Я.М.Григоренко, Ю.А.Авраменко

ОПРЕДЕЛЕНИЕ В УТОЧНЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ОРТОТРОПНЫХ ТОРОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ.ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: ayagrigorenko@yandex.ru, iuliavra@yandex.ru

Abstract. Basing on the developed before approach, the solution of a problem on stress state of orthotropic toroidal shells in the non-classical statement is given. The solution is founded on the rectilinear element hypothesis. The findings are shown on the deflection an stress distribution in dependence of the shall axis curvature.

Key words: toroidal shell, stress state, non-classical statement.

Введение.

В качестве элементов конструкций современной техники, наряду с оболочками вращения [4, 6, 21], широко используются тороидальные оболочки, в частности, в энергомашиностроении, в газовой и химической промышленностях [2, 6, 9, 10]. Решение задач о напряженном состоянии тороидальных оболочек получено в основном в классической постановке для случаев, когда можно разделить переменные и свести задачу к одномерной [2, 14].

В настоящей статье получена система разрешающих дифференциальных уравнений в частных производных для задачи о напряженном состоянии ортотропных тороидальных оболочек с произвольными граничными условиями на торцах в уточненной постановке [10, 16]. Решение двумерной задачи проведено на основе сведения ее к одномерной с помощью метода сплайн аппроксимации и решения последней устойчивым численным методом дискретной ортогонализации. Проведен анализ полей перемещений и напряжений в зависимости от степени искривления оси оболочки.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим замкнутые в поперечном сечении усеченные тороидальные ортотропные оболочки постоянной толщины с круговым поперечным сечением (рис. 1), которые находятся под действием поверхностной нагрузки. Координатную поверхность оболочки отнесем к системе ортогональных криволинейных координат η, θ, где η – угол в осевом сечении, а θ – угол в поперечном сечении оболочки, при этом $\eta_1 \le \eta \le \eta_2, -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$.

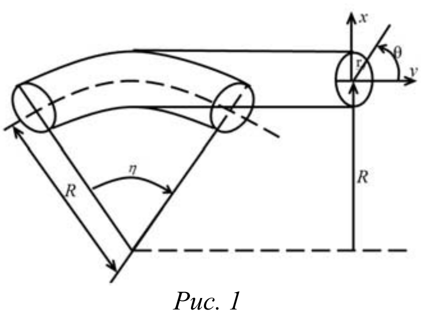

Рис. 1

Первая квадратичная форма [6] срединной поверхности имеет вид

$$dS^2 = A_1^2 d\alpha_1^2 + A_2^3 d\alpha_2^2 , \quad (1)$$

$$A_1 = R + r\sin\theta,\ \alpha_1 = \eta,\ \alpha_2 = \theta,\ \eta_1 \le \eta \le \eta_2,\ -\pi/2 \le \theta \le \pi/2, \tag{2}$$

где R – радиус осевой окружности; r – радиус окружности в поперечном сечении.

Оболочка находится под действием нормального давления $q = q(\eta,\theta)$. Напряженно-деформированное состояние оболочки исследуем по уточненной теории оболочек типа Тимошенко [16], основанной на гипотезе прямой линии [6, 7, 10, 20]. Суть принятой гипотезы состоит в том, что первоначально нормальный к координатной поверхности элемент оболочки после деформации остается прямолинейным, но уже неперпендикулярным к деформированной координатной поверхности. При этом также принимаем, что указанный элемент не изменяет свою длину.

В соответствии с принятой гипотезой перемещения оболочки запишем в виде

$$\begin{aligned} u_\eta(\eta,\theta,\gamma) &= u(\eta,\theta) + \gamma\psi_\eta(\eta,\theta); \\ u_\theta(\eta,\theta,\gamma) &= v(\eta,\theta) + \gamma\psi_\theta(\eta,\theta); \\ u_\gamma(\eta,\theta,\gamma) &= w(\eta,\theta). \end{aligned} \tag{3}$$

В выражениях (3) η,θ,γ – координаты точек оболочки в направлениях образующей, направляющей и нормали к выбранной (исходной) координатной поверхности $\gamma = const$; $u_\eta,\ u_\theta,\ u_\gamma$ – соответствующие перемещения; $u,\ v,\ w$ – перемещения точек координатной поверхности в направлениях η,θ,γ ; ψ_η,ψ_θ – полные углы поворота прямолинейного элемента.

В соответствии с (3) выражения для деформации запишем в виде

$$\begin{aligned} e_\eta(\eta,\theta,\gamma) &= \varepsilon_\eta(\eta,\theta) + \gamma\chi_\eta(\eta,\theta); \\ e_\theta(\eta,\theta,\gamma) &= \varepsilon_\theta(\eta,\theta) + \gamma\chi_\theta(\eta,\theta); \\ e_{\eta\theta}(\eta,\theta,\gamma) &= \varepsilon_{\eta\theta}(\eta,\theta) + \gamma 2\chi_{\eta\theta}(\eta,\theta); \\ e_{\eta\gamma}(\eta,\theta,\gamma) &= \gamma_\eta(\eta,\theta); \\ e_{\theta\gamma}(\eta,\theta,\gamma) &= \gamma_\theta(\eta,\theta); \end{aligned} \tag{4}$$

$$\left(\varepsilon_\eta = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \theta} v + k_1 w,\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{A_2}\frac{\partial v}{\partial \theta} + k_2 w,\ \varepsilon_{\eta\theta} = \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{u}{A_1}\right) + \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{v}{A_2}\right); \right.$$

$$\chi_\eta = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \psi_\eta}{\partial \eta} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \theta}\psi_\theta - k_1\varepsilon_\eta,\ \chi_\theta = \frac{1}{A_2}\frac{\partial \psi_\eta}{\partial \theta} - k_2\varepsilon_\theta;$$

$$\chi_{\eta\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\psi_\eta}{A_1}\right) + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\psi_\eta}{A_2}\right) - \frac{k_1}{A_1}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \theta}u\right) - \frac{k_2}{A_2}\frac{\partial u}{\partial \theta} \right); \tag{5}$$

$$\psi_\eta = \gamma_\eta + \vartheta_\eta,\ \psi_\theta = \gamma_\theta + \vartheta_\theta;\ \vartheta_\eta = -\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial \eta} + k_1 u,\ \vartheta_\theta = -\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial \theta} + k_1 v;$$

$$\left. k_1 = \frac{1}{R + r\sin\theta},\ k_2 = \frac{1}{r} \right).$$

В выражении (5) $\varepsilon_\eta, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{\eta\theta}$ – тангенциальные, а $\chi_\eta, \chi_\theta, \chi_{\eta\theta}$ – изгибные деформации координатной поверхности; k_1, k_2 – кривизны осевой окружности и окружности в поперечном сечении соответственно; $\vartheta_\eta, \vartheta_\theta$ – углы поворота нормали без учета поперечных сдвигов; $\gamma_\eta, \gamma_\theta$ – углы поворота нормали, обусловленные поперечными сдвигами.

Уравнения равновесия элемента оболочки имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(A_2 N_\eta\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_2 N_{\theta\eta}\right)+N_{\eta\theta}\frac{\partial A_1}{\partial\theta}+A_1 A_2 k_1 Q_\eta + A_1 A_2 q_\eta = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_1 N_\theta\right)-N_\eta\frac{\partial A_1}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(A_2 N_{\eta\theta}\right)+A_1 Q_\theta + A_1 A_2 q_\theta = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(A_2 Q_\eta\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_1 Q_\theta\right)-A_1 A_2 k_1 N_\eta - A_1 N_\theta + A_1 A_2 q_\gamma = 0; \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(A_2 M_\eta\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_1 M_{\eta\theta}\right)+M_{\eta\theta}\frac{\partial A_1}{\partial\theta}-A_1 A_2 Q_\eta = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_1 M_\theta\right)-M_\eta\frac{\partial A_1}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(A_2 M_{\eta\theta}\right)-A_1 A_2 Q_\theta = 0;$$

$$N_{\eta\theta}-k_2 M_{\eta\theta}-N_{\theta\eta}+k_1 M_{\eta\theta}=0,$$

где $N_\eta, N_\theta, N_{\eta\theta}, N_{\theta\eta}$ – тангенциальные усилия; Q_η, Q_θ – перерезывающие усилия; $M_\eta, M_\theta, M_{\eta\theta}, M_{\theta\eta}$ – изгибающие и крутящие моменты; q_η, q_θ, q_γ – компоненты поверхностной нагрузки.

Соотношения упругости для ортотропных оболочек относительно выбранной координатной поверхности записываем в виде

$$N_\eta = C_{11}\varepsilon_\eta + C_{12}\varepsilon_\theta;\; N_\theta = C_{12}\varepsilon_\eta + C_{22}\varepsilon_\theta;$$

$$N_{\eta\theta} = C_{66}\varepsilon_{\eta\theta} + 2k_2 D_{66}\chi_{\eta\theta};\; N_{\theta\eta} = C_{66}\varepsilon_{\eta\theta} + 2k_1 D_{66}\chi_{\eta\theta}; \tag{7}$$

$$M_\eta = D_{11}\chi_\eta + D_{12}\chi_\theta;\; M_\theta = D_{12}\chi_\eta + D_{22}\chi_\theta;\; M_{\eta\theta} = 2D_{66}\chi_{\eta\theta};$$

$$Q_\eta = K_1\gamma_\eta;\; Q_\theta = K_2\gamma_\theta$$

$$\left(C_{11}=\frac{E_\eta h}{1-\upsilon_\eta\upsilon_\theta};\; C_{12}=\upsilon_\theta C_{11};\; C_{22}=\frac{E_\theta h}{1-\upsilon_\eta\upsilon_\theta};\; C_{66}=G_{\eta\theta}h;\right.$$

$$D_{11}=\frac{E_\eta h^3}{12(1-\upsilon_\eta\upsilon_\theta)};\; D_{12}=\upsilon_\theta D_{11}\chi_\theta;\; D_{22}=\frac{E_\theta h^3}{12(1-\upsilon_\eta\upsilon_\theta)};\; D_{66}=\frac{G_{\eta\theta}h^3}{12}; \tag{8}$$

$$\left.K_1=\frac{5}{6}G_{\eta\gamma};\; K_2=\frac{5}{6}G_{\theta\gamma}\right).$$

В формулах (8) $E_\eta, E_\theta, \upsilon_\eta, \upsilon_\theta$ – модули упругости и коэффициенты Пуассона в направлениях η и θ; $G_{\eta\theta}, G_{\eta\gamma}, G_{\theta\gamma}$ – модуль сдвига; $h = h(\eta,\theta)$ – толщина оболочки.

Соотношения (5) – (7) представляют замкнутую систему дифференциальных уравнений в частных производных 10-го порядка. Для определения произволов, содержащихся в общем интеграле этой системы, необходимо задать граничные условия на контурах оболочки при $\eta = \mathrm{const}$. В отличие от классической теории оболочек, в которой на каждом контуре формулируются по четыре граничных условия, в уточненной теории оболочек принятая модель позволяет задать на каждом контуре по пять граничных условий, что соответствует числу искомых функций. Граничные условия могут быть сформулированы через усилия, моменты, перемещения и полные углы поворота нормали.

Для определения напряжений в ортотропных тороидальных оболочках исходим из соотношений закона Гука

$$e_\eta = b_{11}\sigma_\eta + b_{12}\sigma_\theta ; e_\theta = b_{12}\sigma_\eta + b_{22}\sigma_\theta ;$$

$$e_{\eta\theta} = b_{66}\tau_{\eta\theta} ; e_{\eta\gamma} = b_{55}\tau_{\eta\gamma} ; e_{\theta\gamma} = b_{44}\tau_{\theta\gamma} \tag{9}$$

$$\left(b_{11} = \frac{1}{E_\eta} ; b_{12} = -\frac{\upsilon_\eta}{E_\eta} ; b_{22} = \frac{1}{E_\theta} ; b_{66} = \frac{1}{G_{\eta\theta}} ; b_{55} = \frac{1}{G_{\eta\gamma}} ; b_{44} = \frac{1}{G_{\theta\gamma}} \right). \tag{10}$$

Разрешая равенства (9) относительно напряжений и используя (4), получаем выражения для напряжений через деформации координатной поверхности

$$(b_{11}b_{22} - b_{12}{}^2)\sigma_\eta = b_{22}(\varepsilon_\eta + \gamma\chi_\eta) - b_{12}(\varepsilon_\theta + \gamma\chi_\theta);$$

$$(b_{12}{}^2 - b_{11}b_{22})\sigma_\theta = b_{12}(\varepsilon_\eta + \gamma\chi_\eta) - b_{11}(\varepsilon_\theta + \gamma\chi_\theta); \tag{11}$$

$$b_{66}\tau_{\eta\theta} = \varepsilon_{\eta\theta} + 2\gamma\chi_{\eta\theta} ; b_{55}\tau_{\eta\gamma} = \gamma_\eta ; b_{44}\tau_{\theta\gamma} = \gamma_\theta ; \left(-h/2 \le \gamma \le h/2 \right).$$

2. Методика решения задачи.

Для рассматриваемого класса двумерных краевых задач применим подход [8,11], основанный на аппроксимации искомого решения в одном координатном направлении с помощью сплайн-функций [4, 12, 13, 17 – 19], а для решения полученной при этом одномерной краевой задачи используем устойчивый численный метод дискретной ортогонализации [1, 3, 6]. Такой подход позволяет решать задачи для различных граничных условий на каждом контуре оболочки. При этом преследуем цель, чтобы при аппроксимации решения можно было ограничиться сплайн-функциями наименьшей степени. В качестве разрешающих функций выбираем перемещения u, v, w в направлениях оси оболочки, поперечном и нормальном, и полные углы поворота нормали ψ_η, ψ_θ.
В соответствии с данным подходом после некоторых преобразований разрешающую систему уравнений запишем в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + a_{12}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\partial\eta} + a_{13}\frac{\partial^2\psi_\eta}{\partial\eta^2} + a_{14}\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial\theta\partial\eta} + a_{15}\frac{\partial u}{\partial\eta} +$$

$$+a_{16}\frac{\partial v}{\partial\eta} + a_{17}\frac{\partial w}{\partial\eta} + a_{18}\frac{\partial\psi_\eta}{\partial\eta} + a_{19}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\eta} + a_{1,10}\frac{\partial u}{\partial\theta} + a_{1,11}\frac{\partial v}{\partial\theta} +$$

$$+a_{1,12}\frac{\partial\psi_\eta}{\partial\theta} + a_{1,13}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta} + a_{1,14}u + a_{1,15}v + a_{1,16}w + a_{1,17}\psi_\eta + a_{1,18}\psi_\theta + a_{1,19};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = a_{21}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\eta} + a_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2} + a_{23}\frac{\partial^2 \psi_\eta}{\partial\theta\partial\eta} + a_{24}\frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial\eta^2} +$$

$$+a_{25}\frac{\partial u}{\partial\eta} + a_{26}\frac{\partial v}{\partial\eta} + a_{27}\frac{\partial\psi_\eta}{\partial\eta} + a_{28}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\eta} + a_{29}\frac{\partial u}{\partial\theta} + a_{2,10}\frac{\partial v}{\partial\theta} +$$

$$+a_{2,11}\frac{\partial w}{\partial\theta} + a_{2,12}\frac{\partial\psi_\eta}{\partial\theta} + a_{2,13}u + a_{2,14}v + a_{2,15}w + a_{2,16}\psi_\eta + a_{2,17}\psi_\theta + a_{2,18};$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} = a_{31}\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2} + a_{32}\frac{\partial u}{\partial\eta} + a_{33}\frac{\partial w}{\partial\eta} + a_{34}\frac{\partial\psi_\eta}{\partial\eta} + a_{35}\frac{\partial v}{\partial\theta} +$$

$$+a_{36}\frac{\partial w}{\partial\theta} + a_{37}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta} + a_{38}u + a_{39}v + a_{3,10}w + a_{3,11}\psi_\eta + a_{3,12}\psi_\theta + a_{3,13}; \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2\psi_\eta}{\partial\theta^2} = a_{41}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + a_{42}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\partial\eta} + a_{43}\frac{\partial^2\psi_\eta}{\partial\eta^2} + a_{44}\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial\theta\partial\eta} + a_{45}\frac{\partial u}{\partial\eta} +$$

$$+a_{46}\frac{\partial v}{\partial\eta} + a_{47}\frac{\partial w}{\partial\eta} + a_{48}\frac{\partial\psi_\eta}{\partial\eta} + a_{49}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\eta} + a_{4,10}\frac{\partial u}{\partial\theta} + a_{4,11}\frac{\partial v}{\partial\theta} +$$

$$+a_{4,12}\frac{\partial\psi_\eta}{\partial\theta} + a_{4,13}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta} + a_{4,14}u + a_{4,15}v + a_{4,16}w + a_{4,17}\psi_\eta + a_{4,18}\psi_\theta + a_{4,19};$$

$$\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial\theta^2} = a_{51}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\eta} + a_{52}\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2} + a_{53}\frac{\partial^2\psi_\eta}{\partial\theta\partial\eta} + a_{54}\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial\eta^2} + a_{55}\frac{\partial u}{\partial\eta} +$$

$$+a_{56}\frac{\partial v}{\partial\eta} + a_{57}\frac{\partial\psi_\eta}{\partial\eta} + a_{58}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\eta} + a_{59}\frac{\partial u}{\partial\theta} + a_{5,10}\frac{\partial v}{\partial\theta} + a_{5,11}\frac{\partial w}{\partial\theta} +$$

$$+a_{5,12}\frac{\partial\psi_\eta}{\partial\theta} + a_{5,13}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta} + a_{5,14}u + a_{4,15}v + a_{5,16}w + a_{5,17}\psi_\eta + a_{5,18}\psi_\theta + a_{5,19}.$$

Коэффициенты a_{ij} в системе (12) определяются следующим образом:

$$a_{11} = -r^2\left(C_{11} + D_{11}k_1^2\right)/A_1^2 C_{66};$$

$$a_{12} = -\left(rC_{66} + rC_{12} + k_1 D_{12}\right)\Big/A_1 C_{66};\; a_{13} = D_{11}r^2 k_1\Big/A_1^2 C_{66};$$

$$a_{14} = rk_1 D_{12}/A_1 C_{66};\; a_{15} = -r^2\left(k_1^2\frac{\partial D_{11}}{\partial\eta} + \frac{\partial C_{11}}{\partial\eta}\right)\Bigg/A_1^2 C_{66};$$

$$a_{16} = \left(A_1 r k_1 D_{66}\frac{\partial k_1}{\partial\theta} - rC_{66}\frac{\partial A_1}{\partial\theta} - rD_{11}k_1^2\frac{\partial A_1}{\partial\theta} - rk_1^2 D_{66}\frac{\partial A_1}{\partial\theta} +\right.$$

$$\left.+k_1 D_{66}\frac{\partial A_1}{\partial\theta} - rC_{11}\frac{\partial A_1}{\partial\theta} - A_1 r\frac{\partial C_{66}}{\partial\theta}\right)/A_1^2 C_{66}; \tag{13}$$

$$a_{17}=-2r^2k_1K_1+r^2k_1C_{11}+r^2D_{11}k_1^3+rC_{12}+k_1D_{12}\big/A_1C_{66}\,;\; a_{18}=r^2\frac{k_1}{A_1^{\,2}C_{66}}\cdot\frac{\partial D_{11}}{\partial\eta};$$

$$a_{19}=\left(rk_1D_{66}\frac{\partial A_1}{\partial\theta}-A_1rD_{66}\frac{\partial k_1}{\partial\theta}+rk_1D_{11}\frac{\partial A_1}{\partial\theta}-D_{66}\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right)\Big/A_1^{\,2}C_{66};$$

$$a_{1,10}=\left(A_1rD_{66}\frac{\partial k_1}{\partial\theta}+D_{66}\frac{\partial A_1}{\partial\theta}-r^2C_{66}\frac{\partial A_1}{\partial\theta}-A_1r^2\frac{\partial C_{66}}{\partial\theta}-rk_1D_{66}\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right)\Big/A_1r^2C_{66}\,;$$

$$a_{111}=-\left(r\frac{\partial C_{12}}{\partial\eta}+k_1\frac{\partial D_{12}}{\partial\eta}\right)\Big/A_1C_{66}\,;\;\; a_{1,12}=\frac{D_{66}}{A_1rC_{66}}\cdot\left(rk_1\frac{\partial A_1}{\partial\theta}-\frac{\partial A_1}{\partial\theta}-A_1r\frac{\partial k_1}{\partial\theta}\right);$$

$$a_{1,13}=\frac{rk_1}{A_1C_{66}}\cdot\frac{\partial D_{12}}{\partial\eta};\quad a_{1,14}=$$

$$=\left(rC_{66}\left(\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right)^2+A_1rC_{66}\frac{\partial^2A_1}{\partial\theta^2}+2A_1^{\,2}r^3k_1^2K_1+A_1r\frac{\partial C_{66}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial A_1}{\partial\theta}+rk_1^2D_{66}\left(\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right)^2\right)\Big/A_1^{\,2}rC_{66}-$$

$$-\left(k_1D_{66}\left(\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right)^2+A_1rk_1D_{66}\frac{\partial k_1}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right)\Big/A_1^{\,2}rC_{66}\,;$$

$$a_{1,15}=-r\left[\left(k_1^2\frac{\partial D_{11}}{\partial\eta}+\frac{\partial C_{11}}{\partial\eta}\right)\cdot\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right]\Big/A_1^{\,2}C_{66}\,;$$

$$a_{1,16}=-\left(r^2k_1\frac{\partial C_{11}}{\partial\eta}+r^2k_1^3\frac{\partial D_{11}}{\partial\eta}+r\frac{\partial C_{12}}{\partial\eta}+k_1\frac{\partial D_{12}}{\partial\eta}\right)\Big/A_1C_{66};$$

$$a_{1,17}=\left[D_{66}\left(\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right)^2-rk_1D_{66}\left(\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right)^2+A_1rD_{66}\frac{\partial k_1}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial A_1}{\partial\theta}-2A_1^{\,2}r^3k_1K_1\right]\Big/A_1^{\,2}rC_{66};$$

$$a_{1,18}=\frac{rk_1}{A_1^{\,2}C_{66}}\cdot\frac{\partial D_{11}}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial A_1}{\partial\theta};\;\; a_{1,19}=r^2\frac{q_\eta}{C_{66}};$$

$$a_{21}=D_{66}-r^2C_{12}-r^2C_{66}\big/A_1rC_{22};\; a_{22}=r\left(k_1D_{66}-rC_{66}\right)\big/A_1^{\,2}C_{22};$$

$$a_{23}=-\frac{D_{66}}{A_1C_{22}};\; a_{24}=-\frac{rD_{66}}{A_1^{\,2}C_{22}};$$

$$a_{25}=\left(rC_{66}\frac{\partial A_1}{\partial\theta}+rC_{11}\frac{\partial A_1}{\partial\theta}-k_1D_{66}\frac{\partial A_1}{\partial\theta}-A_1r\frac{\partial C_{12}}{\partial\theta}\right)\Big/A_1^{\,2}C_{22};$$

$$a_{26}=\frac{r}{A_1^{\,2}C_{22}}\cdot\left(k_1\frac{\partial D_{66}}{\partial\eta}-r\frac{\partial C_{66}}{\partial\eta}\right);$$

$$a_{27} = \frac{D_{66}}{A_1^2 C_{22}} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \theta}; a_{28} = -\frac{1}{A_1^2 C_{22}} \cdot \frac{\partial D_{66}}{\partial \eta};\ a_{29} = \left(\frac{\partial D_{66}}{\partial \eta} - r^2 \frac{\partial C_{66}}{\partial \eta} \right) \Big/ A_1 r C_{22};$$

$$a_{2,10} = -\left(A_1 \frac{\partial C_{22}}{\partial \theta} + C_{22} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \right) \Big/ A_1 C_{22};\ a_{2,11} = -\left(C_{22} + K_2 + r k_1 C_{12} \right) / C_{22};$$

$$a_{2,12} = -\frac{1}{A_1 C_{22}} \cdot \frac{\partial D_{66}}{\partial \eta};\ a_{2,13} = \frac{1}{A_1^2 C_{22}} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \cdot \left(r \frac{\partial C_{66}}{\partial \eta} - k_1 \frac{\partial D_{66}}{\partial \eta} \right);$$

$$a_{2,14} = \left(A_1^2 K_2 - A_1 \frac{\partial C_{12}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - A_1 C_{12} \frac{\partial^2 A_1}{\partial \theta^2} + C_{11} \left(\frac{\partial A_1}{\partial \theta} \right)^2 \right) \Big/ A_1^2 C_{22};$$

$$a_{2,15} = \frac{r k_1 C_{11} - r k_1 C_{12} + C_{12} - C_{22}}{A_1 C_{22}} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial C_{22}}{\partial \theta} + r k_1 \frac{\partial C_{12}}{\partial \theta} + r C_{12} \frac{\partial k_1}{\partial \theta} \right) \Big/ C_{22};$$

$$a_{2,16} = \frac{1}{A_1^2 C_{22}} \cdot \frac{\partial D_{66}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \theta};\ a_{2,17} = -r \frac{K_2}{C_{22}};\ a_{2,18} = -\frac{r^2 q_\theta}{C_{22}};$$

$$a_{31} = -\frac{r^2 K_1}{A_1^2 K_2};\ a_{32} = r \frac{\left(r k_1 K_1 + r C_{11} k_1 + C_{12} \right)}{A_1 K_2};\ a_{33} = -\frac{r^2}{A_1^2 K_2} \cdot \frac{\partial K_1}{\partial \eta};\ a_{34} = -\frac{r^2 K_1}{A_1 K_2};$$

$$a_{35} = \frac{C_{22} + K_2 + r C_{12} k_1}{K_2};\ a_{36} = -\frac{\left(K_2 \frac{\partial A}{\partial \theta} + A \frac{\partial K_2}{\partial \theta} \right)}{A K_2};\ a_{37} = -r;\ a_{38} = \frac{r^2 k_1}{A K_2} \cdot \frac{\partial K_1}{\partial \eta};$$

$$a_{39} = \frac{1}{A_1 K_2} \left(C_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + r k_1 C_{11} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + A_1 \frac{\partial K_2}{\partial \theta} + K_2 \frac{\partial A}{\partial \theta} \right);\ a_{3,10} = \frac{2 r k_1 C_{12} + C_{22} + r^2 k_1^2 C_{11}}{K_2};$$

$$a_{3,11} = -\frac{r^2}{A K_2} \cdot \frac{\partial K_1}{\partial \eta};\ a_{3,12} = -r \frac{\left(K_2 \frac{\partial A}{\partial \theta} + A \frac{\partial K_2}{\partial \theta} \right)}{A K_2};\ a_{3,13} = -\frac{r^2 q_\eta}{K_2};$$

$$a_{41} = -r \frac{\left(k_1^2 D_{11} D_{66} - r k_1 D_{11} C_{66} + C_{11} D_{66} \right)}{A_1^2 D_{66} C_{66}};\ a_{42} = \frac{1}{A_1} \left(r k_1 - 1 - \frac{r C_{12} + k_1 D_{12}}{r C_{66}} + \frac{D_{12}}{D_{66}} \right);$$

$$a_{43} = r \frac{\left(k_1 D_{66} - r C_{66} \right)}{A_1^2 D_{66} C_{66}};\ a_{44} = \frac{1}{A_1} \left(\frac{k_1 D_{12}}{C_{66}} - \frac{r D_{12}}{D_{66}} - r^2 \right);$$

$$a_{45} = \frac{r}{A_1^2 D_{66} C_{66}} \cdot \left(r k_1 C_{66} \frac{\partial D_{11}}{\partial \eta} - D_{66} \frac{\partial C_{11}}{\partial \eta} - k_1^2 D_{66} \frac{\partial D_{11}}{\partial \eta} \right);$$

$$a_{46} = \frac{\left(k_1 D_{66} - r C_{11} - r k_1^2 D_{11} - r k_1^2 D_{66} \right)}{A_1^2 r C_{66}} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + \left(k_1 D_{66} \frac{\partial k_1}{\partial \theta} - \frac{\partial C_{66}}{\partial \theta} \right) \Big/ A_1 C_{66} +$$

$$+\frac{rk_1}{A_1{}^2 D_{66}}\cdot\left(A_1\frac{\partial D_{66}}{\partial\theta}+D_{11}\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{A_1{}^2}\left(rk_1\frac{\partial A_1}{\partial\theta}+A_1 r\frac{\partial k_1}{\partial\theta}-\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right);$$

$$a_{47}=\frac{r^2k_1^2D_{11}+r^2K_1+D_{12}}{A_1D_{66}}-\frac{rC_{12}+2r^2k_1K_1+r^2k_1C_{11}+r^2k_1^3D_{11}+k_1D_{12}}{A_1rC_{66}};$$

$$a_{48}=\frac{\left(k_1D_{66}-rC_{66}\right)}{A_1{}^2D_{66}C_{66}}\cdot\frac{\partial D_{11}}{\partial\eta};\quad a_{49}=\frac{r}{A_1{}^2}\left[\left(D_{11}\frac{\partial A}{\partial\theta}+A_1r\frac{\partial D_{66}}{\partial\theta}\right)\Big/D_{66}+\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right]-$$

$$-\frac{D_{66}}{A_1C_{66}}\frac{\partial k_1}{\partial\theta}+\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\cdot\left(D_{66}-rk_1D_{66}-k_1D_{11}\right)\Big/A_1{}^2rC_{66};$$

$$a_{4,10}=\frac{D_{66}}{A_1r^3C_{66}}\cdot\left(\frac{\partial A_1}{\partial\theta}-rk_1\frac{\partial A_1}{\partial\theta}+A_1r\frac{\partial k_1}{\partial\theta}\right)+\frac{1-rk_1}{A_1r}\cdot\frac{\partial A_1}{\partial\theta}+\frac{1}{rD_{66}}\cdot\frac{\partial D_{66}}{\partial\theta}-\frac{1}{rC_{66}}\cdot\frac{\partial C_{66}}{\partial\theta};$$

$$a_{4,11}=\frac{1}{A_1}\left[\frac{1}{D_{66}}\frac{\partial D_{12}}{\partial\eta}-\frac{k_1}{rC_{66}}\frac{\partial D_{12}}{\partial\eta}-\frac{1}{C_{66}}\frac{\partial C_{12}}{\partial\eta}\right];$$

$$a_{4,12}=-\frac{D_{66}}{A_1r^2C_{66}}\left(\frac{\partial A_1}{\partial\theta}-rk_1\frac{\partial A_1}{\partial\theta}+A_1r\frac{\partial k_1}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1}{\partial\theta}-\frac{1}{D_{66}}\frac{\partial D_{66}}{\partial\theta};$$

$$a_{4,13}=\frac{\left(k_1D_{66}-rC_{66}\right)}{A_1D_{66}C_{66}}\cdot\frac{\partial D_{12}}{\partial\eta};$$

$$a_{4,14}=-\frac{q}{A_1{}^2r^2C_{66}}\cdot k_1D_{66}\left(\frac{\partial A_1}{\partial\theta}-rk_1\frac{\partial A_1}{\partial\theta}+A_1r\frac{\partial k_1}{\partial\theta}\right)\cdot\frac{\partial A_1}{\partial\theta}-\frac{k_1}{A_1D_{66}}\left(\frac{\partial D_{66}}{\partial\theta}\frac{\partial A_1}{\partial\theta}+A_1r^2K_1\right)+$$

$$+\left[\left(\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right)^2+A_1\frac{\partial^2A_1}{\partial\theta^2}-A_1r\frac{\partial k_1}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial A_1}{\partial\theta}-A_1rk_1\frac{\partial^2A_1}{\partial\theta^2}-rk_1\left(\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right)^2\right]\Big/rA_1{}^2-$$

$$-\left(2Ar^2k_1^2K_1-\frac{\partial C_{66}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right)\Big/A_1rC_{66};$$

$$a_{4,15}=\frac{1}{A_1{}^2D_{66}C_{66}}\left(rk_1C_{66}\frac{\partial D_{11}}{\partial\eta}-D_{66}\frac{\partial C_{11}}{\partial\eta}-k_1^2D_{66}\frac{\partial D_{11}}{\partial\eta}\right)\cdot\frac{\partial A_1}{\partial\theta};$$

$$a_{4,16}=\frac{1}{A_1D_{66}}\left(\frac{\partial D_{12}}{\partial\eta}+r^2k_1^2\frac{\partial D_{11}}{\partial\eta}\right)-$$

$$-\frac{1}{A_1rC_{66}}\left(r^2k_1\frac{\partial C_{11}}{\partial\eta}+k_1\frac{\partial D_{12}}{\partial\eta}+r^2k_1^3\frac{\partial D_{11}}{\partial\eta}+r\frac{\partial C_{12}}{\partial\eta}\right);$$

$$a_{4,17}=\frac{\left(D_{66}-rk_1D_{66}+r^2C_{66}\right)}{A^2r^2C_{66}}\cdot\left(\frac{\partial A}{\partial\theta}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{A_1}\left(\frac{1}{D_{66}}\frac{\partial D_{66}}{\partial\theta}+\frac{D_{66}}{rC_{66}}\frac{\partial k_1}{\partial\theta}\right)\cdot\frac{\partial A}{\partial\theta}+\frac{rK_1\left(rC_{66}-2k_1D_{66}\right)}{D_{66}C_{66}}+\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial\theta^2};$$

$$a_{4,18}=\frac{\left(k_1D_{66}-rC_{66}\right)}{A_1{}^2D_{66}C_{66}}\cdot\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial D_{11}}{\partial\eta};\ a_{4,19}=\frac{rq_\eta}{C_{66}};$$

$$a_{51}=\frac{r^3k_1D_{12}C_{22}+r^2D_{66}C_{22}+D_{22}D_{66}-r^2D_{22}C_{66}-r^2D_{22}C_{12}}{A_1r^2C_{22}D_{22}};$$

$$a_{52}=\frac{k_1D_{22}D_{66}-rD_{22}C_{66}+r^2k_1D_{66}C_{22}}{A_1{}^2C_{22}D_{22}};$$

$$a_{53}=-\frac{D_{22}D_{66}+r^2D_{66}C_{22}+r^2D_{12}C_{22}}{A_1rC_{22}D_{22}};\ a_{54}=-\frac{D_{66}\left(r^2C_{22}+D_{22}\right)}{A_1{}^2C_{22}D_{22}};$$

$$a_{55}=\frac{r}{A_1{}^2D_{22}}\left(A_1D_{12}\frac{\partial k_1}{\partial\theta}+A_1k_1\frac{\partial D_{12}}{\partial\theta}-k_1D_{66}\frac{\partial A_1}{\partial\theta}-k_1D_{11}\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right)+$$

$$+\frac{1}{A_1{}^2rC_{22}}\left(rC_{11}\frac{\partial A_1}{\partial\theta}+rC_{66}\frac{\partial A_1}{\partial\theta}-A_1r\frac{\partial C_{12}}{\partial\theta}-k_1D_{66}\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right);$$

$$a_{56}=\frac{1}{A_1{}^2C_{22}D_{22}}\left(r^2k_1C_{22}\frac{\partial D_{66}}{\partial\eta}-rD_{22}\frac{\partial C_{66}}{\partial\eta}+k_1D_{22}\frac{\partial D_{66}}{\partial\eta}\right);$$

$$a_{57}=\frac{1}{A_1{}^2rC_{22}D_{22}}\left(D_{22}D_{66}\frac{\partial A_1}{\partial\theta}-A_1r^2C_{22}\frac{\partial D_{12}}{\partial\theta}+r^2D_{11}C_{22}\frac{\partial A_1}{\partial\theta}+r^2D_{66}C_{22}\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right);$$

$$a_{58}=-\frac{\left(r^2C_{22}+D_{22}\right)}{A_1{}^2C_{22}D_{22}}\cdot\frac{\partial D_{66}}{\partial\eta};a_{59}=\left(D_{22}\frac{\partial D_{66}}{\partial\eta}-r^2D_{22}\frac{\partial C_{66}}{\partial\eta}+r^2C_{22}\frac{\partial D_{66}}{\partial\eta}\right)\Big/A_1r^2C_{22}D_{22};$$

$$a_{5,10}=\left(rk_1D_{12}C_{22}\frac{\partial A_1}{\partial\theta}+A_1C_{22}\frac{\partial D_{22}}{\partial\theta}-A_1D_{22}\frac{\partial C_{22}}{\partial\theta}-D_{12}C_{22}\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right)\Big/A_1rC_{22}D_{22};$$

$$a_{4,11}=\frac{1}{A_1}\left[\frac{1}{D_{66}}\frac{\partial D_{12}}{\partial\eta}-\frac{k_1}{rC_{66}}\frac{\partial D_{12}}{\partial\eta}-\frac{1}{C_{66}}\frac{\partial C_{12}}{\partial\eta}\right];$$

$$a_{5,12}=-\frac{\left(r^2C_{22}+D_{22}\right)}{A_1rC_{22}D_{22}}\cdot\frac{\partial D_{66}}{\partial\eta};\quad a_{5,13}=-\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial A}{\partial\theta}+\frac{1}{D_{22}}\frac{\partial D_{22}}{\partial\theta}\right);$$

$$a_{5,14}=\frac{1}{A_1{}^2rC_{22}D_{22}}\left(rD_{22}\frac{\partial C_{66}}{\partial\eta}-r^2k_1C_{22}\frac{\partial D_{66}}{\partial\eta}-k_1D_{22}\frac{\partial D_{66}}{\partial\eta}\right)\cdot\frac{\partial A_1}{\partial\theta};$$

$$a_{5,15} = \left(A_1^2 K_2 - A_1 \frac{\partial C_{12}}{\partial \theta} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - A_1 C_{12} \frac{\partial^2 A_1}{\partial \theta^2} + C_{11} \left(\frac{\partial A_1}{\partial \theta} \right)^2 \right) \Big/ A_1^2 r C_{22} +$$

$$+ \left(A_1 k_1 D_{12} \frac{\partial^2 A_1}{\partial \theta^2} - k_1 D_{11} \left(\frac{\partial A_1}{\partial \theta} \right)^2 + A_1 k_1 \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + A_1 D_{12} \frac{\partial k_1}{\partial \theta} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - A_1^2 r K_2 \right) \Big/ A_1^2 D_{22};$$

$$a_{5,16} = \left(C_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - A_1 r k_1 \frac{\partial C_{12}}{\partial \theta} - r k_1 C_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + r k_1 C_{11} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - A_1 \frac{\partial C_{22}}{\partial \theta} - A_1 r C_{12} \frac{\partial k_1}{\partial \theta} \right) \Big/ A_1 r C_{22} +$$

$$+ \left(2 A_1 r^2 k_1 D_{12} \frac{\partial k_1}{\partial \theta} + A_1 r^2 k_1^2 \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta} - r^2 k_1^2 D_{11} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - D_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + r^2 k_1^2 D_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + A \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta} \right) \Big/ A_1 r D_{22};$$

$$a_{5,17} = \frac{\left(r^2 C_{22} + D_{22} \right)}{A_1^2 r C_{22} D_{22}} \cdot \frac{\partial D_{66}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \theta};$$

$$a_{5,18} = \left(A_1^2 r^2 K_2 C_{22} - A_1 C_{22} D_{12} \frac{\partial^2 A_1}{\partial \theta^2} + C_{22} D_{11} \left(\frac{\partial A_1}{\partial \theta} \right)^2 - \right.$$

$$\left. - A_1 C_{22} \frac{d D_{12}}{d \theta} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - A_1^2 K_2 D_{22} \right) / A_1^2 C_{22} D_{22}; \quad a_{5,19} = -\frac{r}{C_{22}} q_\theta.$$

Присоединив к системе разрешающих уравнений (12) граничные условия, получаем двумерную краевую задачу. Поскольку в основную систему входят производные от разрешающих функций не выше второго порядка, то для аппроксимации решения ограничимся сплайн-функциями третьей степени, которые формируются с помощью линейной комбинации *B*-сплайнов так, чтобы точно удовлетворить некоторым типам граничных условий. Тогда искомое решение краевой задачи для системы уравнений (12) с соответствующими граничными условиями представим в виде

$$u(\eta,\theta) = \sum_{i=0}^{N} u_i(\theta) \varphi_{1i}(\eta), \quad v(\eta,\theta) = \sum_{i=0}^{N} v_i(\theta) \varphi_{2i}(\eta), \quad w(\eta,\theta) = \sum_{i=0}^{N} w_i(\theta) \varphi_{3i}(\eta),$$

$$\psi_\eta(\eta,\theta) = \sum_{i=0}^{N} \psi_{\eta i}(\theta) \varphi_{4i}(\eta), \quad \psi_\theta(\eta,\theta) = \sum_{i=0}^{N} \psi_{\theta i}(\theta) \varphi_{5i}(\eta), \tag{14}$$

где $u_i(\theta)$, $v_i(\theta)$, $w_i(\theta)$, $\psi_{\eta\, i}(\theta)$, $\psi_{\theta\, i}(\theta)$ – функции, подлежащие определению, а $\phi_{ij(\eta)}$ $(j = \overline{1,5})$ – линейные комбинации *B*-сплайнов третьей степени.

На криволинейных контурах осевой окружности ($\eta = \mathrm{const}$) рассмотрим граничные условия:

1) контур жестко закреплен

$$u = v = w = \psi_\eta = \psi_\theta = 0; \tag{15}$$

2) контур шарнирно закреплен

$$u = v = w = M_\eta = Q_\theta = 0; \tag{16}$$

$$\text{или } u = v = w = \frac{\partial \psi_\eta}{\partial \eta} = \psi_\theta = 0; \tag{17}$$

3) контур закреплен и свободен в нормальном направлении

$$u = N_{\eta\theta} = Q_{\eta} = \psi_{\eta} = M_{\eta\theta} = 0; \qquad (18)$$

$$\text{или } u = \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \psi_{\eta}}{\partial \eta^2} = \psi_{\eta} = \frac{\partial \psi_{\theta}}{\partial \eta} = 0; \qquad (19)$$

4) контур шарнирно оперт и свободен в направлении образующей

$$N_{\eta} = v = w = M_{\eta} = \psi_{\theta} = 0; \qquad (20)$$

$$\text{или } \frac{\partial u}{\partial \eta} = v = w = \frac{\partial \psi_{\eta}}{\partial \eta} = \psi_{\theta} = 0. \qquad (21)$$

Так как приведенные граничные условия (15) – (21) содержат значения разрешающих функций и их производных, которые приравниваются нулю, то на контуре $\eta = \eta_i \; (i = 1, 2)$ их можно представить через B-сплайны следующим образом:

а) если разрешающая функция равна нулю на обоих торцах оболочки, то

$$\begin{gathered}
\varphi_{j0} = -4B_3^{-1}(\eta) + B_3^0(\eta); \; \varphi_{j1} = -B_3^{-1}(\eta) - \frac{1}{2}B_3^0(\eta) + B_3^1(\eta); \\
\varphi_{ji} = -B_3^i(\eta) \qquad (i = 2, 3, ..., N-2); \\
\varphi_{jN-1} = B_3^{N-1}(\eta) - \frac{1}{2}B_3^N(\eta) + B_3^{N+1}(\eta); \\
\varphi_{jN} = B_3^N(\eta) - 4B_3^{N+1}(\eta);
\end{gathered} \qquad (22)$$

б) если производная по η от разрешающей функции равна нулю на обоих торцах, то

$$\begin{gathered}
\varphi_{j0} = B_3^0(\eta); \; \varphi_{j1} = B_3^{-1}(\eta) - \frac{1}{2}B_3^0(\eta) + B_3^1(\eta); \\
\varphi_{ji} = B_3^i(\eta) \qquad (i = 2, 3, ..., N-2); \\
\varphi_{jN-1} = B_3^{N-1}(\eta) - \frac{1}{2}B_3^N(\eta) + B_3^{N+1}(\eta); \\
\varphi_{jN} = B_3^N(\eta).
\end{gathered} \qquad (23)$$

Подставляя выражение (13) в разрешающую систему уравнений (11) и в соответствии с методом сплайн-аппроксимации требуя их удовлетворения на $N+1$ линиях $\eta = \xi_i \; (i = \overline{1, N+1})$, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $10(N+1)$, которую представим в виде

$$\frac{d\overline{R}}{d\theta} = A\overline{R} + \overline{f}\,; \qquad (24)$$

$$\begin{gathered}
\overline{R} = \{u_0, ..., u_N, u_0', ..., u_N', v_0, ..., v_N, v_0', ..., v_N'; \\
w_0, ..., w_N, w_0', ..., w_N', \psi_{\eta 0}, ..., \psi_{\eta N}, \psi_{\eta 0}', ...; \\
\psi_{\eta N}', \psi_{\theta 0}, ..., \psi_{\theta N}, \psi_{\theta 0}', ..., \psi_{\theta N}'\}^T,
\end{gathered} \qquad (25)$$

где $\overline{R}$ – вектор-функция от θ; $\overline{f}$ – вектор правых частей; A – квадратная матрица, элементы которой зависят от θ. При этом используем условия симметрии по θ.

3. Числовые результаты.

На основе изложенного подхода решена задача о напряженном состоянии замкнутой в поперечном сечении усеченной тороидальной ортотропной оболочкb постоянной толщины с круговым поперечным сечением при следующих исходных данных: S – длина дуги вдоль оси оболочки $0 \le S \le L$, *L=80*, толщина *h=1,5*; $r = 15$; $\Delta\eta = \pi/3; \pi/2; 2\pi/3$, $\Delta\eta \cdot R = L$. Механические параметры оболочки принимают следующие значения [15]: $E_\eta = 5E; E_\theta = 1,25E; G_{\eta\theta} = 0,4E; G_{\eta\gamma} = G_{\theta\gamma} = 0,2E$, где E – модуль упругости, коэффициент Пуассона $\nu_\eta = 0,045$. Оболочка подвержена действию внутреннего нормального давления $q = q_0 = \text{const}$.

Исследуем влияние величины угла осевого сечения тора и способа закрепления краев на нормальное перемещение и напряжения оболочки. Результаты решения задачи приведены на рис. 2, 3 в виде графиков распределения прогибов, соответственно, для жестко закрепленного и шарнирно закрепленного контуров и в табл. 1 – 4 – для напряжений σ_η, σ_θ на внешней и внутренней поверхностях оболочки. На рис. 2 показаны графики распределений полей перемещений вдоль оси оболочки для трех вариантов искривления оси при $\Delta\eta = \pi/3; \pi/2; 2\pi/3$ на интервале $0 \le S \le L/2$ для случая жестко закрепленных краев оболочки. Сплошными линиями обозначены кривые для $\theta = -\pi/2$, а штриховыми – для $\theta = 0$. Для случаев $\theta = \pi/2$ и $\theta = -\pi/2$ графики отличаются незначительно.

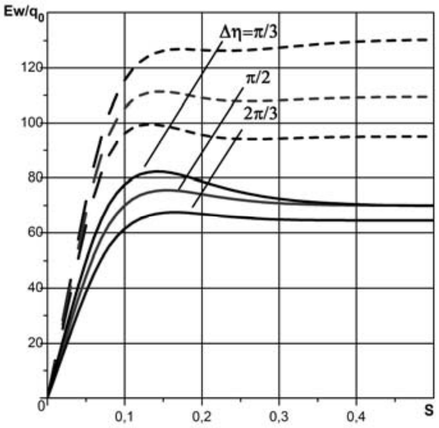

Рис. 2

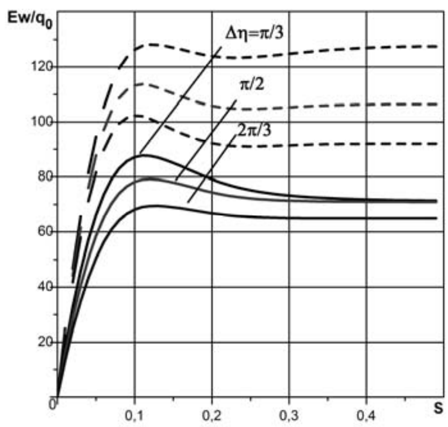

Рис. 3

Из рис. 2 видно, как при изгибании оболочки с увеличением угла раствора в осевом сечении оболочка становится более жесткой. При этом тороидальная оболочка в сечении $\theta = 0$ деформируется больше, чем при $\theta = -\pi/2$, т.е. она более податлива в перпендикулярном к осевому сечению направлении.

Аналогичная картина имеет место и для варианта при шарнирном закреплении контуров оболочки (рис. 3). Здесь все обозначения совпадают с ранее принятыми (рис. 2). В этом случае максимальное значение прогибов оболочки превышает максимальное значение для случая жесткого закрепления торцов.

В табл. 1, 2 приведены значения напряжений, соответственно, σ_η^+ – на внешней поверхности оболочки и σ_η^- – на внутренней поверхности вдоль оси оболочки в трех точках поперечного сечения $\theta = -\pi/2, 0, \pi/2$ в зависимости от изменения угла $\Delta\eta = \pi/3; \pi/2; 2\pi/3$ для жестко (I) и шарнирно (II) закрепленных торцов. Из табл. 1 следует, что для варианта I в зависимости от $\Delta\eta$ напряжение σ_η^+ для $\theta = -\pi/2$ сначала увеличивается по абсолютной величине при $\Delta\eta = \pi/2$, а затем убывает при $\Delta\eta = 2\pi/3$. Для варианта же II напряжение положительное и с увеличением $\Delta\eta$ плавно возрастает. Для $\theta = 0$ напряжение σ_η^+ изменяет значение и для $\theta = \pi/2$ оно почти совпадает с σ_η^+ при $\theta = -\pi/2$.

Таблица 1

S/L	θ	σ_η^+					
		$\Delta\eta = \pi/3$		$\Delta\eta = \pi/2$		$\Delta\eta = 2\pi/3$	
		I	II	I	II	I	II
0	-π/2	-7,1407	7,3534	-10,707	8,8583	-4,0349	9,7361
	0	6,1703	4,5807	4,1283	6,6992	7,4828	8,035
	π/2	-7,1408	7,3535	-10,707	8,8582	-4,0349	9,7361
0,1	-π/2	-7,2143	7,4538	-10,891	8,8388	-4,1705	9,5865
	0	6,4966	5,1578	4,7852	6,9051	7,4693	7,8749
	π/2	-7,2144	7,4538	-10,891	8,8387	-4,1705	9,5865
0,2	-π/2	-7,965	7,6427	-11,887	8,9895	-4,8265	9,7129
	0	7,0277	5,9079	5,6084	7,3437	7,8078	8,1196
	π/2	-7,9652	7,6428	-11,887	8,9894	-4,8264	9,713
0,25	-π/2	-8,3868	7,6686	-12,445	9,003	-5,1787	9,7206
	0	7,2475	6,2284	5,9583	7,5288	7,9519	8,2301
	π/2	-8,3869	7,6688	-12,445	9,0029	-5,1786	9,7207
0,5	-π/2	-9,6217	7,5133	-14,04	8,8438	-6,202	9,5649
	0	7,6627	6,864	6,6546	7,8756	8,2159	8,4269
	π/2	-9,6208	7,5134	-14,04	8,8437	-6,2019	9,565

Таблица 2

S/L	θ	σ_η^-					
		$\Delta\eta = \pi/3$		$\Delta\eta = \pi/2$		$\Delta\eta = 2\pi/3$	
		I	II	I	II	I	II
0	-π/2	25,652	7,4992	25,355	9,1231	24,309	10,126
	0	4,4123	4,8431	6,4642	6,9853	7,8779	8,4292
	π/2	25,652	7,4992	25,356	9,1232	24,309	10,126
0,1	-π/2	26,043	7,5931	25,378	9,0809	24,069	9,9286
	0	5,2038	5,5491	6,9338	7,3222	8,0075	8,3979
	π/2	26,043	7,5931	25,378	9,081	24,069	9,9286
0,2	-π/2	27,521	7,7786	26,6	9,2185	25,181	10,029
	0	5,9792	6,2613	7,4472	7,7448	8,3081	8,6002
	π/2	27,521	7,7786	26,6	9,2186	25,181	10,028
0,25	-π/2	28,192	7,802	27,151	9,2254	25,68	10,024
	0	6,2604	6,5216	7,6228	7,8905	8,4039	8,6642
	π/2	28,192	7,8021	27,151	9,2255	25,68	10,024
0,5	-π/2	29,644	7,6376	28,344	9,0473	26,761	9,8384
	0	6,6745	6,9064	7,8376	8,0613	8,4771	8,6897
	π/2	29,644	7,6376	28,343	9,0474	26,761	9,8384

Из табл. 2 следует, что напряжения σ_η^- на внутренней поверхности оболочки для варианта I по θ не изменяют знак и при $\theta = 0$ уменьшаются в несколько раз, а с увеличением $\Delta\eta$ изменяются незначительно. Для варианта II общая картина не меняется, но напряжения по величине убывают в несколько раз.

Таблица 3

S/L	θ	σ_θ^+					
		$\Delta\eta$ = π/3		$\Delta\eta$ = π/2		$\Delta\eta$ = 2 π/3	
		I	II	I	II	I	II
0	-π/2	-0,12045	0,08273	-0,08033	0,09966	-0,04539	0,10953
	0	7,9021	7,8349	6,9289	6,7922	5,7998	5,6022
	π/2	-0,12043	0,08275	-0,08035	0,09962	-0,04539	0,10954
0,1	-π/2	-0,12253	0,08385	-0,08116	0,09944	-0,04692	0,10785
	0	7,9158	7,8638	7,0542	6,9606	6,1667	6,0417
	π/2	-0,12251	0,08389	-0,08119	0,09939	-0,04691	0,10787
0,2	-π/2	-0,13373	0,08598	-0,08961	0,10113	-0,0543	0,10927
	0	8,0461	7,9942	7,2082	7,1336	6,4485	6,3587
	π/2	-0,13372	0,08601	-0,08963	0,10108	-0,05428	0,1093
0,25	-π/2	-0,14001	0,08627	-0,09435	0,10128	-0,05826	0,10936
	0	8,111	8,058	7,2779	7,2074	6,557	6,4754
	π/2	-0,13999	0,08631	-0,09438	0,10123	-0,05825	0,10939
0,5	-π/2	-0,15795	0,08452	-0,10824	0,09949	-0,06977	0,10761
	0	8,3079	8,2482	7,4976	7,425	6,8436	6,7635
	π/2	-0,15793	0,08456	-0,10826	0,09943	-0,06975	0,10764

Таблица 4

S/L	θ	σ_θ^-					
		$\Delta\eta$ = π/3		$\Delta\eta$ = π/2		$\Delta\eta$ = 2 π/3	
		I	II	I	II	I	II
0	-π/2	0,28859	0,08437	0,28525	0,10263	0,27348	0,11392
	0	9,7689	9,6255	8,3941	8,1899	7,1022	6,8533
	π/2	0,2886	0,0844	0,28524	0,10259	0,27348	0,11394
0,1	-π/2	0,29299	0,08542	0,2855	0,10216	0,27078	0,1117
	0	9,3518	9,2519	8,1756	8,0361	7,1057	6,9374
	π/2	0,293	0,08546	0,28547	0,10211	0,27079	0,11172
0,20	-π/2	0,30961	0,08751	0,29925	0,10371	0,28328	0,11282
	0	8,9745	8,9105	8,0137	7,9195	7,1325	7,0157
	π/2	0,30963	0,08754	0,29922	0,10365	0,2833	0,11285
0,25	-π/2	0,31716	0,08777	0,30545	0,10379	0,2889	0,11277
	0	8,8351	8,7847	7,9648	7,8877	7,1634	7,0667
	π/2	0,31718	0,08781	0,30542	0,10373	0,28891	0,1128
0,50	-π/2	0,3335	0,08592	0,31887	0,10178	0,30106	0,11068
	0	8,5302	8,508	7,8372	7,8011	7,21	7,164
	π/2	0,33351	0,08596	0,31883	0,10172	0,30108	0,11072

В табл. 3, 4 приведены значения, соответственно, σ_θ^+ и σ_θ^- на внешней и внутренней сторонах оболочки при тех же геометрических параметрах (табл. 1, 2).

Из табл. 3 следует, что при $\theta = \pm\pi/2$, напряжения σ_θ^+ с увеличением $\Delta\eta$ значительно убывают, а при $\theta = 0$ изменяются незначительно. Но при этом величина σ_θ^+ при $\theta = 0$ значительно больше её значения при $\theta = \pm\pi/2$. Максимальные величины напряжений σ_θ^+ при $\theta = 0$ для вариантов I и II отличаются незначительно. Это свидетельствует о том, что граничные условия на торцах мало влияют на напряжения σ_θ^+ на некотором удалении от торцов.

Аналогичная картина в отношении напряжений σ_θ^- имеет место и на внутренней поверхности оболочки, что отображено в табл. 4.

Отметим, что при решении рассмотренных задач для получения решения с достаточной точностью учитывалось 16 точек коллокации, вследствие чего получено 160 обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом для получения устойчивого результата количество точек ортогонализации при применении численного метода равнялось 315.

Заключение.

Таким образом, данный подход, основанный на использовании неклассической модели типа Тимошенко, метода сплайн-коллокации и устойчивого численного метода дискретной ортогонализации позволяет решать задачи о напряженном состоянии тороидальных ортотропных оболочек в широком диапазоне изменения их геометрических и механических параметров с достаточной точностью.

Р Е З Ю М Е . На основі розробленого підходу розв’язана задача та проведено дослідження напруженого стану ортотропних тороїдальних оболонок у некласичній постановці, що базується на моделі прямолінійного елемента. Наведено числові дані про розподіли прогинів та напружень в залежності від викривлення осі оболонки.

1. *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.: Мир, 1968. – 184 с.
2. *Булгаков В. Н.* Статика тороидальных оболочек. – К.: Изд-во АН УССР, 1962. – 100 с.
3. *Годунов С. К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук – 1961. – **16**, № 3. – С. 171 – 174.
4. *Голушко С. К., Немировский Ю. В.* Прямые и обратные задачи механики композитных пластин и оболочек вращения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 432 с.
5. *Григолюк Э. И., Коган Е. А.* Статика упругих слоистых оболочек. – М.: НИИ механики Моск. ун-та, 1999. – 215 с.
6. *Григоренко Я. М.* Изотропные и анизотропные оболочки вращения переменной жесткости. – К.: Наук. думка, 1973. – 228 с.
7. *Григоренко Я. М.* Некоторые подходы к решению линейных и нелинейных задач теории оболочек в классической и уточненной постановках // Прикл. механика. – 1996. – **32**, № 6. – С. 3 – 39.
8. *Григоренко Я. М., Будак В. Д., Григоренко О. Я.* Розв’язання задач теорії оболонок на основі дискретно-континуальних методів. – Миколаїв: Іліон, 2010. – 294 с.
9. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Беспалов Е. И. и др.* Численное решение краевых задач статики ортотропных оболочек с переменными параметрами. – К.: Наук. думка, 1975. – 183 с.
10. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Голуб Г. П.* Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – К.: Наук. думка, 1987. – 216 с.
11. *Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я.* Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – К.: Академпериодика, 2006. – 472 с.
12. *Григоренко Я. М., Крюков Н. Н.* Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн функций (Обзор) // Прикл. механика. – 1995. – **31**, № 6 – С. 3 – 28.

13. *Завьялов Ю. С., Квасов Ю. И., Мирошниченко В. М.* Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
14. *Кларк Э., Рейсснер Э.* Изгиб труб с криволинейной осью // Проблемы механики. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955. – С. 125 – 149.
15. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропных тел. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
16. *Тимошенко С. П.* Курс теории упругости. – К.: Наук. думка, 1972. – 501 с.
17. *Grigorenko Ya. M., Rozhok L. S.* Stress analysis of longitudinally corrugated hollow ortotropic elliptic cylinders // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 3. – P. 255 – 263.
18. *Grigorenko Ya. M., Rozhok L. S.* Influence of Curvature on the Stress Stste of Hollow Cylinders with Complex-Shaped Noncircular Cross-Section cylinders // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 7. – P. 737 – 743.
19. *Grigorenko Ya. M., Rozhok L. S* Analysis of Stress State of Hollow Layered Cylinders with the Cross-Section of Complex-Shaped // Int. Appl. Mech. – 2011. – **47**, N 6. – P. 48 – 57.
20. *Piskunov V. G., Rasskazov A. O.* Evolution of the theory of laminated plates and shells // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 2. – P. 135 – 166.
21. *Soldatos K. P.* Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross-section. A survey // Appl. Mech. Rev. – 1999. – **52**. – P. 237 – 274.

Поступила 05.03.2012 Утверждена в печать 22.11.2012