17. *Wheeler L. T.* Stress minimum forms for elastic solids / L. T. Wheeler // ASME. Appl. Mech. Rev. – 1992. – Vol. 45, Issue 1. – P. 1–12.
18. *Cherepanov G. P.* Optimum shapes of elastic solids with infinite branches / G. P. Cherepanov // J. Appl. Mech. ASME. – 1995. – Vol. 62, Issue 2. – P. 419–422.
19. *Savruk M. P.* Application of the method of singular integral equations to the determination of the contours of equistrong holes in plates / M. P. Savruk, V. S. Kravets // Materials Sci. – 2002. – Vol. 38, Issue 1. – P. 34–46.
20. *Мир-Салим-заде М. В.* Определение формы равнопрочного отверстия в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров / М. В. Мир-Салим-заде // Материалы, технологии, инструменты. – 2007. – Т. 12, № 4. – С. 10–14.
21. *Cherepanov G. P.* Optimum shapes of elastic bodies: equistrong wings of aircrafts and equistrong underground tunnels // Физ. мезомеханика. – 2015. – Т. 18, № 5. – С. 114–123.
22. *Мирсалимов В. М.* Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами / В. М. Мирсалимов. – Баку: Элм, 1984. – 124 с.
23. *Баренблатт Г. И.* О хрупких трещинах продольного сдвига / Г. И. Баренблатт, Г. П. Черепанов // Прикл. математика и механика – 1961. – Т. 25, вып. 6. – С. 1110–1119.

Поступила в редакцию 19.10.17

[1] **Ю. Д. Ковалев**, канд. физ.-мат. наук
[2] **Е. А. Стрельникова**, д-р техн. наук
[1] **Д. В. Кушнир**, канд. физ.-мат. наук
[1] **Ю. В. Шрамко**, канд. физ.-мат. наук

[1] Сумский государственный университет, г. Сумы,
e-mail: dmytro.kushnir@gmail.com
[2] Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, г. Харьков

Ключові слова: *гармонічні коливання, шар з двома отворами, інтегральні рівняння.*

УДК 539.3

УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ СЛОЯ, ОСЛАБЛЕННОГО ДВУМЯ ОТВЕРСТИЯМИ, С ТОРЦАМИ, ПОКРЫТЫМИ ДИАФРАГМОЙ (СИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ)

Розв'язано задачу щодо гармонічних пружних коливань шару з двома наскрізними отворами, на поверхнях яких діє нормальний пульсуючий тиск. Граничну задачу зведено до системи інтегральних рівнянь, що розв'язана чисельно. Наведено приклади, в яких досліджено особливості розподілу окружного напруження за частотою залежно від відстані між отворами та коефіцієнта Пуассона.

Введение

В трехмерных элементах конструкций дефекты и разрушения часто возникают и распространяются в местах наибольшей концентрации напряжений (отверстия, трещины, углы, включения). Наличие отверстий в структурах может быть обусловлено конструкционными требованиями либо технологическими особенностями (даже при тщательном проектировании). Частный случай граничных условий типа «плоской диафрагмы» на основаниях плиты может приобрести значительный интерес в условиях современных технологий напыления пленок, различных покрытий с помощью углеродных нанотрубок [1]. Это связано с тем, что модуль Юнга подобных покрытий достигает значений нескольких ГПа. Расчет пространственных полей перемещений и напряжений вблизи криволинейной границы отверстия является сложной задачей, особенно в условиях динамических нагрузок, и в литературе имеется немного аналитических решений задач теории упругости для многосвязных цилиндрических тел с нетривиальной геометрией и частными случаями граничных условий.

В настоящее время метод однородных решений представляет собой один из основных подходов к решению граничных задач для тел конечных размеров. Он нашел применение в теории тонких и толстых плит, при исследовании деформации конечных, толстостенных, многосвязных цилиндров и в ряде других случаев. Решение задачи находится с помощью однородных решений, которые являются интегралами основных уравнений теории упругости и удовлетворяют нулевым граничным условиям на части поверхности тела, совпадающей с одной из координатных поверхностей. Этот метод применительно к статическим задачам для слоя был развит А. И. Лурье в работе [2].

На основе данного метода было решено множество статических задач для тел с отверстиями разных конфигураций, а также для многосвязных цилиндров [3, 4]. Осесимметричная задача о равновесии упругого слоя с цилиндрической полостью решена в работе [5]. Многосвязные области также исследовались на основе метода однородных решений в [6, 7, 8]. В статьях [9, 10] решены задачи о колебаниях изотропных и ортотропных пластин с граничными условиями типа плоского торца или диафрагмы.

Постановка задачи и метод решения

Рассмотрим упругий слой $-h \le x_3 \le h$, $-\infty < x_1, x_2 < \infty$ (рис. 1), ослабленный сквозными вдоль оси Ox_3 полостями-отверстиями, поперечные сечения которых представляют собой непересекающиеся достаточно гладкие контуры $L_n \left(n=1,2\right)$ $\left(L_1 \cap L_2 = \varnothing\right)$.

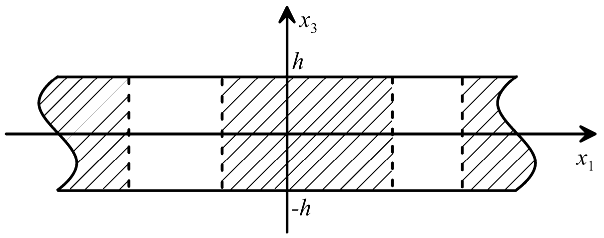

Рис. 1. Схема упругого слоя с двумя отверстиями

Для определенности под контуром L_1 будем понимать направляющий контур правого отверстия, а под контуром L_2 – левого отверстия.

На цилиндрических поверхностях отверстий действует пульсирующее давление $N = \mathrm{Re}\left(N_0\, e^{-i\omega t}\right)$, $N_0 = C(h^2 - x_3^2)$, $C = \mathrm{const}$.

Пусть механические величины имеют вид

$$u_i = \mathrm{Re}\left(U_i e^{-i\omega t}\right),\ \sigma_{ij} = \mathrm{Re}\left(\sigma_{ij}^0\, e^{-i\omega t}\right) \quad \left(i, j = \overline{1,3}\right), \tag{1}$$

амплитуды компонентов заданной нагрузки раскладываются в ряды Фурье по координате x_3 на $\left[-h, h\right]$, а на торце слоя выполняется условие

$$u_1\left(x_1, x_2, \pm h, t\right) = u_2\left(x_1, x_2, \pm h, t\right) = 0, \quad \sigma_{33}\left(x_1, x_2, \pm h, t\right) = 0. \tag{2}$$

Запишем амплитудные компоненты вектора перемещения в виде

$$\begin{aligned} U_i &= \sum_{k=0}^{\infty} u_{ik}\left(x_1, x_2\right) \cos \gamma_k x_3 \qquad \left(i = 1, 2\right) \\ U_3 &= \sum_{k=0}^{\infty} u_{3k}\left(x_1, x_2\right) \sin \gamma_k x_3 \end{aligned} \tag{3}$$

где $\gamma_k = \left(2k+1\right)\pi / 2h$.

Представления амплитудных компонентов вектора перемещения (3) автоматически удовлетворяют условиям (2) на торцах слоя. Для описания стационарного волнового процесса в изотропном слое будем исходить из уравнений движения

$$\sigma\, \mathrm{grad}\theta + \Delta \vec{u} = \frac{\rho}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \tag{4}$$

$$\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad \sigma = \frac{\lambda + \mu}{\mu} = \frac{1}{1 - 2\nu},$$

где λ, μ – коэффициенты Ламе.

Подставляя (1) и выражения (3), (4) для амплитуд перемещений в уравнения движения, приходим к системе

$$æ_k^{(2)} U_{ik} + \sigma \partial_i \theta_k = 0 \quad (i = 1,2) \tag{5}$$

$$æ_k^{(2)} U_{3k} + \sigma \gamma_k \theta_k = 0,$$

где

$$æ_k^{(2)} = \nabla^2 - \beta_k^2, \quad \left(\beta_k^2 = \gamma_k^2 - \alpha_2^2, \ \alpha_2 = \omega / C_2\right), \quad \nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2,$$

$$\theta_k = \partial_1 u_{1k} + \partial_2 u_{2k} + \gamma_k u_{3k}, \quad \partial_i = \partial / \partial x_i .$$

Непосредственно из системы (5) находим

$$æ_k^{(1)} \theta_k = 0,$$

$$æ_k^{(1)} = \nabla^2 - \left(\gamma_k^2 - \alpha_1^2\right) \quad \left(\alpha_1 = \omega / C_1\right). \tag{6}$$

Введём функцию ψ_k соотношением $\theta_k = æ_k^{(2)} \psi_k$. Из (6) вытекает, что $æ_k^{(2)} æ_k^{(1)} \psi_k = 0$. С учётом связи между θ_k и ψ_k интегрирование системы (5) даёт

$$u_{ik} = -\sigma \partial_1 \psi_k + \omega_{ik}, \quad u_{3k} = -\sigma \partial_k \psi_k + \omega_{3k}$$

$$æ_k^{(2)} \omega_{ik} = 0 \quad (i = 1,2). \tag{7}$$

Потребовав, чтобы соотношения $\theta_k = æ_k^{(2)} \psi_k$ выполнялись фактически, приходим к равенствам

$$\omega_{ik} = \sigma \partial_2 \Omega_k, \quad \omega_{2k} = -\sigma \partial_1 \Omega_k, \quad \omega_{ik} = -\frac{1}{\gamma_k} (1 + \sigma) æ_k^{(1)} \psi_k, \tag{8}$$

где Ω_k – произвольное решение уравнения $æ_k^{(2)} \Omega_k = 0$.

Учитывая (7), (8), окончательно получаем

$$U_{1k} - i U_{2k} = 2\sigma \frac{\partial}{\partial z} \left(i \Omega_k - \Omega_k^{(1)} - \Omega_k^{(2)} \right),$$

$$U_{3k} = -\sigma \gamma_k \Omega_k^{(1)} - \sigma \left[\gamma_k + \frac{1 + \sigma}{\sigma \gamma_k} \left(\alpha_1^2 - \alpha_2^2 \right) \right] \Omega_k^{(1)}, \tag{9}$$

$$\theta_k = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \Omega_k^{(1)}.$$

Здесь $\Omega_k^{(i)}$ – произвольное решение уравнения $æ_k^{(i)} \varphi = 0$; функции Ω_k определяют поворот элемента вокруг оси Ox_3; u_{ik} – амплитуды соответствующих величин.

Интегральные представления функций, которые входят в (9), представим в виде

$$\Omega_k^{(1)} = \sum_{j=1}^{2} \int_{L_j} p_{1k}^{(j)} K_0 \left(\lambda_k r_j \right) ds_j + \int_{L_j} p_{2k}^{(j)} \frac{\partial}{\partial \zeta_j} K_0 \left(\lambda_k r_j \right) d\zeta_j + \int_{L_j} p_{3k}^{(j)} \frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}_j} K_0 \left(\lambda_k r_j \right) d\overline{\zeta}_j,$$

$$\Omega_k^{(2)} = \sum_{j=1}^{2} \int_{L_j} q_{1k}^{(j)} K_0 \left(\beta_k r_j \right) ds_j + \int_{L_j} q_{2k}^{(j)} \frac{\partial}{\partial \zeta_j} K_0 \left(\beta_k r_j \right) d\zeta_j + \int_{L_j} q_{3k}^{(j)} \frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}_j} K_0 \left(\beta_k r_j \right) d\overline{\zeta}_j, \tag{10}$$

$$\Omega_k = \sum_{j=1}^{2} \int_{L_j} f_{1k}^{(j)} K_0 \left(\beta_k r_j \right) ds_j + \int_{L_j} f_{2k}^{(j)} \frac{\partial}{\partial \zeta_j} K_0 \left(\beta_k r_j \right) d\zeta_j + \int_{L_j} f_{3k}^{(j)} \frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}_j} K_0 \left(\beta_k r_j \right) d\overline{\zeta}_j$$

где

$$\lambda_k^2=\gamma_k^2-\alpha_1^2,\ r_j=\left|\zeta_j-z\right|,\ \zeta_j=\xi_1^{(j)}+i\xi_2^{(j)}\in L=\bigcup L_j,\ z=x_1+ix_2,$$

$K_0(\gamma r)$ – функция Макдональда нулевого порядка; ds_j – элемент дуги контура L_j; плотности $p_{ik}^{(j)}$, $q_{ik}^{(j)}$, $f_{ik}^{(j)}$ $\left(i=\overline{1,3},\ j=1,2\right)$ пока что неизвестны.

Граничные условия на L запишем в форме

$$\begin{aligned}&(\sigma_{11}+\sigma_{22})-e^{2i\psi}(\sigma_{22}-\sigma_{11}+2i\sigma_{12})=2(N-iT)\\&(\sigma_{11}+\sigma_{22})-e^{-2i\psi}(\sigma_{22}-\sigma_{11}-2i\sigma_{12})=2(N+iT)\\&(\sigma_{13}-\sigma_{23})\,e^{i\psi}+(\sigma_{13}+i\sigma_{23})\,e^{-i\psi}=2Z\end{aligned}\tag{11}$$

где ψ – угол между внешней нормалью к контуру L и осью Ox_1.

Используя закон Гука и формулы (9), запишем условия (11)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mu}(N_k-iT_k)=-\left[\Lambda(1-\sigma)+\sigma\lambda_k^2\right]\Omega_k^{(1)}-\sigma\beta_k^2\Omega_k^{(2)}+4\sigma e^{2i\psi}\partial_{zz}^2\left(i\Omega_k-\Omega_k^{(1)}-\Omega_k^{(2)}\right),\\&\frac{1}{\mu}(N_k+iT_k)=-\left[\Lambda(1-\sigma)+\sigma\lambda_k^2\right]\Omega_k^{(1)}-\sigma\beta_k^2\Omega_k^{(2)}+4\sigma e^{-2i\psi}\partial_{zz}^2\left(-i\Omega_k-\Omega_k^{(1)}-\Omega_k^{(2)}\right),\\&\frac{1}{\mu}Z_k=e^{i\psi}\partial_z\left(\tilde{a}_k\Omega_k^{(1)}+\tilde{b}_k\Omega_k^{(2)}+i\tilde{c}_k\Omega_k\right)+e^{-i\psi}\partial_z\left(\tilde{a}_k\Omega_k^{(1)}+\tilde{b}_k\Omega_k^{(2)}-i\tilde{c}_k\Omega_k\right),\end{aligned}\tag{12}$$

где

$$\Lambda=\alpha_2^2-\alpha_1^2,\ \tilde{a}_k=a_k-\sigma\gamma_k,\ \tilde{b}_k=b_k-\sigma\gamma_k,\ \tilde{c}_k=\sigma\gamma_k,\ a_k=\sigma\gamma_k,$$

$$b_k=\sigma\left[\gamma_k+\frac{1+\sigma}{\sigma\gamma_k}\left(\alpha_1^2-\alpha_2^2\right)\right].$$

Система сингулярных интегральных уравнений

Краевая задача (12) с учетом соотношений (10) сводится с помощью обычной процедуры к системе, состоящей из шести сингулярных интегральных уравнений (для каждого фиксированного κ).

Для её компактной записи введём в (12) дополнительный индекс “n” $(n=1,\ 2)$, соответствующий двум направляющим замкнутым контурам L_1 и L_2. С учетом этого системы сингулярных интегральных уравнений запишутся в виде

$$\frac{1}{\mu}\left(N_k^{(n)}-iT_k^{(n)}\right)=-p_{2k}^{(n)}r_{2kn}^*-p_{3k}^{(n)}r_{2kn}^*+\sum_{j=1}^{2}\left\{\int_{L_j}p_{1k}^{(j)}G_{1kjn}^*ds_j+\int_{L_j}p_{2k}^{(j)}G_{2kjn}^*ds_j+\int_{L_j}p_{3k}^{(j)}G_{3kjn}^*ds_j\right\}$$

$$\frac{1}{\mu}\left(N_k^{(n)}-iT_k^{(n)}\right)=-p_{2k}^{(n)}\tilde{r}_{1kn}-p_{3k}^{(n)}\tilde{r}_{2kn}+\sum_{j=1}^{2}\left\{\int_{L_j}p_{1k}^{(j)}\tilde{G}_{1kjn}ds_j+\int_{L_j}p_{2k}^{(j)}\tilde{G}_{2kjn}ds_j+\int_{L_j}p_{3k}^{(j)}\tilde{G}_{3kjn}ds_j\right\};$$

$$\frac{1}{\mu}Z_k^{(n)}=-p_{2k}^{(n)}\tilde{r}_{1kn}^*+\sum_{j=1}^{2}\left\{\int_{L_j}p_{1k}^{(j)}\tilde{G}_{1kjn}^*ds_j+\int_{L_j}p_{2k}^{(j)}\tilde{G}_{2kjn}^*ds_j+\int_{L_j}p_{3k}^{(j)}\tilde{G}_{3kjn}^*ds_j\right\},$$

где

$$if_{1k}^{(j)}-p_{1k}^{(j)}-q_{1k}^{(j)}=0,\ if_{1k}^{(j)}+p_{1k}^{(j)}+q_{1k}^{(j)}=0,\ \tilde{a}_{k-2k}p_{1k}^{(j)}-\tilde{b}_jq_{2k}^{(j)}+i\tilde{c}_kf_{2k}^{(j)}=0,$$

$$-p_{2k}^{(j)}-q_{2k}^{(j)}+if_{2k}^{(j)}=0,\ \tilde{a}_kp_{3k}^{(j)}+\tilde{b}_kq_{3k}^{(j)}-i\tilde{c}_kf_{3k}^{(j)}=0,\ p_{3k}^{(j)}+q_{3k}^{(j)}+if_{3k}^{(j)}=0;$$

$$f_{1k}^{(j)}=0\,,\ q_{1k}^{(j)}=-p_{1k}^{(j)}\,,\ f_{2k}^{(j)}=d_{1k}^{*}\,p_{2k}^{(j)}\,,\ q_{2k}^{(j)}=d_{1k}^{*}\,p_{2k}^{(j)}\,,\ f_{3k}^{(j)}=\overline{d}_{1k}^{*}\,p_{3k}^{(j)}\,,\ \ q_{3k}^{(j)}=\tilde{d}_{1k}^{*}\,p_{3k}^{(j)}\,;$$

$$d_{1k}^{*}=-i\left(1+\tilde{d}_{1k}\right),\ \tilde{d}_{1k}=-\frac{d_{1k}}{d_{2k}},\ d_{1k}=\tilde{a}_{k}+\tilde{c}_{k}\,,\ d_{2k}=\tilde{b}_{k}+\tilde{c}_{k}\,;\ \sigma_{n0}=e^{2i\psi_{n0}}\,,$$

$$r_{1kn}^{*}=r_{1k}-\sigma_{n0}r_{1kn}\,,\ r_{2kn}^{*}=r_{2k}-\sigma_{n0}r_{2kn}\,,$$

$$\tilde{r}_{1kn}=r_{1k}-\overline{\sigma}_{n0}r_{3kn}\,,\ \tilde{r}_{2kn}=r_{2k}-\overline{\sigma}_{n0}r_{4kn}$$

$$\tilde{r}_{1kn}^{*}=e^{i\psi_{n0}}r_{5kn}+e^{-i\psi_{n0}}r_{6kn}\,,$$

$$r_{1k}=-\left(l_{1k}-l_{2k}\tilde{d}_{1k}\right)l^{*}\,,\ r_{2k}=-r_{1k}\,,$$

$$r_{1kn}=4\sigma\left\{l_{1kn}\left(\beta_{k}\right)-l_{1kn}\left(\lambda_{k}\right)\right\},\ r_{2kn}=4\sigma\left\{\left(1+2\tilde{d}_{1k}\right)l_{1kn}\left(\beta_{k}\right)+l_{1kn}\left(\lambda_{k}\right)\right\},$$

$$r_{3kn}=4\sigma\left\{\left(1+2\tilde{d}_{1k}\right)\overline{l}_{1kn}\left(\beta_{k}\right)-\overline{l}_{1kn}\left(\lambda_{k}\right)\right\},\ r_{4kn}=4\sigma\left\{\ \overline{l}_{1kn}\left(\beta_{k}\right)-\overline{l}_{1kn}\left(\lambda_{k}\right)\right\},$$

$$r_{5kn}=\left(\tilde{a}_{k}+\tilde{b}_{k}\right)l_{n}^{*}\,,\ r_{6kn}=\overline{r}_{5kn}\,;$$

$$l_{1k}=-\left[\Lambda\left(1-\sigma\right)+\sigma\lambda_{k}^{2}\right],\ l_{2k}=-\sigma\beta_{k}^{2}\,,\ l^{*}=\frac{i\pi}{2}\,,\ l_{n}^{*}=\frac{\pi}{2}e^{-i\psi_{n0}}\,,$$

$$l_{1kn}\left(\lambda_{k}\right)=\frac{i\pi\lambda_{k}^{2}}{8}e^{-2i\psi_{n0}}\,,\ l_{1kn}\left(\beta_{k}\right)=\frac{i\pi\beta_{k}^{2}}{8}e^{-2i\psi_{n0}}\,;$$

$$G_{1kjn}^{*}=G_{1kjn}-\sigma_{n0}G_{4kjn}\,,\ G_{2kjn}^{*}=G_{2kjn}-\sigma_{n0}G_{5kjn}\,,$$

$$G_{3kjn}^{*}=G_{3kjn}-\sigma_{n0}G_{6kjn}\,,\ \tilde{G}_{1kjn}=G_{1kjn}-\overline{\sigma}_{n0}G_{7kjn}\,,$$

$$\tilde{G}_{2kjn}=G_{2kjn}-\overline{\sigma}_{n0}G_{8kjn}\,,\ \tilde{G}_{3kjn}=G_{3kjn}-\overline{\sigma}_{n0}G_{9kjn}\,,$$

$$\tilde{G}_{3kjn}^{*}=e^{i\psi_{n0}}G_{12kjn}+e^{-i\psi_{n0}}G_{13kjn}\,,\ \tilde{G}_{2kjn}^{*}=e^{i\psi_{n0}}G_{11kjn}+e^{-i\psi_{n0}}G_{14kjn}\,,$$

$$\tilde{G}_{3kjn}^{*}=e^{i\psi_{n0}}G_{12kjn}+e^{-i\psi_{n0}}G_{15kjn}\,,$$

$$G_{1kjn}=l_{1k}k_{0}\left(\lambda_{k}r_{jn0}\right)-l_{2k}k_{0}\left(\beta_{k}r_{jn0}\right),$$

$$G_{2kjn}=-\frac{i}{2}\left\{l_{1k}\lambda_{k}k_{0}\left(\lambda_{k}r_{jn0}\right)+l_{2k}\tilde{d}_{1k}\beta_{k}k_{0}\left(\beta_{k}r_{jn0}\right)\right\}e^{i\left(\psi_{j}-\alpha_{jn0}\right)},$$

$$G_{3kjn}=\frac{i}{2}\left\{l_{1k}\lambda_{k}k_{1}\left(\lambda_{k}r_{jn0}\right)+l_{2k}\tilde{d}_{1k}\beta_{k}k_{1}\left(\beta_{k}r_{jn0}\right)\right\}e^{-i\left(\psi_{j}-\alpha_{jn0}\right)},$$

$$G_{4kjn}=\sigma\left\{\lambda_{k}^{2}k_{2}^{*}\left(\lambda_{k}r_{jn0}\right)-\beta_{k}^{2}k_{2}^{*}\left(\beta_{k}r_{jn0}\right)\right\}e^{-2i\alpha_{jn0}}\,,$$

$$G_{5kjn}=4i\sigma\left\{k_{3}^{**}\left(\lambda_{k}r_{jn0}\right)-k_{3}^{**}\left(\beta_{k}r_{jn0}\right)\right\}e^{i\left(\psi_{j}-3\alpha_{jn0}\right)},$$

$$G_{6kjn}=\frac{i\sigma}{2}\left\{\lambda_{k}^{3}k_{1}\left(\lambda_{k}r_{jn0}\right)+\left(1+2\tilde{d}_{1k}\right)\beta_{k}^{3}k_{1}\left(\beta_{k}r_{jn0}\right)\right\}e^{-i\left(\psi_{j}+\alpha_{jn0}\right)},$$

$$G_{7kjn}=\sigma\left\{\lambda_{k}^{2}k_{2}^{*}\left(\lambda_{k}r_{jn0}\right)-\beta_{k}^{2}k_{2}^{*}\left(\beta_{k}r_{jn0}\right)\right\}e^{2i\alpha_{jn0}}\,,$$

$$G_{8kjn}=-\frac{i\sigma}{2}\left\{\lambda_k^3k_1\left(\lambda_k r_{jn0}\right)+\left(1+2\tilde{d}_{1k}\right)\beta_k^3k_1\left(\beta_k r_{jn0}\right)\right\}\,e^{i\left(\psi_j+\alpha_{jn0}\right)},$$

$$G_{9kjn}=-4i\sigma\left\{k_3^{**}\left(\lambda_k r_{jn0}\right)-k_3^{**}\left(\beta_k r_{jn0}\right)\right\}\,e^{-i\left(\psi_j-3\alpha_{jn0}\right)},$$

$$G_{10kjn}=\frac{1}{2}\left\{\tilde{a}_k\lambda_k k_1\left(\lambda_k r_{jn0}\right)-\tilde{b}_k\beta_k k_1\left(\beta_k r_{jn0}\right)\right\}\,e^{-i\alpha_{jn0}},$$

$$G_{11kjn}=\frac{1}{4}\left\{-\tilde{a}_k\lambda_k^2k_2^*\left(\lambda_k r_{jn0}\right)-\left(\tilde{b}_k\tilde{d}_{1k}+i\tilde{c}_k d_{1k}^*\right)\beta_k^2k_2^*\left(\beta_k r_{jn0}\right)\right\}\,e^{i\left(\psi_j-2\alpha_{jn0}\right)},$$

$$G_{12kjn}=\frac{i}{4}\left\{\tilde{a}_k\lambda_k^2k_0\left(\lambda_k r_{jn0}\right)+\left(\tilde{b}_k\tilde{d}_{1k}+i\tilde{c}_k\overline{d}_{1k}^*\right)\beta_k^2k_2^*\left(\beta_k r_{jn0}\right)\right\}\,e^{-i\psi_j},$$

$$G_{13kjn}=\frac{1}{2}\left\{\tilde{a}_k\lambda_k k_1\left(\lambda_k r_{jn0}\right)-\tilde{b}_k\beta_k k_1\left(\beta_k r_{jn0}\right)\right\}\,e^{i\alpha_{jn0}},$$

$$G_{14kjn}=-\frac{i}{4}\left\{\tilde{a}_k\lambda_k^2k_0\left(\lambda_k r_{jn0}\right)+\left(\tilde{b}_k\tilde{d}_{1k}-i\tilde{c}_k\overline{d}_{1k}^*\right)\beta_k^2k_0\left(\beta_k r_{jn0}\right)\right\}\,e^{i\psi_j},$$

$$G_{15kjn}=\frac{i}{4}\left\{\tilde{a}_k\lambda_k^2k_2^*\left(\lambda_k r_{jn0}\right)+\left(\tilde{b}_k\tilde{d}_{1k}-i\tilde{c}_k\overline{d}_{1k}^*\right)\beta_k^2k_2^*\left(\beta_k r_{jn0}\right)\right\}\,e^{-i\left(\psi_j-2\alpha_{jn0}\right)},$$

$$d_{1k}^*=-i\left(1+\tilde{d}_{1k}\right),\;\; K_3^{**}\left(\gamma r\right)=-\left(\frac{\gamma}{2}\right)^3K_3\left(\gamma r\right)+\frac{1}{r^3},$$

$$K_2^*\left(\gamma r\right)=K_2\left(\gamma r\right)-\frac{2}{\gamma^2r^2},\;\; \zeta_j-\zeta_{jn0}=r_{jn0}e^{i\alpha_{jn0}}.$$

Результаты численных расчётов

В качестве примера рассмотрим изотропный слой, ослабленный двумя отверстиями, направляющие цилиндрических поверхностей которых L_1 и L_2 представляют собой эллипсы

$$L_1:\xi_{11}=R_{11}\cos\varphi_1,\;\; \xi_{12}=R_{12}\sin\varphi_1,\;\; 0\le\phi_1\le 2\pi;$$

$$L_2:\xi_{21}=R_{21}\cos\varphi_2+d,\;\; \xi_{22}=R_{22}\sin\varphi_2,\;\; 0\le\phi_2\le 2\pi,$$

либо квадраты (квадрат со скруглёнными углами)

$$L_1:\xi_{11}=a_0^{(1)}\left(\cos\varphi_1+C_0\cos3\varphi_1\right),\;\; \xi_{12}=a_0^{(1)}\left(\sin\varphi_1-C_0\sin3\varphi_1\right),\;\; 0\le\phi_1\le 2\pi,$$

$$L_2:\xi_{21}=a_0^{(2)}\left(\cos\varphi_2+C_0\cos3\varphi_2\right)+d_1,\; \xi_{22}=a_0^{(2)}\left(\sin\varphi_2-C_0\sin3\varphi_2\right),\; 0\le\phi_1\le 2\pi,\; C_0=0{,}14036.$$

Для характеристики напряженного состояния слоя на цилиндрических поверхностях отверстий рассчитывались амплитудные значения величин

$$\sigma_{\theta\theta}=\sigma_{11}\sin^2\theta+\sigma_{22}\cos^2\theta-2\sigma_{12}\cos\theta\sin\theta,\;\; \theta=\psi-\pi,\;\; \sigma_{ZZ}=\sigma_{33} \qquad (13)$$

в точке контура $L_2:\;\varphi_2=0,\; x_3/h=0$.

При численной реализации алгоритма систему интегральных уравнений методом механических квадратур сводим к линейной системе алгебраических уравнений. Последовательность вычислений такова: сначала численно решали систему интегральных уравнений краевой задачи (12), далее определяли коэффициенты Фурье $\sigma_{ij}^{(k)}$ тензора напряжений, затем по формулам (13) рассчитывали напряжения в вышеозначенной точке.

Коэффициенты Фурье искомых величин (13) с учетом формул (9), (10), операции предельного перехода и уравнений относительно плотностей запишутся в виде

$$\frac{1}{\mu}\sigma_{\theta\theta}^{(kn)} = -p_{2k}^{(n)}m_{1k} - p_{3k}^{(n)}m_{2k} + \sum_{j=1}^{2}\left\{\int_{L_j} p_{1k}^{(j)}H_{1kjn}ds_j + \int_{L_j} p_{2k}^{(j)}H_{2kjn}ds_j + \int_{L_j} p_{3k}^{(j)}H_{3kjn}ds_j\right\} - \frac{1}{\mu}N_k^{(n)}$$

$$\frac{1}{\mu}\sigma_{zz}^{(kn)} = -p_{2k}^{(n)}m_{1k}^{*} - p_{3k}^{(n)}m_{2k}^{*} + \sum_{j=1}^{2}\left\{\int_{L_j} p_{1k}^{(j)}H_{1kjn}^{*}ds_j + \int_{L_j} p_{2k}^{(j)}H_{2kjn}^{*}ds_j + \int_{L_j} p_{3k}^{(j)}H_{3kjn}^{*}ds_j\right\},$$

где

$$m_{1k} = 2r_{1k},\ \ m_{2k} = 2r_{2k},$$

$$H_{1kjn} = 2G_{1kjn},\ \ H_{2kjn} = 2G_{2kjn},\ \ H_{3kjn} = 2G_{3kjn},$$

$$m_{1k}^{*} = -\left(a_k^{*} + b_k^{*}\tilde{d}_{1k}\right)l^{*},\ \ m_{2k}^{*} = -m_{1k}^{*},$$

$$H_{1kjn}^{*} = a_k^{*}k_0\left(\lambda_k r_{jn0}\right) - b_k^{*}k_0\left(\beta_k r_{jn0}\right),$$

$$H_{2kjn}^{*} = -\frac{i}{2}\left\{a_k^{*}\lambda_k k_1\left(\lambda_k r_{jn0}\right) + b_k^{*}\tilde{d}_{1k}\beta_k k_1\left(\beta_k r_{jn0}\right)\right\} e^{i\left(\psi_j - \alpha_{jn0}\right)},$$

$$H_{3kjn}^{*} = \frac{i}{2}\left\{a_k^{*}\lambda_k k_1\left(\lambda_k r_{jn0}\right) + b_k^{*}\tilde{d}_{1k}\beta_k k_1\left(\beta_k r_{jn0}\right)\right\} e^{-i\left(\psi_j - \alpha_{jn0}\right)},$$

$$a_k^{*} = \left(\sigma - 1\right)\Lambda - 2\gamma_k a_k,\ \ b_k^{*} = -2\gamma_k b_k.$$

Пусть на цилиндрических поверхностях слоя действует пульсирующее давление, амплитудное значение которого определяется выражением $N_0 = C\cos\gamma_0 x_3$ $\left(C = \mathrm{const}\right)$.

На рис. 2–4 приведены распределения относительного амплитудного значения окружного напряжения $\sigma_1 = \left|\sigma_{\theta\theta}/C\right|$ в зависимости от изменения безразмерного волнового числа $\alpha_1 a$ (a – характерный линейный размер) при различных геометрических и механических параметрах слоя с отверстиями и $a = 1$. Все кривые построены при $h = 90$.

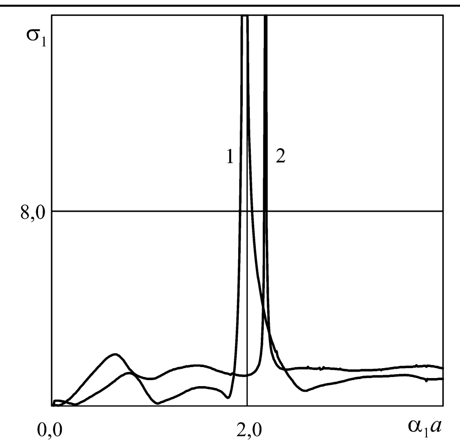

Рис. 2. Распределение относительного окружного напряжения при $R_{11} = R_{12} = R_{21} = R_{22} = 1$

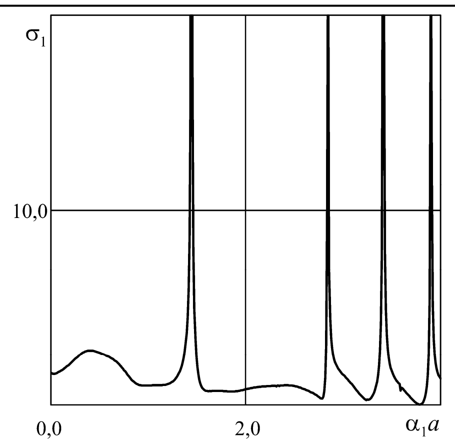

Рис. 3. Распределение относительного окружного напряжения при $R_{11} = 1$, $R_{12} = 0{,}5$, $R_{21} = 1$, $R_{22} = 0{,}5$

Кривые 1, 2 (рис. 2) построены при $d = 2$, $R_{11} = R_{12} = R_{21} = R_{22} = 1$ и значении коэффициента Пуассона $\nu = 0,15$ и $\nu = 0,35$ соответственно. Кривая (рис. 3) построена при $d = 2$ $R_{11} = 1, R_{12} = 0,5, R_{21} = 1, R_{22} = 0,5$ и значении коэффициента Пуассона $\nu = 0,35$. Кривая (рис. 4) построена при $d = 2$, $R_{11} = 1, R_{12} = 0,4$, $R_{21} = 1, R_{22} = 0,4$ и значении коэффициента Пуассона $\nu = 0,35$.

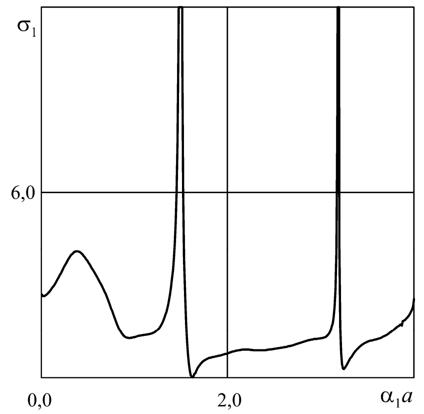

Рис. 4. Распределение окружного напряжения при $R_{11} = 1, R_{12} = 0,4, R_{21} = 1, R_{22} = 0,4$

Выводы

По результатам проведенного исследования можно сделать следующие выводы:

– при уменьшении коэффициента Пуассона наблюдается смещение основания первого резонанса в сторону начала координат;
– при уменьшении коэффициента Пуассона наблюдается расширение основания первого резонанса;
– взаимодействие двух полостей эллиптического поперечного сечения $R_{11} = 1$, $R_{12} = 0,5$, $R_{21} = 1$, $R_{22} = 0,5$ приводит к появлению четырех резонансных ситуаций при $0 \le \alpha_1 a \le 4$;
– взаимодействие двух полостей эллиптического поперечного сечения $R_{11} = 1$, $R_{12} = 0,4$, $R_{21} = 1$, $R_{22} = 0,4$ приводит к появлению двух резонансных ситуаций при $0 \le \alpha_1 a \le 4$.

Литература

1. *Dawe D. J.* Use of the finite strip method in predicting the behaviour of composite laminated structures / D. J. Dawe // Compos.Struct. – 2002. – Vol. 57. – P. 11–36.
2. *Лурье А. И.* К теории толстых плит / А. И. Лурье // Прикл. математика и механика. – 1942. – Т. 6, вып. 2/3. – С. 151–168.
3. *Космодамианский А. С.* Толстые многосвязные пластины / А. С. Космодамианский, В. А. Шалдырван. – Киев: Наук. думка, 1978. – 240 с.
4. *Шалдырван В. А.* О методе Лурье-Воровича в смешанных задачах изгиба цилиндрических тел / В. А. Шалдырван, Т. А. Васильев // Прикл. механика. – 2005. – Т. 41, № 8. – С. 58–65.
5. *Алтухов Е. В.* Упругое равновесие слоя с полостью для граничных условий смешанного типа на торцах / Е. В. Алтухов // Теорет. и прикл. механика. – 1993. – Вып. 24. – С. 3–7.
6. *Космодамианский А. С.* Концентрация напряжений при изгибе толстой плиты с бесконечным рядом полостей / А. С. Космодамианский, В. А. Шалдырван, Г. Г. Шалдырван // Прикл. механика. – 1975. – Т. 11, вып. 4. – С. 15–19.
7. *Фильштинский Л. А.* Смешанная кососимметричная задача об упругом слое, ослабленном сквозными полостями / Л. А. Фильштинский, Ю. Д. Ковалев // Физико-хим. механика материалов. – 2001. – № 5. – С. 114–116.
8. *Фильштинский Л. А.* Гармоническое возбуждение упругого слоя с полостью / Л. А. Фильштинский, Ю. Д. Ковалёв, Д. В. Кушнир // Материалы XIV междунар. науч. шк. им. акад. С. А. Христиановича. – Симферополь, 2004. – С. 151–153.
9. *Bokov I. P.* Fundamental solution of static equations of transversely isotropic plates. / I. P. Bokov, E. A. Strelnikova // Intern. J. Innovative Research in Eng. & Management. – 2015. – Vol. 2, Issue 6. – P. 56 – 62.
10. *Алтухов Є. В.* Коливання ізотропних пластин з урахуванням крайових умов типу плоского торця або діафрагми / Є. В. Алтухов, Ю. В. Панченко, А. Ю. Богатчук // Вісн. Донець. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2000. – № 1. – С. 41–45.

Поступила в редакцию 09.11.17