

¹ **І. В. Сергієнко**, акад. НАН України
² **О. М. Литвин**, д-р. фіз.-мат. наук
² **О. О. Литвин**, канд. фіз.-мат. наук
³ **О. В. Ткаченко**, канд. фіз.-мат. наук
³ **О. Л. Грицай**

¹ Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова
 НАН України, м. Київ

² Українська інженерно-педагогічна
 академія, м. Харків,
 e-mail: academ_mail@ukr.net

³ ДП СКБ «Івченко-Прогрес»,
 м. Запоріжжя,
 e-mail: avt2007@outlook.com

Ключові слова: інтерлінація функцій, циліндрична система координат, збереження класу диференційовності, сліди функції, сліди похідних, оператор ермітової інтерлінації.

УДК 519.6

ПОБУДОВА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАТОРІВ ІНТЕРЛІНАЦІЇ ФУНКЦІЙ ТРЬОХ ЗМІННИХ НА СИСТЕМІ НЕПЕРЕТИННИХ КРИВИХ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ ІЗ ЗБЕРЕЖЕННЯМ КЛАСУ ДИФЕРЕНЦІЙОВНОСТІ

Пропонується метод побудови операторів інтерлінації ермітового типу функцій трьох змінних за допомогою їх слідів та слідів їх похідних на вказаних лініях в циліндричній системі координат. Метод дозволяє відновлювати ці функції у точках між заданою системою замкнутих неперетинних кривих в циліндричній системі координат, зберігаючи автоматично клас диференційовності, якому належить наближувана функція.

Вступ

Задача побудови функцій із заданими слідами на системі відомих кривих широко використовується при розв'язанні крайових задач в областях, границя яких обмежена заданими кривими в циліндричній системі координат. Найбільш відомими прикладами такої задачі є задача Діріхле для рівняння Лапласа в крузі і перша крайова задача для бігармонійного рівняння в крузі. Відомі розв'язки таких задач є функціями, які у внутрішніх точках області є неперервними із своїми частинними похідними довільного порядку. На практиці праві частини диференціальних рівнянь мають конкретний механічний зміст. Наприклад, для першої бігармонійної задачі права частина може бути недиференційовною і навіть розривною, оскільки вона означає навантаження на пластинку. Аналогічне твердження вірно також для розрахунку термopружного стану тривимірних тіл, наприклад оболонки, поверхня яких однозначно визначається в циліндричній системі координат. Крім того, граничні умови можуть використовувати оператори, нормальні похідні в яких не належать до класу $C^\infty(\partial G)$. Тому актуальною є задача побудови та дослідження операторів інтерлінації функцій трьох змінних на системі неперетинних кривих в циліндричній системі координат із збереженням класу диференційовності для випадку, коли функції, що входять в граничні умови, належать класу $C^r(\partial G)$, $r < \infty$.

Постановка задачі

Вважаємо відомими систему кривих, заданих параметрично

$$\Gamma_k : \{(x, y, z) : x = r_k(\phi)\cos\phi, y = r_k(\phi)\sin\phi, z = r_k(\phi), 0 \leq \phi \leq 2\pi\}, k = 1, 2, \dots, M,$$

$$z_1(\phi) < z_2(\phi) < \dots < z_M(\phi), 0 \leq \phi \leq 2\pi,$$

та систему слідів функції $f(r, \phi, z) = u(r(\phi)\cos\phi, r(\phi)\sin\phi, z)$ і її частинних похідних

$$D^s f|_{\Gamma_k} = \frac{\partial^{|s|} f(r, \phi, z)}{\partial r^{s_1} \partial z^{s_2}} \Big|_{r=r_k(\phi), z=z_k(\phi)} = f_{k,s}(\phi), \quad s = (s_1, s_2), \quad |s| = s_1 + s_2; \quad |s| = 0, 1, \dots, N,$$

де $u(x, y, z) \in C^N(R^3)$, $v \geq N$ – деяка v разів неперервно диференційовна функція, взагалі кажучи, невідома. Треба побудувати за допомогою цієї інформації оператор інтерлінації $E_{MN}f(r, \phi, z)$, що зберігає клас диференційовності, якому належить наближувана функція, $f(r, \phi, z) \in C^v(R^3)$ і дозволить обчислювати наближено $f(r, \phi, z)$ у довільній точці (r, ϕ, z) між вказаними лініями.

Таким чином, вважаємо, що функція (взагалі кажучи, невідома) $f(r, \phi, z) \in C^v(D)$, $D \subset R^3$ задається на системі неперетинних замкнутих кривих $\Gamma_k : \{(r, \phi, z) : r = r_k(\phi) \in C^v[0, 2\pi]\}$,

© І. В. Сергієнко, О. М. Литвин, О. О. Литвин, О. В. Ткаченко, О. Л. Грицай, 2016

$z = z_k(\phi) \in C^v[0, 2\pi]$, $k = 1, 2, \dots, M$ своїми слідами та слідами своїх похідних $f_{k,s}(\phi)$, $k = 1, 2, \dots, M$; $s = (s_1, s_2)$, $|s| = s_1 + s_2$; $s = 0, 1, \dots, N$.

Основні твердження статті

Введемо позначення $g_k(r, \phi, z, \beta_1, \beta_2) = \phi + \beta_1(r - r_k(\phi)) + \beta_2(z - z_k(\phi))$. Врахуємо, що $g_k(r_k(\phi), \phi, z_k(\phi), \beta_1, \beta_2) = \phi$, $g_k(r_l(\phi), \phi, z_l(\phi), \beta_1, \beta_2) = \phi + \beta_1(r_l(\phi) - r_k(\phi)) + \beta_2(z_l(\phi) - z_k(\phi))$, $l \neq k$.

Введемо до розгляду систему функцій $h_{k,s}(r, \phi, z)$, $G_{s_1}(\beta_1)$, $K_{s_2}(\beta_2)$, $k = 1, 2, \dots, M$; $s_1, s_2 = 0, 1, \dots, N$ з властивостями

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial r^p \partial z^q} h_{k,s}(r, \phi, z) \Big|_{\Gamma_l} = \delta_{k,l} \delta_{p, N-s_1} \delta_{q, N-s_2}; \quad k, l = 1, 2, \dots, M; \quad p+q, \quad s_1 + s_2 = 0, 1, \dots, N; \quad (1)$$

$$\int_0^{2\pi} G_{s_1}(\beta_1) \beta_1^{m_1} d\beta_1 = \delta_{0, m_1}; \quad s_1, m_1 = 0, 1, \dots, N; \quad (2)$$

$$\int_0^1 K_{s_2}(\beta_2) \beta_2^{m_2} d\beta_2 = \delta_{0, m_2}; \quad s_2, m_2 = 0, 1, \dots, N.$$

Пропонується такий вигляд шуканого оператора інтерлінації:

$$E_{M,N} f(r, \phi, z) = \sum_{k=1}^M h_{k,0,0}(r, \phi, z) \int_0^{2\pi} G_0(\beta_1) \int_0^1 K_0(\beta_2) f_{k,0,0}(g_k(\phi, r, z, \beta_1, \beta_2)) d\beta_2 d\beta_1 +$$

$$+ \sum_{k=1}^M \sum_{|s|=1}^N h_{k,s}(r, \phi, z) \int_0^{2\pi} G_{s_1}(\beta_1) \int_0^1 K_{s_2}(\beta_2) \int_0^{g_k(r, \phi, z, \beta_1, \beta_2)} f_{k,s}(u) \frac{(g_k(r, \phi, z, \beta_1, \beta_2) - u)^{|s|-1}}{(|s|-1)!} d\beta_2 d\beta_1 du.$$

Теорема 1. Якщо $f_{k,s}(\phi) \in C^{v-|s|}[0, 2\pi]$, $|s| = 0, 1, \dots, N$, $N \leq v$, то $\forall \beta_1 \in [0, 2\pi]$, $\beta_2 \in [0, 1]$ функції $U_{k,0,0}(r, \phi, z, \beta_1, \beta_2) = f_{k,0,0}(g_k(r, \phi, z, \beta_1, \beta_2)) \in C^v(D)$, $U_{k,s}(r, \phi, z) = \int_0^{g_k(r, \phi, z, \beta_1, \beta_2)} f_{k,s}(u) \frac{(g_k(r, \phi, z, \beta_1, \beta_2) - u)^{|s|-1}}{(|s|-1)!} du \in C^v(D)$, $D = R_+ \times [0, 2\pi] \times R$, $R_+ = [0, \infty)$, мають властивості

$U_{k,0,0}(r, \phi, z, \beta_1, \beta_2) \in C^v(D)$, $U_{k,s_1,s_2}(r, \phi, z, \beta_1, \beta_2) \in C^v(D)$.

Доведення. Враховуючи, що $r_k(\phi), z_k(\phi) \in C^v[0, 2\pi]$ маємо $g_k(r, \phi, z, \beta_1, \beta_2) \in C^v(D)$. Тому $U_{k,0,0}(r, \phi, z, \beta_1, \beta_2) \in C^v(D)$, бо суперпозиція функцій класу $C^v(D)$ належить цьому ж класу диференційовності. Далі, функція $U_{k,s_1,s_2}(r, \phi, z)$ є визначеним інтегралом, верхня межа і підінтегральна функція в якому належать до $C^v(D)$.

Якщо врахувати, що

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\partial z^{\alpha_1} \partial z^{\alpha_2}} U_{k,s_1,s_2}(r, \phi, z) = \begin{cases} \beta_1^{\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2} \int_0^{g_k(r, \phi, z, \beta_1, \beta_2)} f_{k,s}(u) \frac{(g_k(r, \phi, z, \beta_1, \beta_2) - u)^{|s| - |\alpha| - 1}}{(|s| - |\alpha| - 1)!} du, & |\alpha| < |s|, \\ \beta_1^{\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2} f_{k,s}(g_k(r, \phi, z, \beta_1, \beta_2)) \in C^{r-|s|}(D), & |\alpha| = |s|, \\ \beta_1^{\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2} \frac{\partial^{\alpha_1 - s_1, \alpha_2 - s_2}}{\partial z^{\alpha_1 - s_1} \partial z^{\alpha_2 - s_2}} f_{k,s}(g_k(r, \phi, z, \beta_1, \beta_2)), & |s| - |\alpha| \geq 1, \quad \alpha_1 - s_1 \vee \alpha_2 - s_2 \geq 0. \end{cases}$$

то можна зробити висновок, що $U_{k,s}$ має неперервні похідні $\frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\partial z^{\alpha_1} \partial z^{\alpha_2}} U_{k,s}$ до порядку $|\alpha| \leq r$.

Теорема 1 доведена.

Теорема 2. Якщо виконуються співвідношення (1), (2), то

$$V_{k,0,0}(r, \varphi, z) = \int_0^{2\pi} G_0(\beta_1) \int_0^1 K_0(\beta_2) f_{k,0,0}(g_k(r, \varphi, z, \beta_1, \beta_2)) d\beta_2 d\beta_1 \in C^v(D^*)$$

$$V_{k,s}(r, \varphi, z) = \int_0^{2\pi} G_{s_1}(\beta_1) \int_0^1 K_{s_2}(\beta_2) \int_0^{g_k(r, \varphi, z, \beta_1, \beta_2)} f_{k,s}(u) \frac{(g_k(r, \varphi, z, \beta_1, \beta_2) - u)^{s_1 - 1}}{(s_1 - 1)!} d\beta_2 d\beta_1 du \in C^v(D^*)$$

на $\Gamma_k : \{(r, \phi, z) : r = r_k(\phi), z = z_k(\phi)\}$ мають властивості

$$\left. \frac{\partial^{p+q}}{\partial r^p \partial z^q} V_{k,0,0}(r, \varphi, z) \right|_{\Gamma_k} = \begin{cases} f_{k,0,0}(\varphi), & p=0, q=0 \\ 0, & 1 \leq p+q \leq N \end{cases}; \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial^{p+q}}{\partial r^p \partial z^q} V_{k,s}(r, \varphi, z) \right|_{\Gamma_k} = \begin{cases} 0, & 0 \leq p \leq s_1 - 1; \quad 0 \leq q \leq s_2 - 1, \\ f_{k,s}(\varphi), & p = s_1, \quad q = s_2, \\ \int_0^{2\pi} G_{s_1}(\beta_1) \int_0^1 K_{s_2}(\beta_2) \frac{\partial^{p-s_1+q-s_2}}{\partial r^{p-s_1} \partial z^{q-s_2}} f_{k,s}(g_k(r, \varphi, z, \beta_1, \beta_2)) d\beta_2 d\beta_1, & \\ 0, & s_1 < p \leq N, \quad s_2 < q \leq N; \quad p+q, \quad s_1+s_2 \leq N. \end{cases} \quad (4)$$

Доведення. Якщо $p+q=0$, то

$$V_{k,0,0}(r, \varphi, z) \Big|_{\Gamma_k} = \int_0^{2\pi} G_0(\beta_1) \int_0^1 K_0(\beta_2) f_{k,0,0}(g_k(r_k(\varphi), \varphi, z_k(\varphi), \beta_1, \beta_2)) d\beta_2 d\beta_1 =$$

$$= \int_0^{2\pi} G_0(\beta_1) d\beta_1 \int_0^1 K_0(\beta_2) f_{k,0,0}(\varphi) d\beta_2 = \int_0^{2\pi} G_0(\beta_1) d\beta_1 \int_0^1 K_0(\beta_2) d\beta_2 f_{k,0,0}(\varphi) =$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} G_0(\beta_1) d\beta_1 = 1, \int_0^1 K_0(\beta_2) d\beta_2 = 1 \right) = f_{k,0,0}(\varphi).$$

Далі отримуємо

$$\left. \frac{\partial^{p+q} V_{k,0,0}(r, \varphi, z)}{\partial r^p \partial z^q} \right|_{\Gamma_k} = \int_0^{2\pi} G_0(\beta_1) \int_0^1 K_0(\beta_2) \frac{\partial^{p+q}}{\partial r^p \partial z^q} f_{k,0,0}(g_k(r_k(\varphi), \varphi, z_k(\varphi), \beta_1, \beta_2)) \beta_2 d\beta_1 \Big|_{\Gamma_k} =$$

$$= \int_0^{2\pi} G_0(\beta_1) \beta_1^p \int_0^1 K_0(\beta_2) \beta_2^q f_{k,0,0}^{(p+q)}(\varphi) d\beta_2 d\beta_1 = \int_0^{2\pi} G_0(\beta_1) \beta_1^p d\beta_1 \int_0^1 K_0(\beta_2) \beta_2^q d\beta_2 f_{k,0,0}^{(p+q)}(\varphi) = 0.$$

Таким чином, рівності (3) теореми 2 доведені. Аналогічно доводяться рівності (4) теореми 2. Теорема 2 доведена.

Теорема 3. Якщо виконуються припущення (1), (2), то оператор $E_{M,N}f(r, \phi, z)$, визначений вище, задовольняє умови

$$f(r, \varphi, z) \in C^v(D) \Rightarrow E_{M,N}f(r, \varphi, z) \in C^v(D),$$

$$\left. \frac{\partial^{p+q}}{\partial r^p \partial z^q} E_{M,N}f(r, \varphi, z) \right|_{\Gamma_l} = f_{l,p,q}(\varphi), \quad l=1,2,\dots,M, \quad p+q=0,1,\dots,N; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (5)$$

Доведення. Оскільки $E_{M,N}f(r, \varphi, z) = \sum_{k=1}^M \sum_{|s|=0}^N V_{k,s}(x, y, z)$ є сумою добутків функцій, кожна з

яких належить класу $C^v(D)$, то і $E_{M,N}f(r, \phi, z) \in C^v(D)$. Для доведення рівностей (5) напишемо такий ланцюжок рівностей:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial z^q} E_{M,N} f(r, \varphi, z) \right|_{\Gamma_\ell} &= \sum_{k=1}^M \frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial z^q} \left[h_{k,0,0}(r, \varphi, z) V_{k,0,0}(r, \varphi, z) \right] \Big|_{\Gamma_\ell} + \sum_{k=1}^M \sum_{|s|=1}^N \frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial z^q} \left[h_{k,s}(r, \varphi, z) V_{k,s}(r, \varphi, z) \right] \Big|_{\Gamma_\ell} = \\ &= \sum_{k=1}^M f_{k,0,0}(\varphi) \delta_{k,\ell} \delta_{0,p} \delta_{0,q} + \sum_{k=1}^M \sum_{|s|=1}^N f_{k,s}(\varphi) \delta_{k,\ell} \delta_{p,s_1} \delta_{q,s_2} = f_{\ell,s_1,s_2}(\varphi), \quad 0 \leq p+q \leq N. \end{aligned}$$

Теорема 3 доведена.

Теорема 4. Функції $h_{k,s}(r, \varphi, z)$ можна подати у вигляді

$$h_{k,s}(r, \varphi, z) = s_{N,k,s_1}(r, \varphi) s_{N,k,s_2}(z, \varphi),$$

де $s_{N,k,s_1}(r, \varphi) \in C^v[R_+ \times [0, 2\pi]]$, $s_{N,k,s_2}(z, \varphi) \in C^v[R \times [0, 2\pi]]$ – базисні сплайни степеня $N + 1$ з властивостями

$$\begin{aligned} \frac{\partial^p s_{N,k,s_1}(r_l, \varphi)}{\partial r^p} &= \delta_{k,l} \delta_{p,N-s_1}; & k, l = 0, 1, \dots, M; \quad p, s_1 = 0, 1, \dots, N; \\ \frac{\partial^q s_{N,k,s_2}(z_l, \varphi)}{\partial z^q} &= \delta_{k,l} \delta_{q,N-s_2}; & k, l = 0, 1, \dots, M; \quad q, s_2 = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Доведення. Знайдемо похідні

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial z^q} h_{k,s}(r, \varphi, z) \right|_{\Gamma_\ell} &= \left. \frac{\partial^p}{\partial z^p} s_{N,k,s_1}(r, \varphi) \right|_{r=r_k(\varphi)} \left. \frac{\partial^q}{\partial z^q} s_{N,k,s_2}(z, \varphi) \right|_{z=z_k(\varphi)} = \\ &= \delta_{k,\ell} \delta_{p,N-s_1} \delta_{k,\ell} \delta_{q,N-s_2} = \delta_{k,\ell} \delta_{0,N-s_1} \delta_{0,N-s_2}. \end{aligned}$$

Тобто запропонована в теоремі 4 формула дозволяє отримувати функції $h_{k,s_1,s_2}(r, \varphi, z)$ з потрібними властивостями.

Теорема 4 доведена.

Загальна теорія їх побудови наведена в роботах [1–7].

Таким чином, в даній роботі запропоновані формули для операторів інтерлінації функцій трьох змінних в циліндричній системі координат $Or\varphi z$, заданих своїми слідами і слідами своїх похідних за змінними r і z на системі неперетинних ліній в параметричній формі.

Висновки

Таким чином відмітимо основні властивості запропонованого в даній роботі методу.

По-перше, оператор $E_{M,N} f(r, \varphi, z)$ має властивості $E_{M,N} f(r, \varphi, z) \in C^v(D)$ та (5), навіть якщо $f_{k,s}(\varphi) \in C^{v-|s|}[0, 2\pi]$, $|s| = 0, 1, \dots, N$, $N \leq v$ і $f_{k,s}(\varphi)$ не належать класу $C^v[0, 2\pi]$.

По-друге, метод дозволяє використовувати замість слідів $f_{k,s}(\varphi) \in C^{v-|s|}[0, 2\pi]$, $|s| = 0, 1, \dots, N$, $N \leq v$ їх наближення сплайнами (інтерполяційними або апроксимаційними), побудованими на основі використання дискретних наборів значень $f_{k,s}(\varphi_j)$, $k = 1, 2, \dots, M$, $|s| = 0, 1, \dots, N$, $N \leq v$, $j = 1, 2, \dots, N$.

В подальшому планується розробка та дослідження методу побудови операторів інтерполяції функцій трьох змінних, коли лінії інтерлінації задаються дискретними наборами точок, а не формулами. Така постановка задачі виникає, зокрема, в машинобудуванні при конструюванні поверхонь пера лопаток авіадвигунів.

Література

1. Литвин, О. Н. Общий метод построения уравнений кривых и поверхностей в неявной форме с помощью интерликации и интерфлетации функций / О. Н. Литвин, А. В. Ткаченко, О.О. Литвин // Кибернетика и систем. анализ. – 2011. – № 1. – С. 62–67.
2. Відновлення функцій двох змінних із збереженням класу $C^v(R^2)$ за допомогою їх слідів та слідів їх похідних до фіксованого порядку на заданій лінії / І. В. Сергієнко, О. М. Литвин, О. О. Литвин та ін. // Доп. НАН України. – 2014. – № 2. – С. 50–55.

3. Ермітова інтерлінація функцій двох змінних на заданій системі неперетинних ліній із збереженням класу $C^r(R^2)$ / О. М. Литвин, О. О. Литвин, О. В. Ткаченко, О. Л. Грицай // Доп. НАН України. – 2014. – № 7. – С. 53–59.
4. Інтерлінація функцій трьох змінних на системі неперетинних кривих із збереженням класу диференційовності / І. В. Сергієнко, О. М. Литвин, О. О. Литвин та ін. // Доп. НАН України. – 2015. – № 1. – С. 44–50.
5. Побудова операторів інтерполяції ермітового типу на нерегулярній сітці вузлів, розміщених на довільній системі замкнутих неперетинних ліній в циліндричній системі координат, що належать конструйованій поверхні / І. В. Сергієнко, О. М. Литвин, О. О. Литвин та ін. // Доп. НАН України. – 2015. – № 2. – С. 43–49.
6. Інтерлінація ермітового типу на системі непересекаючихся ліній. Обзор / И. В. Сергиенко, О. Н. Литвин, О. О. Литвин и др. // Кибернетика и систем. анализ. – 2015. – Т. 51, № 2. – С. 1–12.
7. Литвин, О. М. Одна теорема про ізогеометричні властивості операторів інтерлінації функцій 2-х змінних / О. М. Литвин, О. В. Ткаченко, О. О. Литвин // Вісн. Нац. техн. ун-ту «Харківський політехнічний інститут». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2011. – № 42. – С. 107–109.

Поступила в редакцію 05.10.16