

УДК 539.375

Ф. Ф. Гасанов, канд. техн. наук

Азербайджанский технический университет (г. Баку, e-mail: hff74@mail.ru)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАРОЖДЕНИЯ ТРЕЩИН СДВИГА В ТЕЛЕ, ОСЛАБЛЕННОМ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ КРУГЛЫХ ОТВЕРСТИЙ

Построена математическая модель зарождения трещин в изотропном теле, ослабленном периодической системой круглых отверстий, при поперечном сдвиге. Полагается, что по мере повышения интенсивности внешнего нагружения в перфорированном теле происходит зарождение трещин. Решение задачи о равновесии перфорированного тела при поперечном сдвиге с зонами предразрушения сводится к решению двух бесконечных алгебраических систем и двух нелинейных сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Коши. Из решения этих уравнений находятся усилия в зонах зарождения трещин. Условие появления трещины формулируется с учетом критерия предельного сдвига связи материала.

Побудована математична модель зародження тріщин в ізотропному тілі, ослабленому періодичною системою круглих отворів, при поперечному зсуві. Вважається, що у міру підвищення інтенсивності зовнішнього навантаження у перфорованому тілі відбувається зародження тріщин. Розв'язок задачі про рівновагу перфорованого тіла при поперечному зсуві з зонами передруйнування зводиться до розв'язання двох нескінченних алгебраїчних систем і двох нелінійних сингулярних інтегральних рівнянь з ядром типу Коші. З розв'язку цих рівнянь знаходяться зусилля в зоні зародження тріщин. Умова появи тріщини формулюється з урахуванням критерію граничного зсуву зв'язків матеріалів.

Введение

В настоящее время во многих отраслях техники применяются технические средства в виде перфорированных элементов. В этой связи большое значение приобретает разработка методов расчета на прочность перфорированных элементов машин и конструкций. Исследование этих вопросов важно в связи с развитием энергетики, химической промышленности и других отраслей техники, а также широким использованием материалов, с периодической структурой.

Постановка задачи

Рассматривается изотропная упругая среда, ослабленная периодической системой круговых отверстий, имеющих радиусы λ ($\lambda < 1$) и центры в точках $P_m = t\omega$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $\omega = 2$. Принято, что контуры круговых отверстий свободны от внешних нагрузок. В плоскости имеет место поперечный сдвиг усилиями τ_{xy}^∞ .

По мере повышения интенсивности внешних нагрузок в перфорированном теле вокруг отверстий образуются зоны повышенных напряжений, расположение которых носит периодический характер. В зонах повышенных напряжений могут возникать поверхностные трещины. Задача о зарождении трещины является важной задачей механики разрушения. Постановка этой задачи существенно расширяет первоначальную концепцию Гриффитса, согласно которой в материале всегда имеется большое количество мельчайших трещин. Образование трещины под нагрузкой соответствует данным фрактографических наблюдений. При возрастании τ_{xy}^∞ на поверхности отверстий возникают зоны предразрушения, которые моделируются областями с ослабленными межчастичными связями в материале. Взаи-

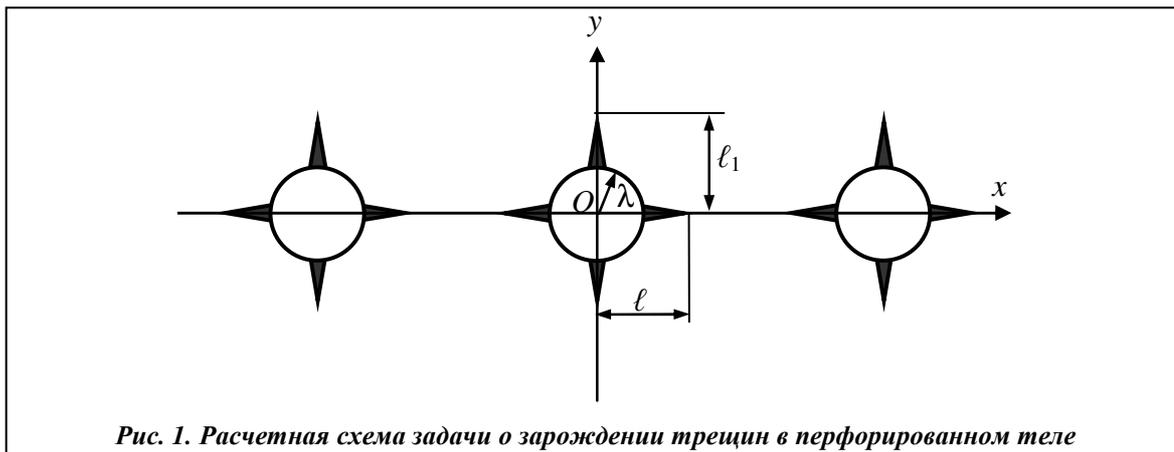


Рис. 1. Расчетная схема задачи о зарождении трещин в перфорированном теле

действие берегов этих областей моделируется путем введения между берегами связей с заданной диаграммой деформирования. Физическая природа таких связей и размеры зон предразрушения зависят от вида материала. Так как указанные зоны (прослойки материала) малы по сравнению с остальной частью тела, их можно мысленно удалить, заменив разрезами, поверхности которых взаимодействуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала.

Принято, что из контуров круговых отверстий исходят симметричные прямолинейные зоны предразрушения, направленные коллинеарно осям абсцисс и ординат неравной длины (рис. 1). В исследуемом случае возникновение зародышевых трещин в перфорированном теле представляет собой процесс перехода области предразрушения в область разорванных связей между поверхностями материала. При этом размер зоны предразрушения заранее неизвестен и должен быть определен в процессе решения задачи. При действии внешней нагрузки на перфорированное тело в связях, соединяющих берега зон предразрушения, возникают касательные усилия $q_x(x)$ и $q_y(x)$ соответственно. Эти напряжения заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения краевой задачи механики разрушения.

В силу симметрии граничных условий и геометрии области D , занятой материалом, напряжения являются периодическими функциями с основным периодом ω .

Граничные условия задачи имеют вид на контурах круговых отверстий

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = 0 \tag{1}$$

на берегах зон предразрушения

$$\text{коллинеарных оси абсцисс} \quad \sigma_y - i\tau_{xy} = -iq_x(x) \tag{2}$$

$$\text{коллинеарных оси ординат} \quad \sigma_x - i\tau_{xy} = -iq_y(y)$$

Основные соотношения поставленной задачи необходимо дополнить соотношениями, связывающими сдвиг берегов зон предразрушения и усилия в связях. Без потери общности эти уравнения представим в виде

$$u^+(x, 0) - u^-(x, 0) = C(x, q_x(x))q_x(x), \tag{3}$$

$$v^+(x, 0) - v^-(x, 0) = C(y, q_y(y))q_y(y),$$

где функции $C(x, q_x(x))$ и $C(y, q_y(y))$ представляют собой эффективные податливости связей; $(u^+ - u^-)$ – сдвиг берегов зон предразрушения коллинеарных оси абсцисс; $(v^+ - v^-)$ – сдвиг берегов зон предразрушения, коллинеарных оси ординат.

Для определения предельной величины внешней нагрузки, при которой происходит трещинообразование, постановку задачи необходимо дополнить условием (критерием) появления трещины (предельного сдвига межчастичных связей в материале). В качестве такого условия примем [1] критерий критического сдвига берегов зоны предразрушения

$$u^+(x, 0) - u^-(x, 0) = \delta_{cr}, \quad (4)$$

$$v^+(x, 0) - v^-(x, 0) = \delta_{cr},$$

где δ_{cr} – характеристика сопротивления материала трещинообразованию.

На основании формул Колосова–Мухелишвили [2] и граничных условий на контурах круговых отверстий (1) и берегах зон предразрушения (2) задача сводится к отысканию двух аналитических в области D функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ из краевых условий

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - e^{2i\theta} [\tau\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)] = 0, \quad (5)$$

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + t\overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)} = -iq_x(t), \quad (6)$$

$$\Phi(t_1) + \overline{\Phi(t_1)} + t_1\overline{\Phi'(t_1)} + \overline{\Psi(t_1)} = -iq_y(t_1),$$

где $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega$; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; t и t_1 – аффиксы точек берегов зон предразрушения, коллинеарных по осям абсцисс и ординат, соответственно.

Решение краевой задачи

Решение краевой задачи (5)–(6) будем искать в виде

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) + \Phi_3(z), \quad (7)$$

$$\Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z) + \Psi_3(z),$$

$$\Phi_1(z) = i\tau_{xy}^\infty + i \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}, \quad (8)$$

$$\Psi_1(z) = i\tau_{xy}^\infty + i \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - i \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} S^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!},$$

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t-z) dt,$$

$$\Psi_2(z) = -\frac{\pi z}{2\omega^2} \int_{L_1} g(t) \sin^{-2} \frac{\pi}{\omega} (t-z) dt, \quad (9)$$

$$\Phi_3(z) = \frac{i}{2\omega} \int_{L_2} g_1(t_1) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (it_1 - z) dt_1,$$

$$\Psi_3(z) = -\frac{i}{2\omega} \int_{L_2} \left\{ g_1(t_1) \left[2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (it_1 - z) + \frac{\pi}{\omega} (2t_1 + iz) \sin^2 \frac{\pi}{\omega} (it_1 - z) \right] \right\} dt_1,$$

где $\rho(z) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \sin^{-2}\left(\frac{\pi}{\omega} z\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2$, $S(z) = \sum_m' \left[\frac{P_m}{(z-P_m)^2} - \frac{2z}{P_m} - \frac{1}{P_m} \right]$. Штрих у суммы означает, что при суммировании исключается индекс $m = 0$, интегралы в (9) берутся по линии

$$L = \{[-\ell, -\lambda] + [\lambda, \ell]\} \quad \text{и} \quad L_2 = \{[-\ell_1, -\lambda] + [\lambda, \ell_1]\},$$

$g(x)$, $g_1(y)$ – искомые функции, характеризующие сдвиг берегов зон предразрушения.

$$g(x) = -\frac{2\mu i}{1+\kappa} \frac{d}{dx} [u^+(x, 0) - u^-(x, 0)] \quad \text{на } L,$$

$$g_1(y) = \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dy} [v^+(0, y) - v^-(0, y)] \quad \text{на } L_1.$$

Здесь $\kappa = 3 - 4\nu$ для плоской деформации, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ – для плоского напряженного состояния; ν – коэффициент Пуассона материала; μ – модуль сдвига материала.

Из условий антисимметричности относительно координатных осей находим, что

$$\operatorname{Im}\alpha_{2k} = 0; \quad \operatorname{Im}\beta_{2k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Из условия постоянства главного вектора всех сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в D , следует

$$\alpha_0 = \frac{\pi^2}{24} \beta_2 \lambda^2.$$

Неизвестные функции $g(x)$ и $g_1(y)$ и постоянные α_{2k} и β_{2k} необходимо определить из краевых условий (5)–(6).

Таким образом, комплексные представления (7)–(9) определяют класс задач с периодическим распределением напряжений. На основании выполнения условий периодичности система граничных условий (5) вырождается в одно функциональное уравнение, например, на контуре $L_{0,0}$ ($\tau = \lambda e^{i\theta}$), а система граничных условий (6) – краевыми условиями на контурах L_1 и L_2 .

Для составления уравнений относительно неизвестных коэффициентов α_{2k} и β_{2k} преобразуем краевое условие (5) следующим образом:

$$\Phi_1(\tau) + \overline{\Phi_1(\tau)} - e^{2i\theta} [\overline{\tau} \Phi_1'(\tau) + \Psi_1(\tau)] = f_1(\theta) + if_2(\theta) + \varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta), \quad (10)$$

$$f_1(\theta) + if_2(\theta) = -\Phi_2(\tau) - \overline{\Phi_2(\tau)} + e^{2i\theta} [\overline{\tau} \Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)], \quad (11)$$

$$\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta) = -\Phi_3(\tau) - \overline{\Phi_3(\tau)} + e^{2i\theta} [\overline{\tau} \Phi_3'(\tau) + \Psi_3(\tau)].$$

Относительно функций $f_1(\theta) + if_2(\theta)$ и $\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta)$ будем считать, что они разлагаются на контуре $|\tau| = \lambda$ в ряды Фурье. На основании антисимметрии эти ряды имеют вид

$$f_1(\theta) + if_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ik\theta}, \quad \operatorname{Re} A_{2k} = 0, \quad (12)$$

$$A_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f_1(\theta) + if_2(\theta)] e^{-2ik\theta} d\theta, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_{2k} e^{2ik\theta}, \quad \operatorname{Re} B_{2k} = 0,$$

$$B_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta)] e^{-2ik\theta} d\theta, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Подставив сюда соотношения (11) и поменяв порядок интегрирования, после вычисления интегралов с помощью теории вычетов, находим

$$A_{2k} = -\frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) f_{2k}(t) dt, \quad f_0(t) = \gamma(t), \quad f_2(t) = -\frac{\lambda^2}{2} \gamma^{(2)}(t),$$

$$f_{2k}(t) = -\frac{\lambda^{2k}(2k-1)}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t) + \frac{\lambda^{2k-2}}{(2k-3)!} \gamma^{(2k-2)}(t), \quad (k = 2, 3, \dots),$$

$$f_{-2k}(t) = \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t), \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \gamma(t) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} t,$$

$$B_{2k} = -\frac{i}{2\omega} \int_{L_2} g_1(t_1) \varphi_{2k}(it_1) dt_1, \quad \varphi_0(it_1) = \delta(it_1) - \overline{\delta(it_1)},$$

$$\varphi_2(it_1) = -\frac{\lambda^2}{2} \delta^{(2)}(it_1) + 2[\delta(it_1) - it_1 \delta'(it_1)],$$

$$\varphi_{2k}(it_1) = \frac{(1-2k)\lambda^{2k}}{(2k)!} \delta^{(2k)}(it_1) + \frac{2\lambda^{2k-2}}{(2k-2)!} \left[k\delta^{(2k-2)}(it_1) - it_1\delta^{(2k-1)}(it_1) \right], \quad (k = 2, 3, \dots),$$

$$\varphi_{-2k}(it_1) = -\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \overline{\delta^{(2k)}(it_1)}, \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \delta(it_1) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega}(it_1).$$

Теперь для решения краевой задачи (10) применим метод степенных рядов. Подставив в левую часть краевого условия (10) вместо $\Phi_1(\tau)$, $\overline{\Phi_1(\tau)}$, $\Phi_1'(\tau)$ и $\Psi_1(\tau)$ их разложения в ряды Лорана в окрестности нулевой точки, а в правую часть (10) – вместо $f_1(\theta) + if_2(\theta)$ и $\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta)$ ряды Фурье (12) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $\exp(i\theta)$ в обеих частях краевого условия (10), получим две бесконечные системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_{2k} , β_{2k} . После некоторых преобразований получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно α_{2k} .

$$i\alpha_{2j+2} = \sum_{k=0}^{\infty} iA_{j,k}\alpha_{2k+2} + b_j, \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \quad (13)$$

$$b_0 = M_2' - \frac{g_{k+2}\lambda^{2k+4}}{2^{2k+4}} A_{-2k+2}^*,$$

$$b_j = A_{2j+2}^* - \frac{(2j+1)A_0'g_{j+1}\lambda^{2k+2}}{K2^{2j+2}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)!g_{j+k+2}\lambda^{2j+2k+4}}{(2j)!(2k+3)!2^{2j+2k+4}} A_{-2k+2}^*,$$

$$M_2' = M_2 + i\tau_{xy}^{\infty}, \quad A_0' = M_0 - 2i\tau_{xy}^{\infty}, \quad M_{2k} = A_{2k} + B_{2k}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$K = 1 - \frac{\pi^2}{24}\lambda^2, \quad g_j = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2j}}, \quad A_{2k}^* = M_{2k}, \quad A_{-2k-2}^* = M_{-2k-2},$$

$$A_{j,k} = (2j+1)\gamma_{j,k}\lambda^{2j+2k+2},$$

$$\gamma_{0,0} = \frac{3}{8}g_2\lambda^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i+1)g_{i+1}\lambda^{4i+2}}{2^{4i+4}},$$

$$\gamma_{j,k} = -\frac{(2j+2k+2)!g_{j+k+1}}{(2j+1)!(2k+1)!2^{2j+2k+2}} + \frac{(2j+2k+4)!g_{j+k+2}\lambda^2}{(2j+2)!(2k+2)!2^{2j+2k+4}} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+1)!(2k+2i+1)!g_{j+k+1}g_{k+i+1}\lambda^{4i+2}}{(2j+1)!(2k+1)!(2i+1)!(2i)!2^{2j+2k+4i+4}} + b_{j,k},$$

$$b_{0,k} = 0, \quad b_{j,0} = 0, \quad b_{j,k} = \frac{g_{j+1}g_{k+1}\lambda^2}{2^{2j+2k+4}} \left(1 + \frac{K_1\lambda^2}{K} \right), \quad K_1 = \pi^2/12, \quad (j = 1, 2, \dots), \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Для определения коэффициентов β_{2k} получены уравнения

$$i\beta_2 = \frac{1}{K} \left[-A_0' + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}\lambda^{2k+2}}{2^{2k+2}} i\alpha_{2k+2} \right], \quad (14)$$

$$i\beta_{2j+4} = (2j+3)i\alpha_{2j+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)!\lambda^{2j+2k+4}g_{j+k+2}}{(2j+2)!(2k+1)!2^{2j+2k+4}} i\alpha_{2k+2} - A_{-2j-2}^*.$$

Для определения искомой функции $g(x)$ мы располагаем граничным условием на линии L_1 . Требуя, чтобы функции (7)–(9) удовлетворяли граничному условию на берегах зоны предразрушения L_1 , получим после некоторых преобразований сингулярное интегральное уравнение относительно $g(x)$

$$\frac{1}{\omega} \int_{L_1} g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t-x) dt + H(x) = -iq_x(x), \quad (15)$$

$$H(x) = \Phi_s(x) + \overline{\Phi_s(x)} + x \overline{\Phi_s'(x)} + \overline{\Psi_s(x)}, \quad \Phi_s(x) = \Phi_1(x) + \Phi_3(x), \quad \Psi_s(x) = \Psi_1(x) + \Psi_3(x).$$

Аналогично, удовлетворяя граничному условию на линии L_2 , после некоторых преобразований получаем еще одно сингулярное интегральное уравнение относительно искомой функции $g_1(y)$

$$-\frac{\pi}{\omega^2} \int_{L_2} g_1(t) \left[(t-y) \operatorname{sh}^{-2} \frac{\pi}{\omega} (t-y) dt \right] + N(y) = -iq_y(y), \quad (16)$$

где $N(y) = \Phi_0(iy) + \overline{\Phi_0(iy)} + iy \overline{\Phi_0'(iy)} + \overline{\Psi_0(iy)}$, $\Phi_0(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z)$, $\Psi_0(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z)$.

Сингулярные интегральные уравнения (15), (16) а также системы (13), (14) являются основными разрешающими уравнениями задачи, позволяющими определить функции $g(x)$, $g_1(y)$ и коэффициенты α_{2k} , β_{2k} .

Методика численного решения и анализ

Воспользовавшись разложением функций $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} z$, $\operatorname{sh}^{-2} \frac{\pi}{\omega} z$ в основной полосе периодов, а также замену переменных, сингулярные интегральные уравнения после некоторых преобразований приведем к стандартному виду. Используя квадратурные формулы [3, 4], сводим основные разрешающие уравнения (13), (14), (15), (16) к совокупности двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений и к двум конечным алгебраическим системам относительно приближенных значений $p_k^0 = g(\eta_k)$ ($k = 1, 2, \dots, M$), R_v^0 ($v = 1, 2, \dots, M$) искомых функций в узловых точках.

В правую часть полученных конечных систем входят неизвестные значения напряжений $q_x(\eta_m)$ и $q_y(\eta_m)$ в узловых точках, принадлежащих зонам предразрушения. Используя полученное решение, уравнения (3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} -\frac{2\mu i}{1+\kappa} \frac{d}{dx} [C(x, q_x(x)) q_x(x)] &= g(x), \\ \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dy} [C(y, q_y(y)) q_y(y)] &= g_1(y). \end{aligned} \quad (17)$$

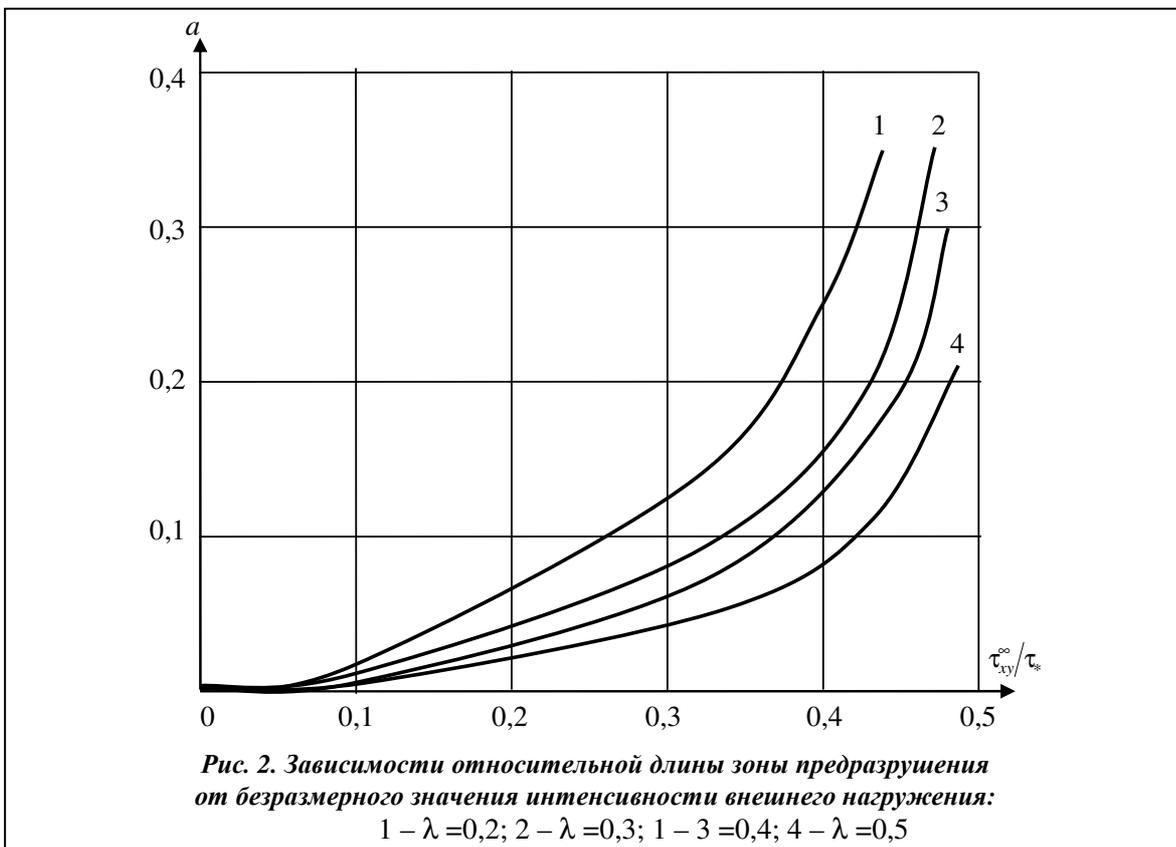
Эти уравнения служат для определения усилий в связях. Для построения недостающих уравнений потребуем выполнения условий (17) в узловых точках. При этом используем метод конечных разностей. В результате получим еще две системы из M уравнений каждая для определения приближенных значений $q_x(\eta_m)$ и $q_y(\eta_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$). Так как в перфорированном теле напряжения ограничены, то решение сингулярных интегральных уравнений следовало бы искать в классе всюду ограниченных функций. Таким образом, к системам (13)–(17) следует добавить условия ограниченности напряжений у вершин зон предразрушения.

Для численной реализации изложенного способа были выполнены расчеты. Каждая из бесконечных систем урезалась до пяти уравнений. В численных расчетах полагалось $M = 30$, что соответствует разбиению интервала интегрирования на 30 чебышевских узлов. Так как размеры зон предразрушения ℓ и ℓ_1 неизвестны, разрешающая алгебраическая система уравнений (13)–(17) задачи является нелинейной даже при линейных связях. Для ее решения используется метод последовательных приближений [4], суть которого состоит в следующем. Решаем объединенную алгебраическую систему при некоторых определенных значениях ℓ^* и ℓ_1^* относительно остальных неизвестных. Остальные неизвестные входят в разрешающую систему линейным образом. Значения ℓ^* , ℓ_1^* и соответствующие значения остальных неизвестных не будут, вообще говоря, удовлетворять условиям ограниченности на-

пряжений у вершин зон предразрушения (последним добавленным уравнениям к системе (14)–(18)). Поэтому подбирая значения параметров ℓ и ℓ_1 , будем многократно повторять вычисления до тех пор, пока условия ограниченности напряжений не будут удовлетворяться с заданной точностью.

В каждом приближении решалась объединенная алгебраическая система методом Гаусса. В случае нелинейного закона деформирования связей для определения усилий в зонах предразрушения использовался также итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений [5]. Считается, что закон деформирования межчастичных связей в зоне предразрушения линейный при $u^+ - u^- \leq u_*$. Первый шаг итерационного процесса счета состоит в решении системы уравнений для линейно-упругих связей. Следующие итерации выполняются только в случае, если на части зоны предразрушения имеет место неравенство $u^+ - u^- > u_*$. Для таких итераций решается система уравнений в каждом приближении для квазиупругих связей с изменяющейся вдоль берегов зоны предразрушения и зависящей от величины усилий в связях эффективной податливости, которая вычислена на предыдущем шаге расчета. Расчет эффективной податливости проводится подобно определению секущего модуля в методе переменных параметров упругости [6]. Процесс последовательных приближений заканчивается, когда усилия вдоль зоны предразрушения, полученные на двух последовательных итерациях, практически не различаются. Нелинейная часть кривой деформирования связей аппроксимировалась билинейной зависимостью, восходящий участок которой соответствовал деформированию связей ($0 < u^+ - u^- \leq u_*$) с их максимальным усилием связей. При $u^+ - u^- > u_*$ закон деформирования описывался нелинейной зависимостью, определяемой точками (u_*, τ_*) и (δ_c, τ_c) , причем при $\tau_c \geq \tau_*$ имело место возрастающая линейная зависимость (линейное упрочнение, соответствующее упругопластической деформации связей).

В результате численного расчета найдена зависимость длины зоны предразрушения, усилия в связях и сдвиг противоположных берегов зоны предразрушения от параметра нагружения τ_{xy}^∞ .



На рис. 2 представлены графики зависимости относительной длины зоны предразрушения $a = (\ell - \lambda)/\lambda$ от безразмерного значения интенсивности нагружения τ_{xy}^∞/τ_* для различных значений радиуса отверстий (кривые 1–4). На рис. 3 приведена зависимость усилий в связях q_x/τ_{xy}^∞ от относительного размера a для различных значений радиуса отверстий: $\lambda = 0,2 \div 0,5$ (кривые 1–4).

Для определения предельно равновесного состояния зоны предразрушения, при котором происходит трещинообразование, используем условие (4).

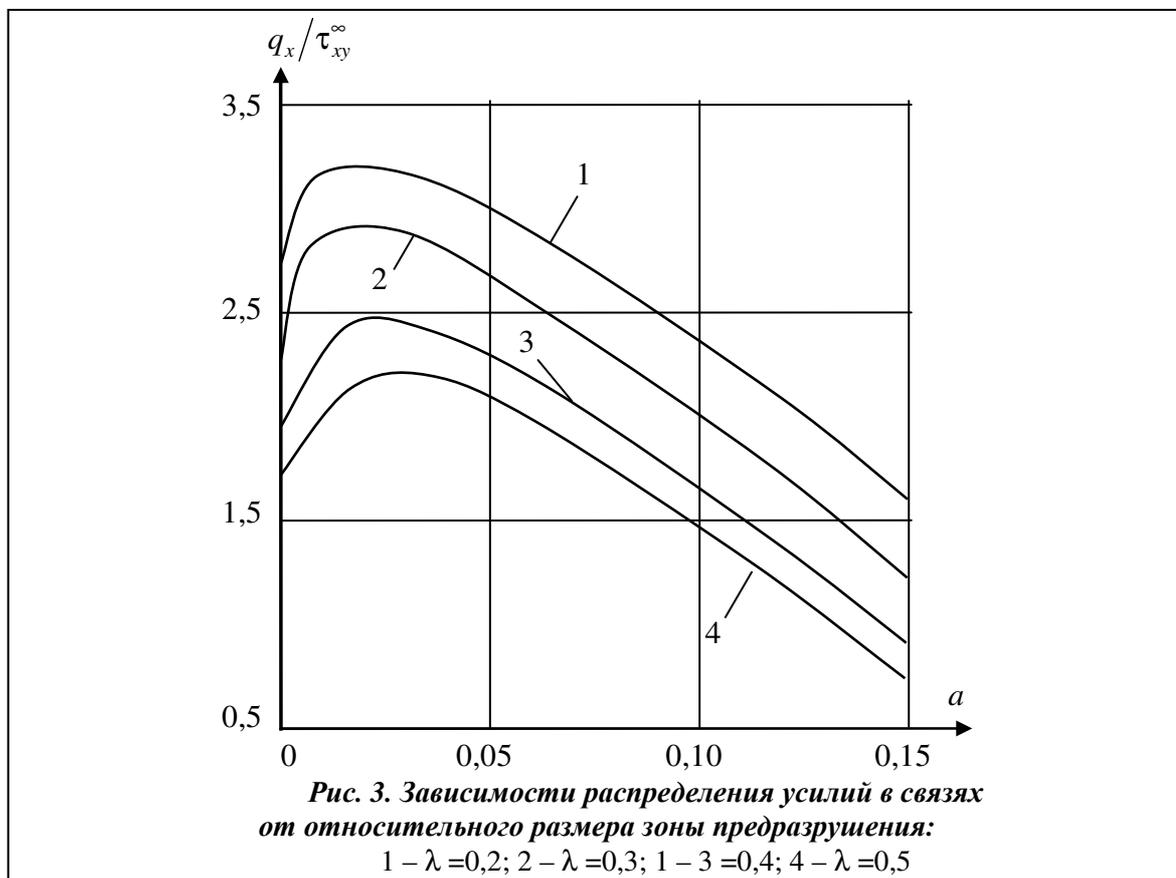
При этом условиями, определяющими предельную внешнюю нагрузку, при которой в точке $x = \pm\lambda$ или $y = \pm\lambda$ происходит предельный сдвиг межчастичных связей материала, являются следующие:

$$C(\lambda, q_x(\lambda))q_x(\lambda) = \delta_{cr}, \quad C(\lambda, q_y(\lambda))q_y(\lambda) = \delta_{cr}. \quad (18)$$

Решение объединенной алгебраической системы (13)–(18) позволяет определить критическое значение внешней нагрузки, размеры зон предразрушения и усилия в связях в состоянии предельного равновесия, при котором в теле, ослабленном периодической системой круглых отверстий, появляется трещина сдвига.

Выводы

Анализ предельно равновесного состояния перфорированного тела, при котором происходит трещинообразование, сводится к параметрическому исследованию разрешающей алгебраической системы (13)–(17) и критерия появления трещины (18) при различных законах деформирования межчастичных связей материала, упругих постоянных материалов и геометрических характеристиках перфорированного тела. Непосредственно из решения полученных алгебраических систем определяются усилия в связях и сдвиг берегов зон предразрушения. Полученные соотношения позволяют исследовать трещинообразование в изотропном теле, ослабленном периодической системой круглых отверстий, при поперечном сдвиге.



Литература

1. Мирсалимов В. М. К решению задач механики контактного разрушения о зарождении и развитии трещины со связями между берегами во втулке фрикционной пары / В. М. Мирсалимов // Прикл. математика и механика. – 2007. – Т. 71, вып. 1. – С. 132–151.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука. 1966. – 707 с.
3. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. – Киев: Наук. думка, 1976. – 444 с.
4. Мирсалимов В. М. Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
5. Ильюшин А. А. Пластичность / А. А. Ильюшин. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. – 376 с.
6. Биргер И. А. Общие алгоритмы решения задач теорий упругости, пластичности и ползучести / И. А. Биргер // Успехи механики деформируемых сред. – М.: Наука, 1975. – С. 51–73.

Поступила в редакцию
12.05.13

УДК 621.125

Н. Г. Шульженко^{*}, д-р техн. наук

Н. Н. Гришин^{**}, канд. техн. наук

И. А. Пальков^{**}

^{*} Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины,
(г. Харьков, e-mail: shulzh@ipmach.kharkov.ua)

^{**} ОАО «Турбоатом», (г. Харьков, e-mail: palkoff@inbox.ru)

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЗАМКОВОГО СОЕДИНЕНИЯ РАБОЧИХ ЛОПАТОК ТУРБИНЫ

Выполнен анализ напряженного состояния хвостового соединения замковой группы лопаток с диском 1-й ступени цилиндра среднего давления паровой турбины. Определены области возможного появления усталостных трещин в хвостовом соединении при эксплуатации турбины.

Виконано аналіз напруженого стану хвостового з'єднання замкової групи лопаток з диском 1-го ступеня циліндра середнього тиску парової турбіни. Визначені області можливої появи втомних тріщин в хвостовому з'єднанні при експлуатації турбіни.

Введение

При создании и эксплуатации турбоагрегатов большой мощности более 300 МВт важным является обеспечение их эксплуатационной надежности. Это связано, в первую очередь, с работоспособностью наиболее ответственных деталей и узлов паровых турбин. Наиболее напряженным элементом мощных турбин является ротор и, в частности, хвостовое соединение замковой группы рабочих лопаток с диском.

Ранее, при проектировании турбин меньшей мощности, приближенность результатов расчета замковых соединений и экспериментального анализа их напряженно-деформированного состояния учитывалась назначением завышенного запаса прочности. Значительное увеличение нагрузок, действующих на рассматриваемое соединение мощных турбин, и все усложняющиеся условия их работы привели к значительному повышению напряженности соединений. Поскольку требования по надежности энергетического оборудования возрастают, то важную роль играет уточненная оценка прочности элементов турбин по новым методикам.