УДК 517.9
DOI: 10.32782/1683-4720-2022-36-4

©2022. **С.М. Чуйко, О.В. Чуйко, Д.Д. Д'яченко**

УМОВИ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ЗАДАЧІ ПРО ВІДНОВЛЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Проблеми обробки та покращення зображень [1], зокрема, засобами комп'ютерної томографії [2,3], посідають почесне місце у сучасній прикладній математиці [4]. Однією з традиційних задач відновлення зображень є задача про покращення зображень за даними, які містять помилки, або ж відновлення відсутніх частин зображень [1,5]. Задачі на відновлення зображень актуальні в радіоастрономії, електронній мікроскопії, обробці відео та фотографічних зображень. Задачі на відновлення зображень постають при покращенні зображень за даними, отриманими під час комп'ютерної томографії [2]. За розробку комп'ютерної томографії А. Кормак та Г. Хаунсвілд отримали у 1979 році Нобелівську премію. Задачі на відновлення зображень тісно пов'язані з задачами на перетворення монохромних зображень, отриманих засобами електронної мікроскопії. Перетворення зображень дозволяє перевищити границю роздільної здатності при фіксованих параметрах електронної мікроскопії.

Задачі на відновлення зображень пов'язані з дослідженням обернених задач [6–8]. У свою чергу, дослідження обернених задач ускладнюється некоректністю постановки таких задач [9]. Побудові схем регуляризації некоректно постановлених задач присвячені роботи [9,10]. У сучасній теорії відновлення зображень суттєво використовується розвинений апарат псевдообернення, а саме, псевдообернення за Муром–Пенроузом [11–13]. Нами використовується той факт, що некоректно поставлена задача для лінійної алгебраїчної системи, а саме, нерозв'язна задача, завжди має псевдорозв'язок, який мінімізує порму нев'язки для цієї задачі у сенсі найменших квадратів [11,12]. Саме для знаходження псевдорозв'язку нами використовується псевдообернення за Муром–Пенроузом.

У статті знайдено умови розв'язності задачі про відновлення зображень. Запропонована у статті схема дослідження задачі про відновлення зображень може бути корисною, наприклад, для прогнозу приросту захворюваності на Covid – 19, або ж для покращення чи перетворення зображень [15–17].

MSC: 34N05.

Ключові слова: *відновлення зображень, метод найменших квадратів, псевдообернення за Муром–Пенроузом.*

1. Постановка задачі.

Поставимо задачу про відновлення монохромного зображення F за даними, які містять помилки, або ж відновлення відсутніх частин зображення [1,5]. Елементи матриці $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ визначають відтінки сірого кольору (greyscale) зображення розміром $(m \times n)$ пікселів. Позначимо функцію

$$\mathcal{F}(k) := \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^m,\ k = 1,\ 2,\ \dots ,n$$

і припустимо, що, взагалі кажучи,

$$\mathcal{F}(k) \neq F(k) \in \mathbb{R}^m,\ k = 1,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ n;$$

тут $F(k)$ – стовпці матриці $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Визначимо оператор $\mathcal{M}[A]: \ \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n}$, як оператор, який ставить у відповідність матриці $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор $\mathcal{B} := \mathcal{M}[A] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, утворений з n стовпців матриці A, а також обернений оператор

$$\mathcal{M}^{-1}\Big[\mathcal{B}\Big]: \ \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

який ставить у відповідність вектору $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$ матрицю $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Оператор $\mathcal{M}[A]$, як і обернений оператор $\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{B}]$, можуть бути зображені явно [14].

2. Лінійна модель відновлення зображення.

Позначимо вектори

$$q := \mathcal{M}[F], \ c := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m}.$$

Невідому функцію $\mathcal{F}(k)$ шукатимемо у вигляді

$$\mathcal{F}(k) := a\,k + b, \ k = 1, \ 2\ , \ \dots\ , \ n.$$

Невідомі вектори $a \in \mathbb{R}^m$ та $b \in \mathbb{R}^m$ визначає рівняння

$$Q\,c = q \tag{1}$$

з матрицею

$$Q := \begin{pmatrix} I_m & I_m \\ 2\,I_m & I_m \\ \dots & \dots \\ n\,I_m & I_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mn\times 2m}.$$

За умови $m \geq 2$ матриця Q – повного рангу [12]:

$$P_Q = 0, \ P_{Q^*} \neq 0,$$

тому у випадку

$$P_{Q^*}q = 0 \tag{2}$$

рівняння (1) однозначно розв'язне:

$$c = Q^+q.$$

Тут $Q^+ \in \mathbb{R}^{2m\times mn}$ – псевдообернена по Муру - Пенроузу матриця [12]; матриця P_Q – матриця-ортопроектор:

$$P_Q \in \mathbb{R}^{2m\times 2m};$$

P_{Q^*} – матриця-ортопроектор:

$$P_{Q^*} \in \mathbb{R}^{mn\times mn}.$$

Таким чином, доведена наступна лема.

Лема. *Задача про відновлення монохромного зображення* $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *у вигляді*

$$\mathcal{F}(k) := a\,k + b,\ k = 1,\ 2\ ,\ ...\ ,\ n$$

за умови $m \geq 2$, *однозначно розв'язна*

$$a = \begin{pmatrix} I_m & O \end{pmatrix} Q^+q,\ b = \begin{pmatrix} O & I_m \end{pmatrix} Q^+q$$

у випадку (2). Тут $\mathcal{F}(k)$ *– стовпці матриці* $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Приклад 1. *Знайдемо розв'язок задачі про відновлення монохромного зображення*

$$F := \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

у вигляді

$$\mathcal{F}(k) := a\,k + b,\ k = 1,\ 2\ , 3.$$

Оскільки умову (2) виконано, система (1), розв'язна:

$$c = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix};$$

тут

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_{Q^*} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, однозначно отримуємо розв'язок задачі про відновлення монохромного зображення:

$$a = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ b = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Отримана функція $\mathcal{F}(k)$ при $k = 1,\ 2\ ,3$ визначає відновлену матрицю $B = A$ і при

$$k = 1,\ 1,5,\ 2,\ 2,5,\ 3$$

дозволяє додати до матриці B два стовпці:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0,142\,857 & 0,25 & 0,428\,571 & 0,678\,571 & 1,00\,000 \\ 0,107\,143 & 0,1875 & 0,321\,429 & 0,508\,929 & 0,75 \\ 0,0714\,286 & 0,125 & 0,214\,286 & 0,339\,286 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Застосовуючи до матриці B_1^* запропоновану схему розв'язку задачі про відновлення монохромного зображення, можна додати до матриці B_1 дві строки

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0.142857 & 0.125 & 0.107143 & 0.0892857 & 0.0714286 \\ 0.25 & 0.21875 & 0.1875 & 0.15625 & 0.125 \\ 0.428571 & 0.375 & 0.321429 & 0.267857 & 0.214286 \\ 0.678571 & 0.59375 & 0.508929 & 0.424107 & 0.339286 \\ 1. & 0.875 & 0.75 & 0.625 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Матриця

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– невироджена, тому розв'язок задачі про відновлення монохромного зображення для матриці B_1 лінійною функцією отримано однозначно.

3. Загальна модель відновлення зображення.

За умови $P_{Q^*}q \neq 0$ рівняння (1) не розв'язне, тому модель відновленого зображення природно шукати у вигляді

$$\Phi(k) := c_1\,\varphi_1(k) + c_2\,\varphi_2(k) + \ \dots\ + c_p\,\varphi_p(k),\ k = 1,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ n;$$

тут $\varphi_1(k),\ \varphi_2(k),\ \dots\ ,\ \varphi_p(k)$ — система лінійно-незалежних, обмежених, взагалі кажучи, нелінійних, скалярних функцій. Невідомий вектор

$$c := \mathrm{col}\left(\ c_1,\quad c_2,\quad \dots\ ,\quad c_p\ \right) \in \mathbb{R}^{pm},\ c_j \in \mathbb{R}^m,\ j = 1,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ p$$

визначає рівняння

$$\mathcal{Q}\,c = q \tag{3}$$

з матрицею

$$\mathcal{Q} := \begin{pmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \dots & \varphi_p(1) \\ \varphi_1(2) & \varphi_2(2) & \dots & \varphi_p(2) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \varphi_1(n) & \varphi_2(n) & \dots & \varphi_p(n) \end{pmatrix} \otimes I_m \in \mathbb{R}^{mn\times np}.$$

У випадку

$$P_{\mathcal{Q}^*}q = 0 \tag{4}$$

рівняння (3), принаймні однозначно, розв'язне:

$$c = \mathcal{Q}^+q.$$

У випадку

$$P_{\mathcal{Q}^*}q \neq 0 \tag{5}$$

рівняння (3) не розв'язне, проте вектор $c = \mathcal{Q}^+q$ визначає відновлене монохромне зображення Φ, найкраще у сенсі найменших квадратів [11,12]. Тут $\mathcal{Q}^+ \in \mathbb{R}^{np\times mn}$ – псевдообернена по Муру–Пенроузу матриця [12]; матриця $P_{\mathcal{Q}}$ – матриця-ортопроектор:

$$P_{\mathcal{Q}} \in \mathbb{R}^{np\times np};$$

$P_{\mathcal{Q}^*}$ – матриця-ортопроектор:

$$P_{\mathcal{Q}^*} \in \mathbb{R}^{mn\times mn}.$$

Таким чином, доведена наступна теорема.

Теорема. *Задача про відновлення монохромного зображення $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ у вигляді*

$$\Phi(k) := c_1\,\varphi_1(k) + c_2\,\varphi_2(k) + \ \dots\ + c_p\,\varphi_p(k),\ c = Q^+q,\ k = 1,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ n$$

у випадку (4) розв'язна принаймні однозначно. У випадку (5) задача про відновлення монохромного зображення розв'язна найкращим чином у сенсі найменших квадратів. Тут $\Phi(k)$ *– стовпці матриці* $\Phi \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Приклад 2. *Знайдемо розв'язок задачі про відновлення монохромного зображення*

$$F := \begin{pmatrix} 0,359\ 729 & 0,239\ 943 & 0,139\ 631 & 0,0606\ 435 \\ 0,358\ 733 & 0,240\ 707 & 0,140\ 597 & 0,0610\ 523 \\ 0,615\ 286 & 0,509\ 131 & 0,435\ 226 & 0,390\ 012 \\ 0,615\ 469 & 0,510\ 644 & 0,436\ 579 & 0,388\ 845 \end{pmatrix}$$

у вигляді

$$\Phi(k) := c_1\,\varphi_1(k) + c_2\,\varphi_2(k) + c_3\,\varphi_3(k),\ \ k = 1,\ 2\ ,\ 3,\ 4.$$

Покладемо

$$\varphi_1(k) := 1,\ \varphi_2(k) := k,\ \varphi_3(k) := k^2.$$

Для рівняння (3) з матрицею

$$\mathcal{Q} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \otimes I_4 \in \mathbb{R}^{16\times 12}$$

має місце нерівність (5), тому рівняння (3) не розв'язне; тут

$$P_{\mathcal{Q}^*} = \frac{1}{20}\times$$

$$\times \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-3 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
3 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & -3 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.$$

В той же час, вектор $c = \mathcal{Q}^{+}q$ визначає функцію

$$\Phi(k) = \begin{pmatrix} 0,500378 - 0,150\,756\,k + 0,0101\,999\,k^2 \\ 0,496661 - 0,147\,416\,k + 0,00962\,016\,k^2 \\ 0,751022 - 0,151\,149\,k + 0,0152\,354\,k^2 \\ 0,747733 - 0,146\,758\,k + 0,0142\,729\,k^2 \end{pmatrix}, \ k = 1,\ 2\ ,\ 3,\ 4,$$

яка відновлює монохромне зображення

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0,359\,822 & 0,239\,665 & 0,139\,908 & 0,060\,551 \\ 0,358\,865 & 0,240\,310 & 0,140\,995 & 0,0609\,199 \\ 0,615\,108 & 0,509\,665 & 0,434\,692 & 0,390\,190 \\ 0,615\,248 & 0,511\,308 & 0,435\,915 & 0,389\,067 \end{pmatrix},$$

найкраще у сенсі найменших квадратів. У даному випадку

$$||F - \Phi||_{\infty} \approx 0,00\,177\,275.$$

Наслідок. *Задача про відновлення монохромного зображення $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ у вигляді*

$$\Phi(k) := c_1\,\varphi_1(k) + c_2\,\varphi_2(k) + \ \ldots\ + c_p\,\varphi_p(k),\ c = Q^{+}q,\ k = 1,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ n$$

у випадку (4), за умови

$$P_{\mathcal{Q}} = 0,$$

розв'язна однозначно.

Приклад 3. *Знайдемо розв'язок задачі про відновлення монохромного зображення*

$$F := \begin{pmatrix} 0,995\,906 & 0,731\,783 & 0,499\,998 \\ 0,742\,501 & 0,507\,881 & 0,257\,095 \\ 0,492\,974 & 0,265\,752 & 0,00457\,922 \\ 0,236\,667 & 0,000\,795\,824 & 0,000\,000 \end{pmatrix}$$

у вигляді

$$\Phi(k) := c_1\,\varphi_1(k) + c_2\,\varphi_2(k) + c_3\,\varphi_3(k),\ k = 1,\ 2\ ,\ 3.$$

Покладемо

$$\varphi_1(k) := 1,\ \varphi_2(k) := k,\ \varphi_3(k) := k^2.$$

Для рівняння (3) з матрицею

$$\mathcal{Q} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \otimes I_4 \in \mathbb{R}^{12\times 12}$$

має місце рівність (4), тому рівняння (3) розв'язне, причому однозначно; тут

$$P_{\mathcal{Q}^*} = P_{\mathcal{Q}} = 0.$$

Вектор $c = \mathcal{Q}^+ q$ визначає монохромне зображення

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0,995\,906 & 0,731\,783 & 0,499\,998 \\ 0,742\,501 & 0,507\,881 & 0,257\,095 \\ 0,492\,974 & 0,265\,752 & 0,00457\,922 \\ 0,236\,667 & 0,000\,795\,824 & 0,000\,000 \end{pmatrix}.$$

У даному випадку

$$||F - \Phi||_\infty \approx 1,05\,471 \times 10^{-15}.$$

Запропонована у статті схема дослідження задачі про відновлення зображень може бути корисною, наприклад, для прогнозу приросту захворюваності на Covid–19, або ж для покращення чи перетворення зображень [15–17].

Цитована література

1. *Stanimirovic P.S., Stojanovic I., Pappas D., Chountasis S.* On removing blur in images using least squares solutions // Filomat. – 2016. – V. 30 (14). – P. 3855–3866.
2. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. – М: Мир. – 1990. – 288 с.
3. *Sylvester J.* An anisotropic inverse boundary value problem // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1990. – V. 43, № 2. – P. 201–232.
4. *Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya., Rubashov I.B., Timonov A.A.* On the formulation and approximate solution of some inverse problems of NMR introscopy // Sov. Math. Dokl. – 1984. – V. 29. – P. 169 — 172.
5. *Дьяконов В.П.* Mathematica в математических и научно-технических расчетах. – М.: Солон-Пресс. – 2004. – 696 с.
6. *Крейн М.Г., Нудельман А.А.* О прямых и обратных задачах для частот граничной диссипации неоднородной струны // Докл. АН СССР. – 1979. – V. 247, № 5. – С. 1046–1049.
7. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. – Сибирское научное издательство. – Новосибирск. – 2009. – 457 с.
8. *Фаддеев Л.Д.* Единственность решения обратной задачи рассеяния // Вестник ЛГУ. Сер. мат., мех., астрон. – 1956. – V. 11, № 7. – С. 126–130.
9. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука. – 1986. – 288 с.
10. *Chuiko S.M.* On the regularization of a linear Fredholm boundary-value problem by a degenerate pulsed action // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – V. 197, № 1. – P. 138–150.
11. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и реккурентное оценивание. – М.: Наука. – 1977. – 224 с.
12. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. – 298 pp.
13. *Chountasis S., Katsikis V., Pappas D.* Applications of the Moore-Penrose inverse in digital image restoration // Mathematical Problems in Engineering. – 2009. – Article ID 170 724. – 12 pp.
14. *Chuiko S.M.* To the issue of a generalization of the matrix differential-algebraic boundary-value problem // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – V. 227, No. 1. – P. 13–25.
15. *Marinov T.T., Marinova R.S.* Inverse problem for adaptive SIR model: application to COVID-19 in Latin America // Infectious Disease Modelling. – 2022. – № 7. – P. 134–148.

16. *Krivorotko O., Sosnovskaia M., Vashchenko I., Kerr C., Lesnic D.* Agent-based modeling of COVID-19 outbreaks for New York state and UK: parameter identification algorithm. – Infectious Disease Modelling. – 2022. – № 7. – P. 30–44.
17. *Чуйко С.М., Несмелова О.В., Калініченко Я.В.* Умови розв'язності задачі, оберненої до задачі Коші для різницево-алгебраїчного рівняння // Нелінійні коливання. – 2021. – V. 24, № 3. – С. 422–434.

References

1. Stanimirovic, P.S., Stojanovic, I., Pappas, D., Chountasis, S. (2016). On removing blur in images using least squares solutions. *Filomat, 30*(14), 3855–3866.
2. Natterer, F. (1986). *The Mathematics of Computerized Tomography*. Vieweg Teubner Verlag. Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, Wiesbaden.
3. Sylvester, J. (1990). An anisotropic inverse boundary value problem. *Communications on Pure and Applied Mathematics, 43*(2), 201–232.
4. Tikhonov, A.N., Arsenin, V.Ya., Rubashov, I.B., Timonov, A.A. (1984). On the formulation and approximate solution of some inverse problems of NMR introscopy. *Sov. Math., Dokl., 29*, 169–172.
5. Diakonov, V.P. (2004). *Mathematica*. Moscow, Solon Press (in Russian).
6. Krein, M.G., Nudelman, A.A. (1979). On direct and inverse problems for the frequencies of the boundary dissipation of an inhomogeneous string. *Doklady Mathematics, 247*(5), 1046–1049.
7. Kabanikhin, S.I. (2009). *Inverse and noncorrect problems*. Novosibirsk, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences (in Russian).
8. Faddeev, L.D. (1956). Uniqueness of the solution to the inverse scattering problem. *Bulletin of Leningrad State University. Ser. mat., mech., astron, 11*(7), 126–130.
9. Tikhonov, A.N., Arsenin, V.Ya. (1977). *Solution of Ill-Posed Problems*. Winston, Washington, DC.
10. Chuiko, S.M. (2014). On the regularization of a linear Fredholm boundary-value problem by a degenerate pulsed action. *Journal of Mathematical Sciences, 197*(1), 138–150.
11. Albert, A. (1972). *Regression and the Moore-Penrose pseudoinverse*. Academic Press, New York, London, iii–xiii, 1–180.
12. Boichuk, A.A., Samoilenko, A.M. (2016). *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition)*. Berlin; Boston, De Gruyter.
13. Chountasis, S., Katsikis, V., Pappas, D. (2009). Applications of the Moore-Penrose inverse in digital image restoration. *Mathematical Problems in Engineering*. Article ID 170 724, 12 pp.
14. Chuiko, S.M. (2017). To the issue of a generalization of the matrix differential-algebraic boundary-value problem. *Journal of Mathematical Sciences, 227*(1), 13–25.
15. Marinov, T.T., Marinova, R.S. (2022). Inverse problem for adaptive SIR model: application to COVID-19 in Latin America. *Infectious Disease Modelling. 7*. 134–148.
16. Krivorotko, O., Sosnovskaia, M., Vashchenko, I., Kerr, C., Lesnic, D. (2022). Agent-based modeling of COVID-19 outbreaks for New York state and UK: parameter identification algorithm. *Infectious Disease Modelling, 7*, 30–44.
17. Chuiko, S.M., Kalinichenko, Ya.V., Nesmelova, O.V. (2021). Conditions of solvability of the problem inverse to the Cauchy problem for the difference-algebraic equation. *Nonlinear oscillations, 24*(3), 422–434.

S.M. Chuiko, E.V. Chuiko, D.D. Dyachenko

Conditions for the solvability of the problem of image reconstruction by the method of least squares.

Problems of image processing and improvement, in particular, by means of computed tomography, occupy an honorable place in modern applied mathematics. One of the traditional problems of image recovery is to improve images based on data that contain errors, or to restore missing parts of images.

Image recovery problems are relevant in radio astronomy, electron microscopy, video and photographic image processing. Image recovery problems arise when improving images based on data obtained during computed tomography. A. Cormack and G. Hounsfield received the Nobel Prize in 1979 for the development of computed tomography. Image recovery problems are closely related to the tasks of converting monochrome images obtained by electron microscopy. Image conversion allows you to exceed the resolution limit at fixed electron microscopy parameters. Image recovery problems are related to the study of inverse problems. In turn, the study of inverse problems is complicated by the incorrectness of such problems. Numerous regularization schemes have been developed for incorrectly solved problems. In the modern theory of image reconstruction, a well-developed pseudo-inversion apparatus is used, namely, Moore-Penrose pseudo-inversion. We use the fact that an incorrectly posed problems for a linear algebraic system, namely, an unsolvable problems, always has a pseudo-solution that minimizes the residual gap for this problem in the sense of least squares. It is to find a pseudo-solution that we use the Moore-Penrose pseudo-inversion. The conditions for solving the problem of image restoration are found in the article. The research scheme proposed in the article can be useful, for example, for predicting the increase in the incidence of Covid–19, or for improving or transforming images.

Keywords: *image reconstruction, least squares method, Moore–Penrose pseudoinversion.*

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ
`chujko-slav@ukr.net`

Отримано 26.03.2022