в роботі пропонується метод синхронізації для нелінійних систем, то далі будемо вважати, що усі моменти інерції різні, тобто рівняння (10) є суттєво нелінійними. В разі $A_1 = A_2$ компонента $x_3(t)$ вектора кутової швидкості є сталою величиною і задача синхронізації може бути вирішена методами лінійних систем. Якщо $A_1 = A_2 = A_3$, то з очевидних причин вихідна задача синхронізації за виходом не має розв'язку.

Запишемо аналогічну систему з поки що довільними функціями – законами керування $u_i(.), i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= a_1 p_2 p_3 + u_1, \\ \dot{p}_2 &= a_2 p_1 p_3 + u_2, \\ \dot{p}_3 &= a_3 p_1 p_2 + u_3. \end{aligned} \tag{11}$$

Необхідно підібрати керування u_1, u_2, u_3 таким чином, щоб будь-який розв'язок системи (11) асимптотично прямував до того розв'язку системи (10), який відповідає виходу. Для цього складемо рівняння помилок, позначивши відповідні відхилення через $e_i(t) = p_i(t) - x_i(t),\ i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= a_1(e_1 p_3 + e_3 x_2) + u_1, \\ \dot{e}_2 &= a_2(e_2 p_3 + e_3 x_1) + u_2, \\ \dot{e}_3 &= a_3(e_1 p_2 + e_2 p_1) + u_3. \end{aligned} \tag{12}$$

Будемо розв'язувати задачу стабілізації тривіального розв'язку системи (12) в околі деякого одновимірного многовида $e_3 - \Phi(x_1, x_2, e_1, e_2) = 0$. Зробимо заміну змінної e_3 за формулою $\eta = e_3 - \Phi(x_1, x_2, e_1, e_2)$ і введемо нові керування, які залежать лише від доступних виміру величин x_1, x_2 і фазового вектора системи (11)

$$v_1 = a_1(e_1 p_3 + x_2 \Phi) + u_1, \quad v_2 = a_2(e_2 p_3 + x_1 \Phi) + u_2, \quad v_3 = a_3(p_1 p_2 - x_1 x_2) + u_3. \tag{13}$$

В нових змінних система (12) запишеться як

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= a_1 x_2 \eta + v_1, \\ \dot{e}_2 &= a_2 x_1 \eta + v_2, \\ \dot{\eta} &= (a_1 x_2 \Phi_{x_1} + a_2 x_1 \Phi_{x_2})(\eta + \Phi - p_3) + v_3. \end{aligned} \tag{14}$$

На першому кроці конструювання допоміжної системи вимагатимемо, щоб керування v_3 задовольняло рівності

$$v_3 = (a_1 x_2 \Phi_{x_1} + a_2 x_1 \Phi_{x_2})(p_3 - \Phi) - \Phi_{e_1} v_1 - \Phi_{e_2} v_2. \tag{15}$$

Права частина формули (15) не залежить від x_3, e_3, η, тобто таке керування є допустимим. В результаті система рівнянь у відхиленнях (14) перетвориться в систему диференціальних рівнянь, для якої многовид, який визначається формулою $e_3 - \Phi(x_1, x_2, e_1, e_2) = 0$, стає інваріантним:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= a_1 x_2 \eta + v_1, \\ \dot{e}_2 &= a_2 x_1 \eta + v_2, \\ \dot{\eta} &= [a_1 x_2(\Phi_{x_1} - \Phi_{e_1}) + a_2 x_1(\Phi_{x_2} - \Phi_{e_2})]\eta. \end{aligned} \tag{16}$$

Для зведення задачі синхронізації до задачі часткової стабілізації змінних e_1, e_2 потрібно забезпечити, щоб:

a) вказаний многовид мав би властивість глобального асимптотичного тяжіння;

b) функція $\Phi(x_1, x_2, e_1, e_2)$ та її частинні похідні першого порядку в даній області були б неперервними функціями своїх аргументів і вона задовольняла граничній умові $\Phi(x_1, x_2, 0, 0) = 0$.

Оскільки керування v_3 вже вибрано за формулою (15), то для виконання умов *a*) і *b)* будемо шукати функцію $\Phi(x_1, x_2, e_1, e_2)$ як розв'язок граничної задачі для рівняння в частинних похідних першого порядку

$$a_1 x_2(\Phi_{x_1} - \Phi_{e_1}) + a_2 x_1(\Phi_{x_2} - \Phi_{e_2}) = -\lambda, \quad \Phi(x_1, x_2, 0, 0) = 0. \tag{17}$$

Вид розв'язку рівняння (17) істотно залежить від знаків параметрів a_1, a_2. Тобто розв'язок задачі синхронізації траєкторій систем (10),(11) повинен враховувати певні обмеження на розподіл мас в цих тілах. Розглянемо випадок, коли параметри a_1, a_2 мають різні знаки. Таке співвідношення виникає коли моменти інерції твердого тіла задовольняють одній з нерівностей: $1) A_1 < A_3, A_2 < A_3; \quad 2) A_3 < A_2, A_3 < A_1$. Тоді рівняння (17) має сім'ю обмежених розв'язків. Розв'язок, який задовольняє крайовій умові $\Phi(x_1, x_2, 0, 0) = 0$ позначимо:

$$\Phi^*(x_1, x_2, e_1, e_2) = \lambda \frac{\operatorname{sign} a_1}{\sqrt{-a_1 a_2}} \left[\mathtt{arctg} \left(\sqrt{-\frac{a_2}{a_1}} \frac{x_1}{x_2} \right) - \mathtt{arctg} \left(\sqrt{-\frac{a_2}{a_1}} \frac{x_1 + e_1}{x_2 + e_2} \right) \right]. \tag{18}$$

Інший випадок, коли параметри a_1, a_2 мають однакові знаки, виникає коли A_3 не є екстремальним моментом інерції, тобто: $1) A_3 < A_1, A_2 < A_3; \quad 2) A_3 < A_2, A_1 < A_3$. В цьому випадку рівняння (17) має сім'ю обмежених розв'язків при виконанні крайової умови $\Phi(x_1, x_2, 0, 0) = 0$ наступного вигляду:

$$\Phi^{**}(x_1, x_2, e_1, e_2) = -\frac{\lambda}{\sqrt{a_1 a_2}} ln \frac{x_1 \sqrt{a_1 a_2} + |a_1| \cdot |x_2|}{(x_1 + e_1)\sqrt{a_1 a_2} + |a_1| \cdot |x_2 + e_2|}. \tag{19}$$

Вважаючи

$$v_1 = -\gamma e_1, \quad v_2 = -\gamma e_2, \tag{20}$$

з урахуванням обмеженості функцій (18) або (19) та їх похідних в області значень змінних x_1, x_2, e_1, e_2, отримуємо, що додатно визначена функція

$$V(t) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + \eta^2) \tag{21}$$

вибором сталих λ, γ може бути зроблена від'ємно визначеною на траєкторіях системи (16). Тим самим показано, що функції v_1, v_2, v_3, обчислені за формулою (15), (20) і визначають, з урахуванням перетворень (13) керування u_1, u_2, u_3.

Тобто, для випадку 1)$A_1 < A_3, A_2 < A_3$; 2)$A_3 < A_2, A_3 < A_1$ керування мають вигляд:

$$u_1 = -\gamma e_1 - a_1\left(e_1 p_3 + x_2 \cdot \Phi^*(x_1, x_2, e_1, e_2)\right),$$

$$u_2 = -\gamma e_2 - a_2\left(e_2 p_3 + x_1 \cdot \Phi^*(x_1, x_2, e_1, e_2)\right),$$

$$u_3 = \frac{\lambda \cdot a_1}{a_1(x_2+e_2)^2 - a_2(x_1+e_1)^2}\left\{\left[a_1 x_2 e_2 - a_2 x_1 e_1 + a_1 e_2^2 - a_2 e_1^2\right](p_3 - \Phi^*(x_1, x_2, e_1, e_2)) - \right.$$
$$\left. -\gamma(e_1 x_2 - e_2 x_1)\right\} - a_3 \cdot (p_1 p_2 - x_1 x_2),$$

де $\Phi^*(x_1, x_2, e_1, e_2)$ обирається із (18).

Інший випадок на моменти інерції 1)$A_3 < A_1, A_2 < A_3$; 2)$A_3 < A_2, A_1 < A_3$ дає змогу записати керування таким чином:

$$u_1 = -\gamma e_1 - a_1\left(e_1 p_3 + x_2 \cdot \Phi^{**}(x_1, x_2, e_1, e_2)\right),$$

$$u_2 = -\gamma e_2 - a_2\left(e_2 p_3 + x_1 \cdot \Phi^{**}(x_1, x_2, e_1, e_2)\right),$$

$$u_3 = \lambda \cdot \frac{\gamma(a_2 e_1 + \sqrt{a_1 a_2} e_2) - a_2\left(p_3 - \Phi^{**}(x_1, x_2, e_1, e_2)\right)(e_1\sqrt{a_1 a_2} + |a_1| e_2)}{a_2((x_1+e_1)\sqrt{a_1 a_2} + |a_1| \cdot |x_2+e_2|)} -$$
$$-a_3 \cdot (p_1 p_2 - x_1 x_2).$$

Тут $\Phi^{**}(x_1, x_2, e_1, e_2)$ обирається із (19). Такими керуваннями забезпечується асимптотичне прямування довільної траєкторії системи (11) до тієї траєкторії системи (10), яка формує вихід системи з функціями $x_1(t), x_2(t)$.

Висновок.

У роботі розглядається новий спосіб розв'язання задачі синхронізації траєкторій для нелінійних динамічних систем, праві частини яких лінійні відносно невідомих компонент фазового вектора. Запропонований підхід засновано на використанні метода інваріантних співвідношень та методів керованої стабілізації нелінійних систем щодо частини змінних. Рівняння вихідної системи доповнюються рівняннями їх керованого прототипу. Для отриманої розширеної системи розв'язується задача синтезу керувань, при яких многовид, що описується системою додаткових співвідношень, стає інтегральним многовидом з властивістю глобального тяжіння для траєкторій розширеної системи. Вихідна задача синхронізації розглядається в околі цього многовида, що дозволяє уникнути можливого необмеженого росту розв'язків і забезпечити лінійну динаміку для відхилення траєкторій.

В якості додатка запропонованої схеми синхронізації для динамічних рівнянь Ейлера, що описують обертання твердого тіла навколо нерухомої точки, розв'язана задача синхронізації кутових швидкостей двох ідентичних твердих тіл при певних обмеженнях на їхні моменти інерції.

Литература

1. *Atassi A.N., Khalil H.K.* A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1999. – V. 44, № 9. – P. 1672–1687.
2. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
3. *Shcherbak V.F.* Synthesis of virtual measurements in nonlinear observation problem. – PAMM. – 2004. – V. 4, Is. 1. – P. 139–140.
4. *Жоголева Н.В., Щербак В.Ф.* Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления // Труды ИПММ НАН Украины. – 2015. – Т. 29.– С. 69–76.

References

1. Atassi, A.N., Khalil, H.K. (1999). A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr., 44*(9), 1672–1687.
2. Kharlamov, P.V. (1974). On invariant relations of a system of differential equations. *Mehanika tverdogo tela, 6*, 15–24 (in Russian).
3. Shcherbak, V.F. (2004). Synthesis of virtual measurements in nonlinear observation problem. *PAMM, 4*(1), 139–140.
4. Zhogoleva, N.V., Shcherbak, V.F. (2015). Synthesis of additional relations in inverse control problems. *Proceedings of IAMM NAS of Ukraine, 29*, 69–76 (in Russian).

N.V. Zhogoleva, I.S. Dmytryshyn

Forced synchronization of rigid bodies angular velocities.

The problem of synchronization on incomplete information on a state of system is considered. In control theory, one of the ways to solve the problem of incompleteness of the measured information is to obtain a vector estimate state by the values of outputs with the help of an observer – a special dynamic system, the state of which approaches the initial trajectory. The main problem in constructing an observer is therefore, to provide a exponential dynamics of observation error reduction. Assume that a solution in the form of feedback $u(x)$ is found for the problem of synchronization of trajectories and estimate $\hat{x}$ is obtained with the help of an observer. The question arises whether thus obtained control law in the form of feedback $u(\hat{x})$ solve the original problem. For linear stationary systems, the answer to this question is positive (the separation principle): if for of a linear stationary system an exponential observer is constructed and a linear feedback is found, globally asymptotically stabilizing a given equilibrium position at a known state vector – then with the appropriate feedback on the estimate state vector global asymptotic stability of the equilibrium position stored. For nonlinear systems in the general case the answer to this question is negative: there are examples of nonlinear systems to which the separation principle is unsuitable. The reason for this is possible phenomenon of unlimited growth of system solutions with control $u(\hat{x})$ for a finite time before the observer estimates error of the state will be reduced to zero. To construct the laws of synchronization, in contrast to the general approach, we use the method of invariant relations developed in analytical mechanics, which is designed to find partial solutions (dependences between variables) in problems of dynamics of a rigid body with a fixed point. Modification of this method to the problems of control theory allows to synthesize a manifold in the space of an extended system, which avoids possible unlimited growth of solutions and provides controlled dynamics for trajectory deviation.

Keywords: *nonlinear dynamical systems, trajectory synchronization, invariant relations, Euler equations.*

Ін-т прикл. математики і механіки НАН України, Слов'янськ
`zhogoleva.nadia@gmail.com; dmitrishin.ira@gmail.com`

Отримано 18.09.21